माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ०प्र० द्वारा निर्धारित नवीनतम पाठ्यक्रमानुसार

U.P. Series

गणित

कक्षा-10

लेखन
अनुभवी लेखकों के द्वारा

PREMIER PUBLISHING HOUSE
New Delhi Muzaffarnagar

इकाई-1 बीजगणित (Algebra)

1

महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य
(Highest Common Factors and Least Common Multiples)

अभ्यास 1.1

1. निम्नलिखित बहुपदों के महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए—

(i) $4xy^2z^2, 16x^2y^3z^4$ (ii) $8a^2b^3, 4a^3b^2, 6a^4b^2$

(iii) x^2-4, x^3+8 (iv) z^3-4z, z^3+8

(v) $2+2x+2x^2, 1-x^3$ (vi) a^2-9, a^2-5a+6

(vii) x^3-9x, x^2-2x-3 (viii) $9-y^2, y^2+4y+3$

(ix) x^3+y^3, x^2-y^2 (x) $pq^3, p^3q(p+z)$

हल– (i) दिए हुए बहुपद $=4xy^2z^2$ तथा $16x^2y^3z^4$

गुणनखण्ड करने पर,

$$4xy^2z^2 = 2\times 2\times x\times y\times y\times z\times z$$

तथा $$16x^2y^3z^2 = 2\times 2\times 2\times 2\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z$$

उपर्युक्त बहुपदों के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=2\times 2\times x\times y\times y\times z\times z = 4xy^2z^2$

अतः अभीष्ट म०म० $= \mathbf{4xy^2z^2}$ **उत्तर**

(ii) दिए हुए बहुपद $=8a^2b^3, 4a^3b^2$ तथा $6a^4b^2$

गुणनखण्ड करने पर,

$$8a^2b^3 = 2\times 2\times 2\times a\times a\times b\times b\times b$$

$$4a^3b^2 = 2\times 2\times a\times a\times a\times b\times b$$

$$6a^4b^2 = 2\times 3\times a\times a\times a\times a\times b\times b$$

उपर्युक्त बहुपदों के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=2\times a\times a\times b\times b = 2a^2b^2$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{2a^2b^2}$ **उत्तर**

(iii) दिए हुए बहुपद $=x^2-4$ तथा x^3+8

गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-4 = x^2-2^2 = (x+2)(x-2)$$

तथा $$x^3+8 = x^3+2^3 = (x+2)(x^2-2x+4)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= x+2$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(x+2)}$ **उत्तर**

(iv) दिए हुए बहुपद $= z^3-4z$ तथा z^3+8

गुणनखण्ड करने पर,

$$z^3-4z = z(z^2-4) = z(z^2-2^2) = z(z+2)(z-2)$$

तथा $$z^3+8 = z^3+2^3 = (z+2)(z^2-2z+4)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= (z+2)$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(z+2)}$ **उत्तर**

(v) दिए हुए बहुपद $= 2+2x+2x^2$ तथा $1-x^3$

गुणनखण्ड करने पर,

$$2+2x+2x^2 = 2(1+x+x^2)$$

तथा $$1-x^3 = 1^3-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= (1+x+x^2)$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(1+x+x^2)}$ **उत्तर**

(vi) दिए हुए बहुपद $= a^2-9$ तथा a^2-5a+6

गुणनखण्ड करने पर,

$$a^2-9 = a^2-3^2 = (a+3)(a-3)$$

$$a^2-5a+6 = a^2-(3+2)a+6 = a^2-3a-2a+6$$
$$= a(a-3)-2(a-3) = (a-3)(a-2)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= (a-3)$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(a-3)}$ **उत्तर**

(vii) दिए हुए बहुपद $= x^3-9x,\ x^2-2x-3$

$$x^3-9x = x(x^2-9) = x(x^2-3^2) = x(x+3)(x-3)$$

तथा $$x^2-2x-3 = x^2-(3-1)x-3 = x^2-3x+x-3$$
$$= x(x-3)+1(x-3) = (x-3)(x+1)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= (x-3)$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(x-3)}$ **उत्तर**

(viii) दिए हुए बहुपद $= 9-y^2,\ y^2+4y+3$

गुणनखण्ड करने पर,

$$9-y^2 = 3^2-y^2 = (3+y)(3-y) = (y+3)(3-y)$$

तथा $$y^2+4y+3 = y^2+3y+y+3 = y(y+3)+1(y+3)$$
$$= (y+3)(y+1)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= (y+3)$

अतः अभीष्ट म०स० $= \mathbf{(y+3)}$ **उत्तर**

(ix) दिए हुए बहुपद $= x^3+y^3,\ x^2-y^2$

गुणनखण्ड करने पर,

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

तथा $$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(x+y)$

अतः अभीष्ट म०स० $=(x+y)$ **उत्तर**

(x) दिए हुए बहुपद $=pq^3, p^3q(p+z)$

गुणनखण्ड करने पर,

$$pq^3=p\times q\times q\times q$$

तथा $$p^3q(p+z)=p\times p\times p\times q(p+z)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=p\times q=pq$

अतः अभीष्ट म०स० $=pq$ **उत्तर**

2. a^3-27, a^2-9 तथा a^4-3a^3 का म०स० ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपद $=a^3-27, a^2-9$ तथा a^4-3a^3

गुणनखण्ड करने पर,

$$a^3-27=a^3-3^3=(a-3)(a^2+3a+9)$$

$$a^2-9=a^2-3^2=(a+3)(a-3)$$

तथा $$a^4-3a^3=a^3(a-3)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(a-3)$

अतः अभीष्ट म०स० $=(a-3)$ **उत्तर**

3. $x^2-xy-12y^2$ व x^2+3xy का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपद $=x^2-xy-12y^2, x^2+3xy$

गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-xy-12y^2=x^2-(4-3)xy-12y^2=x^2-4xy+3xy-12y^2$$
$$=x(x-4y)+3y(x-4y)=(x-4y)(x+3y)$$

तथा $$x^2+3xy=x(x+3y)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(x+3y)$

अतः अभीष्ट म०स० $=(x+3y)$ **उत्तर**

4. a^3-4a, a^2-4a+4 व a^4-16 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपद $=a^3-4a, a^2-4a+4$ व a^4-16

$$a^3-4a=a(a^2-4)=a(a^2-2^2)=a(a+2)(a-2)$$

$$a^2-4a+4=a^2-(2+2)a+4=a^2-2a-2a+4$$
$$=a(a-2)-2(a-2)=(a-2)(a-2)$$

$$a^4-16=(a^2)^2-(4)^2=(a^2+4)(a^2-4)$$
$$=(a^2+4)(a^2-2^2)=(a^2+4)(a+2)(a-2)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(a-2)$

अतः अभीष्ट म०स० $=(a-2)$ **उत्तर**

5. x^3+3x^2+3x+1, $(x+1)^4$ का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपद $=x^3+3x^2+3x+1$ तथा $(x+1)^4$

गुणनखण्ड करने पर,

$$(x+1)^4=(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)$$

तथा x^3+3x^2+3x+1 के गुणनखण्ड करने के लिए बहुपद में $x=-1$ रखने पर,

$$x^3+3x^2+3x+1=(-1)^3+3\times(-1)^2+3\times(-1)+1$$
$$=-1+3\times1-3+1=-1+3-3+1=0$$

अतः $(x+1)$ दिए हुए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

अब $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)A$

या $$A=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1}=x^2+2x+1$$
$$=x^2+x+x+1=x(x+1)+1(x+1)$$
$$=(x+1)(x+1)$$

या $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)(x+1)(x+1)$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(x+1)(x+1)(x+1)=(x+1)^3$

अतः अभीष्ट म०स० $=(x+1)^3$ **उत्तर**

6. $p(x)=(x^2-10x+16)$ और $q(x)=x^3-512$ का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$p(x)=x^2-10x+16=x^2-8x-2x+16$$
$$=x(x-8)-2(x-8)=(x-8)(x-2)$$

तथा $$q(x)=x^3-512=x^3-8^3$$
$$=(x-8)(x^2+8x+64)$$

उपर्युक्त बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=(x-8)$

अतः अभीष्ट म०स० $=(x-8)$ **उत्तर**

7. निम्नलिखित बहुपदों के महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए–

(i) a^2+5a+6, a^2-4

(ii) x^2-x, x^2-2x+1

(iii) $x^2+3x-18$ व $x^3+8x^2+4x-48$

(iv) x^2-5x+6, $x^2-7x+12$

(v) (x^2+x), $(x+1)^3$ व (x^3+1)

(vi) $10(16p^4-q^4)$ तथा $6(8p^3-q^3)$

(vii) z^3-27, z^2-5z+6 व z^2-9

(viii) $18-2x^2$, $2x^2+8x+6$

(ix) $3x^2y(x^3-y^3)$, $6xy^2(x^2-y^2)$

(x) $16x^4-81$, $8x^4-27x$ व $6x^2-5x-6$

हल– (i) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$a^2+5a+6=a^2+3a+2a+6=a(a+3)+2(a+3)$$
$$=(a+3)(a+2)$$

तथा $$a^2-4=a^2-2^2=(a+2)(a-2)$$

अतः अभीष्ट म०स०$=(a+2)$ **उत्तर**

(ii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-x=x(x-1)$$

तथा $$x^2-2x+1=x^2-x-x+1=x(x-1)-1(x-1)$$
$$=(x-1)(x-1)$$

अतः अभीष्ट म०स०$=(x-1)$ **उत्तर**

(iii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2+3x-18=x^2+6x-3x-18$$
$$=x(x+6)-3(x+6)=(x+6)(x-3)$$

तथा $x^3+8x^2+4x-48=x^3-2x^2+10x^2-20x+24x-48$

$$=x^2(x-2)+10x(x-2)+24(x-2)$$
$$=(x-2)(x^2+10x+24)$$
$$=(x-2)(x^2+6x+4x+24)$$
$$=(x-2)\{x(x+6)+4(x+6)\}$$
$$=(x-2)\{(x+6)(x+4)\}$$
$$=(x-2)(x+6)(x+4)$$

अतः अभीष्ट म०स०$=(x+6)$ **उत्तर**

(iv) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-5x+6=x^2-3x-2x+6=x(x-3)-2(x-3)$$
$$=(x-3)(x-2)$$

तथा $$x^2-7x+12=x^2-4x-3x+12$$
$$=x(x-4)-3(x-4)=(x-4)(x-3)$$

अतः अभीष्ट म०स०$=(x-3)$ **उत्तर**

(v) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2+x=x(x+1)$$
$$(x+1)^3=(x+1)(x+1)(x+1)$$

तथा $$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$$

अतः अभीष्ट म०स०$=(x+1)$ **उत्तर**

(vi) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$10(16p^4-q^4)=2\times5\{(4p^2)^2-(q^2)^2\}$$
$$=2\times5\{(4p^2+q^2)(4p^2-q^2)\}$$
$$=2\times5(4p^2+q^2)\{(2p)^2-p^2\}$$
$$=2\times5(4p^2+q^2)(2p+q)(2p-q)$$

तथा $6(8p^3-q^3)=2\times 3\{(2p)^3-(q)^3\}$

$=2\times 3\{(2p-q)(4p^2+2pq+q^2)\}$

$=2\times 3(2p-q)(4p^2+2pq+q^2)$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{2(2p-q)}$ **उत्तर**

(vii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$z^3-27=z^3-3^3=(z-3)(z^2+3z+9)$

$z^2-5z+6=z^2-3z-2z+6$

$=z(z-3)-2(z-3)=(z-3)(z-2)$

$z^2-9=z^2-3^2=(z+3)(z-3)$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{(z-3)}$ **उत्तर**

(viii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$18-2x^2=2(9-x^2)=2(3+x)(3-x)=2(x+3)(3-x)$

$2x^2+8x+6=2(x^2+4x+3)=2(x^2+3x+x+3)$

$=2\{x(x+3)+1(x+3)\}$

$=2\{(x+3)(x+1)\}=2(x+3)(x+1)$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{2(x+3)}$ **उत्तर**

(ix) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$3x^2y(x^3-y^3)=3x^2y(x-y)(x^2+xy+y^2)$

तथा $6xy^2(x^2-y^2)=2\times 3xy^2(x+y)(x-y)$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{3xy(x-y)}$ **उत्तर**

(x) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$16x^4-81=(4x^2)^2-(9)^2=(4x^2+9)(4x^2-9)$

$=(4x^2+9)\{(2x)^2-(3)^2\}$

$=(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)$

$8x^4-27x=x(8x^3-27)=x\{(2x)^3-(3)^3\}$

$=x\{(2x-3)(4x^2+6x+9)\}$

$=x(2x-3)(4x^2+6x+9)$

तथा $6x^2-5x-6=6x^2-9x+4x-6$

$=3x(2x-3)+2(2x-3)=(2x-3)(3x+2)$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{(2x-3)}$ **उत्तर**

8. x^8-256 व x^2+2x-8 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$x^8-256=(x^4)^2-(16)^2=(x^4+16)(x^4-16)$

$=(x^4+16)(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^4+16)(x^2+4)(x+2)(x-2)$

तथा $x^2+2x-8=x^2+4x-2x-8$

$$= x(x+4)-2(x+4) = (x+4)(x-2)$$

अतः अभीष्ट म०स० $= (x-2)$ उत्तर

9. x^4-49 तथा x^4-15x^2+56 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^4-49 = (x^2)^2-(7)^2 = (x^2+7)(x^2-7)$$

तथा $x^4-15x^2+56 = x^4-8x^2-7x^2+56$

$$= x^2(x^2-8)-7(x^2-8) = (x^2-8)(x^2-7)$$

अतः अभीष्ट म०स० $= (x^2-7)$ उत्तर

10. $p^2-pq-12q^2$ व p^3+3p^2q का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$p^2-pq-12q^2 = p^2-4pq+3pq-12q^2$$

$$= p(p-4q)+3q(p-4q) = (p-4q)(p+3q)$$

तथा $p^3+3p^2q = p^2(p+3q)$

अतः अभीष्ट म०स० $= (p+3q)$ उत्तर

अभ्यास 1.2

1. यदि $p(x)=ax^2+bx+c$ और $q(x)=bx^2+ax+c$ का म०स० $(x+1)$ हो तो सिद्ध कीजिए— $c=0$ या $a=b$

हल– दिए हुए बहुपद,

$$p(x) = ax^2+bx+c$$

तथा $q(x) = bx^2+ax+c$

चूँकि $(x+1)$, बहुपद $p(x)$ तथा $q(x)$ का म०स० है। अतः $(x+1)$ दोनों बहुपदों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड होगा।

अतः प्रत्येक बहुपद में $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ रखने पर शेषफल शून्य आएगा।

अब बहुपद ax^2+bx+c में $x=-1$ रखने पर,

$\Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+c=0$

$\Rightarrow a\times 1-b+c=0$

$\Rightarrow a-b+c=0$ ...(1)

बहुपद bx^2+ax+c में $x=-1$ रखने पर

$b(-1)^2+a(-1)+c=0$

$b-a+c=0$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$2c=0 \Rightarrow c=0$

अब c का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$a-b+0=0$

$a=b$

इति सिद्धम्

2. एक फल विक्रेता के पास x^2-x-12 सेब तथा $x^2-3x-18$ आम हैं। फल विक्रेता इन फलों को समान संख्या में अलग-अलग पेटियों में रखकर पार्सल करना चाहता है। ज्ञात कीजिए कि फल विक्रेता को कम-से-कम कितनी पेटियों की आवश्यकता होगी?

हल– फल विक्रेता के पास सेबों की संख्या $=x^2-x-12$

$$=x^2-4x+3x-12$$
$$=x(x-4)+3(x-4)=(x-4)(x+3)$$

तथा आमों की संख्या $=x^2-3x-18=x^2-6x+3x-18$

$$=x(x-6)+3(x-6)=(x-6)(x+3)$$

सेबों तथा आमों की संख्याओं का म०स० $=(x+3)$

अतः प्रत्येक पेटी में $(x+3)$ आम या सेब होंगे।

$$\text{सेबों की पेटियों की संख्या}=\frac{\text{सेबों की संख्या}}{\text{प्रत्येक पेटी में सेबों की संख्या}}$$

$$=\frac{(x-4)(x+3)}{(x+3)}=(x-4)$$

इसी प्रकार, आमों की पेटियों की संख्या $=\dfrac{(x-6)(x+3)}{(x+3)}=(x-6)$

कुल पेटियों की संख्या $=x-4+x-6=\mathbf{(2x-10)}$ **उत्तर**

3. यदि दो बहुपदों A व B का महत्तम समापवर्तक H है तो बहुपदों $(A+B)$ एवं $(A-B)$ का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—बहुपद A व B का महत्तम समापवर्तक $=H$

माना बहुपद $A=xH$ तथा बहुपद $B=yH$

अब $A+B=xH+yH$ या $(A+B)=(x+y)H$

तथा $A-B=xH-yH$ या $(A-B)=(x-y)H$

बहुपद $(A+B)$ व $(A-B)$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $=H$

अतः अभीष्ट म०स० $=\mathbf{H}$ **उत्तर**

4. बहुपदों a^2-9 तथा $a^2+2a-15$ का महत्तम समापवर्तक $(a-l)$ है। l का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$a^2-9=a^2-3^2=(a+3)(a-3)$$

तथा $a^2+2a-15=a^2+5a-3a-15$

$$=a(a+5)-3(a+5)=(a+5)(a-3)$$

अतः उपर्युक्त बहुपदों का म०स० $=(a-3)$

परन्तु, प्रश्नानुसार, म०स० $=(a-l)$

या $a-3=a-l$ या $3=l\Rightarrow l=3$ **उत्तर**

5. बहुपदों (x^2-1) तथा $\{ax^3-b(x+1)\}$ का महत्तम समापवर्तक $(x-1)$ है, तो a व b में संबंध ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपद,

$$x^2-1 \text{ तथा } \{ax^3-b(x+1)\}$$

तथा म०स० $=(x-1)$

अत: प्रत्येक बहुपद में $x-1=0 \Rightarrow x=1$ रखने पर शेषफल शून्य आएगा।

अब बहुपद $\{ax^3-b(x+1)\}$ में $x=1$ रखने पर,

$\{a\times 1^3-b(1+1)\}=0$ या $a\times 1-b\times 2=0$

या $a-2b=0$ या $a=2b$ **उत्तर**

6. p के किस मान के लिए $a^2-2a-24$ तथा a^2-pa-6 का महत्तम समापवर्तक $(a-6)$ होगा?

हल– दिए हुए बहुपद,

$a^2-2a-24$ तथा a^2-pa-6

तथा म०स० $=a-6$

अत: प्रत्येक बहुपद में $a-6=0 \Rightarrow a=6$ रखने पर शेषफल शून्य आएगा।

अब बहुपद a^2-pa-6 में $a=6$ रखने पर

$6^2-p\times 6-6=0$ या $36-6p-6=0$

या $30-6p=0$ या $5-p=0$

या $5=p \Rightarrow p=5$ **उत्तर**

7. यदि बहुपदों a^2+pa+q तथा a^2+la+m का महत्तम समापवर्तक $(a+x)$ है।

सिद्ध कीजिए— $x=\dfrac{m-q}{l-p}$

हल– दिए हुए बहुपद, a^2+pa+q तथा a^2+la+m तथा म०स० $=(a+x)$

अत: प्रत्येक बहुपद में $x+a=0$ या $a=-x$ रखने पर शेषफल शून्य आएगा।

अब बहुपद a^2+pa+q में $a=-x$ रखने पर,

$(-x)^2+p\times(-x)+q=0$ या $x^2-px+q=0$ ...(1)

तथा बहुपद a^2+la+m में $a=-x$ रखने पर,

$(-x)^2+l\times(-x)+m=0$

या $x^2-lx+m=0$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$x^2-px+q=x^2-lx+m$ या $-px+q=-lx+m$

या $lx-px=m-q$ या $(l-p)x=m-q$

या $x=\dfrac{m-q}{l-p}$ **इति सिद्धम्**

अभ्यास 1.3

1. निम्नलिखित के लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए—

(i) x^2y, y^2z, z^2x **(ii)** $4x^2y^3, 2xy^2, 6xy^3$

(iii) $(x^2-4), (x^2+x-6)$ **(iv)** (x^2-9) व (x^3+27)

(v) $(x^2+xy+y^2), (x^3-y^3)$ **(vi)** $2(x^3-1)$ व $6(x^3+x^2+x)$

(vii) $(x^2-7x+12)$ व (x^2-2x-3) **(viii)** (x^3+1) व (x^2-1)

(ix) $(x^2-x-2), (x^2+x-6)$

(x) $4(x^2-y^2), 10(x^3-y^3)$ तथा $6(x^4-y^4)$

हल– (i) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$x^2y = x\times x\times y$, $y^2z = y\times y\times z$ तथा $z^2x = z\times z\times x$

अतः अभीष्ट ल०स० $= x\times x\times y\times y\times z\times z$

$= x^2y^2z^2$ **उत्तर**

(ii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$4x^2y^3 = 2\times 2\times x\times x\times y\times y\times y$

$2xy^2 = 2\times x\times y\times y$

$6xy^3 = 2\times 3\times x\times y\times y\times y$

अतः अभीष्ट ल०स० $= 2\times 2\times x\times x\times y\times y\times y\times 3 = \mathbf{12x^2y^3}$ **उत्तर**

(iii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$x^2-4 = x^2-2^2 = (x+2)(x-2)$

तथा $x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6$

$= x(x+3)-2(x+3) = (x+3)(x-2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= \mathbf{(x+2)(x-2)(x+3)}$ **उत्तर**

(iv) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$x^2-9 = (x+3)(x-3)$

तथा $x^3+27 = (x^3+3^3) = (x+3)(x^2-3x+9)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x+3)(x-3)(x^2-3x+9)$

या $= (x-3)(x^3+27) = \mathbf{(x^3+27)(x-3)}$ **उत्तर**

(v) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$(x^2+xy+y^2) = (x^2+xy+y^2)$

तथा $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x-y)(x^2+xy+y^2) = \mathbf{x^3-y^3}$ **उत्तर**

(vi) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$2(x^3-1) = 2(x^3-1^3) = 2(x-1)(x^2+x+1)$

तथा $6(x^3+x^2+x) = 2\times 3x(x^2+x+1)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= 2\times 3x(x-1)(x^2+x+1)$

या $= \mathbf{6x(x^3-1)}$ **उत्तर**

(vii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$x^2-7x+12 = x^2-4x-3x+12$

$= x(x-4)-3(x-4) = (x-4)(x-3)$

तथा $x^2-2x-3 = x^2-3x+x-3$

$= x(x-3)+1(x-3) = (x-3)(x+1)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x-4)(x-3)(x+1)$ **उत्तर**

(viii) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

तथा $$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

अतः अभीष्ट ल०स० $=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)$

$$=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$$ **उत्तर**

(ix) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-x-2=x^2-2x+x-2$$

$$=x(x-2)+1(x-2)=(x-2)(x+1)$$

तथा $$x^2+x-6=x^2+3x-2x-6$$

$$=x(x+3)-2(x+3)=(x+3)(x-2)$$

अतः अभीष्ट ल०स० $=(x-2)(x+1)(x+3)$ **उत्तर**

(x) दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$4(x^2-y^2)=2\times2(x+y)(x-y)$$

$$10(x^3-y^3)=2\times5(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

तथा $$6(x^4-y^4)=2\times3(x^2+y^2)(x^2-y^2)$$

$$=2\times3(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$

अतः अभीष्ट ल०स० $=2\times2\times5\times3(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)$

$$=60(x^2+y^2)(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$=60(x^4-y^4)(x^2+xy+y^2)$$ **उत्तर**

2. x^4-xy^3, $4(x^2-y^2)$ तथा $6(x^3+y^3)$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^4-xy^3=x(x^3-y^3)=x(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$4(x^2-y^2)=2\times2(x+y)(x-y)$$

तथा $$6(x^3+y^3)=2\times3(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

अतः अभीष्ट ल०स० $=2\times2\times3\times x(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$$=12x(x^3-y^3)(x^3+y^3)$$ **उत्तर**

3. बहुपदों $8(x^3-2x^2+4x)$ व $28(x^3+8)$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$8(x^3-2x^2+4x)=8x(x^2-2x+4)=2\times2\times2\times x(x^2-2x+4)$$

तथा $$28(x^3+8)=2\times2\times7(x^3+2^3)$$

$$=2\times2\times7(x+2)(x^2-2x+4)$$

अतः अभीष्ट ल०स० $=2\times2\times2\times7\times x(x+2)(x^2-2x+4)$

$$=56x(x+2)(x^2+4-2x)$$ **उत्तर**

4. $(x^2-7x+12)$ व (x^2-16) का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-7x+12 = x^2-4x-3x+12$$
$$= x(x-4)-3(x-4) = (x-4)(x-3)$$

तथा $(x^2-16) = x^2-4^2 = (x+4)(x-4)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x-4)(x-3)(x+4)$

$= (x^2-16)(x-3)$ **उत्तर**

5. $x^2+x-6, 6x^2-24$ तथा x^2-6x+8 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6$$
$$= x(x+3)-2(x+3) = (x+3)(x-2)$$
$$6x^2-24 = 6(x^2-4) = 2\times 3(x+2)(x-2)$$

तथा $x^2-6x+8 = x^2-4x-2x+8$

$= x(x-4)-2(x-4) = (x-4)(x-2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= 2\times 3(x+2)(x-2)(x+3)(x-4)$

$= 6(x-2)(x+2)(x+3)(x-4)$ **उत्तर**

6. $x^2-y^2-2yz-z^2$, $x^2-y^2+2xz+z^2$ व $x^2-2xy+y^2-z^2$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-y^2-2yz-z^2 = x^2-(y^2+z^2+2yz)$$
$$= x^2-(y+z)^2 = (x+y+z)(x-y-z)$$
$$x^2-y^2+2xz+z^2 = x^2+z^2+2xz-y^2 = (x+z)^2-y^2$$
$$= (x+z+y)(x+z-y) = (x+y+z)(x-y+z)$$

तथा $x^2-2xy+y^2-z^2 = (x-y)^2-z^2$

$= (x-y+z)(x-y-z)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x+y+z)(x-y+z)(x-y-z)$ **उत्तर**

7. x^2-9y^2 तथा x^3-27y^3 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-9y^2 = x^2-(3y)^2 = (x+3y)(x-3y)$$

तथा $x^3-27y^3 = (x)^3-(3y)^3 = (x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x+3y)(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

$= (x^2-9y^2)(x^2+3xy+9y^2)$ **उत्तर**

8. $x(x^2-x+1)$ व (x^3+1) का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$$x(x^2-x+1) = x(x^2-x+1)$$

तथा $(x^3+1) = (x+1)(x^2-x+1)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= x(x+1)(x^2-x+1)$

$= x(x^3+1)$ **उत्तर**

9. $8(x^3-x^2+x)$ व $12(x^3+1)$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$8(x^3-x^2+x) = 2\times 2\times 2x(x^2-x+1)$

तथा $12(x^3+1) = 2\times 2\times 3(x+1)(x^2-x+1)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= 2\times 2\times 2\times 3\times x(x+1)(x^2-x+1)$

$= 24x(x^3+1)$ **उत्तर**

10. $3x^2-10x-8$ व $9x^2-4$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$3x^2-10x-8 = 3x^2-12x+2x-8$

$= 3x(x-4)+2(x-4) = (x-4)(3x+2)$

तथा $9x^2-4 = (3x)^2-(2)^2 = (3x+2)(3x-2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (x-4)(3x+2)(3x-2)$ **उत्तर**

11. $8x^2-10xy+3y^2$ व $64x^3-27y^3$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर,

$8x^2-10xy+3y^2 = 8x^2-6xy-4xy+3y^2$

$= 2x(4x-3y)-y(4x-3y) = (4x-3y)(2x-y)$

तथा $64x^3-27y^3 = (4x)^3-(3y)^3$

$= (4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

अतः अभीष्ट ल०स० $= (4x-3y)(2x-y)(16x^2+12xy+9y^2)$

$= (8x^2-4xy-6xy+3y^2)(16x^2+12xy+9y^2)$

$= (8x^2-10xy+3y^2)(16x^2+12xy+9y^2)$ **उत्तर**

अभ्यास 1.4

1. दो बहुपदों का म०स० $(x-2)$ तथा ल०स० (x^3-5x^2+6x) है। यदि पहला बहुपद (x^2-2x) है, तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—म०स० $= (x-2)$, ल०स० $= x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6)$

तथा पहला बहुपद $= x^2-2x = x(x-2)$

हम जानते हैं—

पहला बहुपद × दूसरा बहुपद = ल०स० × म०स०

$x(x-2)\times$ दूसरा बहुपद $= x(x^2-5x+6)\times(x-2)$

या दूसरा बहुपद $= \dfrac{x(x-2)(x^2-5x+6)}{x(x-2)} = (x^2-5x+6)$ **उत्तर**

2. P तथा Q दो बहुपद हैं, जिनके म०स० तथा ल०स० क्रमशः H व L है। यदि $P+Q=H+L$ हो, तो सिद्ध कीजिए—

$$P^2+Q^2=H^2+L^2$$

हल– हम जानते हैं— दो बहुपदों का गुणनफल = ल०स० × म०स०

अतः $P\times Q=H\times L \quad \Rightarrow \quad PQ=HL$ ...(1)

दिया है— $P+Q=H+L$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(P+Q)^2=(H+L)^2$$

या $P^2+Q^2+2PQ=H^2+L^2+2HL$ ...(2)

समीकरण (1) से $PQ=HL$ समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

या $P^2+Q^2+2HL=H^2+L^2+2HL$

या $P^2+Q^2=H^2+L^2$ **इति सिद्धम्**

3. a व b के मान ज्ञात कीजिए—यदि बहुपदों $(x^2+3x+2)\,(x^2-7x+a)$ और $(x^2-x-12)\,(x^2+5x+b)$ का महत्तम समापवर्तक $(x+1)\,(x-4)$ है।

हल– दिए हुए बहुपद,

$$p(x)=(x^2+3x+2)(x^2-7x+a)$$

$$q(x)=(x^2-x-12)(x^2+5x+b)$$

तथा म०स० $=(x+1)(x-4)$

अतः दोनों बहुपदों में $x+1=0$ या $x-4=0 \Rightarrow x=-1$ तथा $x=4$ रखने पर शेषफल शून्य होगा।

बहुपद $p(x)$ में $x=4$ रखने पर,

$$(4^2+4\times3+2)(4^2-4\times7+a)=0$$

या $(16+12+2)(16-28+a)=0$

या $30(-12+a)=0$

या $-12+a=0 \quad \Rightarrow \quad a=12$ **उत्तर**

अब बहुपद $q(x)$ में $x=-1$ रखने पर,

$$\{(-1)^2-(-1)-12\}\{(-1)^2+5\times(-1)+b\}=0$$

या $(1+1-12)\{1-5+b\}=0$

या $(-10)\{-4+b\}=0$ या $\{-4+b\}=0$

$b=4$ **उत्तर**

4. दो बहुपदों का गुणनफल $\{(x+2)^2(x-2)(x-5)\}$ तथा महत्तम समापवर्तक $(x+2)$ है। बहुपदों का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

दो बहुपदों का गुणनफल $=\{(x+2)^2(x-2)(x-5)\}$

महत्तम समापवर्तक $=(x+2)$

हम जानते है कि—

$$\text{लघुत्तम समापवर्त्य} = \frac{\text{दो बहुपदो का गुणनफल}}{\text{महत्तम समापवर्तक}}$$

$$= \frac{(x+2)^2(x-2)(x-5)}{(x+2)}$$

$$= (x+2)(x-2)(x-5) \qquad \text{उत्तर}$$

5. दो बहुपदों का महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य क्रमशः $(x-5)$ और $(x-5)(x^2-7x+12)$ है यदि उसमें से एक बहुपद $(x^2-8x+15)$ हो, तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— म०स० $= (x-5)$ ल०स० $= (x-5)(x^2-7x+12)$

पहला बहुपद $= (x^2-8x+15)$

अतः दूसरा बहुपद $= \dfrac{\text{म०स०} \times \text{ल०स०}}{\text{पहला बहुपद}}$

$$= \frac{(x-5)(x-5)(x^2-7x+12)}{(x^2-8x+15)}$$

$$= \frac{(x-5)(x-5)(x^2-4x-3x+12)}{(x^2-5x-3x+15)}$$

$$= \frac{(x-5)(x-5)\{x(x-4)-3(x-4)\}}{\{x(x-5)-3(x-5)\}}$$

$$= \frac{(x-5)(x-5)\{(x-4)(x-3)\}}{\{(x-5)(x-3)\}} = (x-5)(x-4)$$

$$= (x^2-4x-5x+20) = \mathbf{(x^2-9x+20)} \qquad \text{उत्तर}$$

6. दो बहुपदों का गुणनफल $\{(a-b)^2(a+b)^2\}$ तथा महत्तम समापवर्तक (a^2-b^2) व्यंजकों का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— दो बहुपदों का गुणनफल $= \{(a-b)^2(a+b)^2\}$

तथा म०स० $= a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

हम जानते है कि— ल०स० $= \dfrac{\text{दो बहुपदों का गुणनफल}}{\text{म०स०}} = \dfrac{(a-b)^2(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}$

$$= (a-b)(a+b) = a^2-b^2 \qquad \text{उत्तर}$$

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट–बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 20, 21 एवं 22 का अवलोकन कीजिए।

■ □ ■

2

परिमेय व्यंजक
(Rational Expressions)

अभ्यास 2.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन बहुपद हैं? कारण सहित लिखिए।

(i) $x^2+3\sqrt{x}+5$ **(ii)** $x^2-x\sqrt{x}$

(iii) $x^2-5\sqrt{x}+7$ **(iv)** x^2-3x+4

(v) $3x^7$ **(vi)** $3x^2-8x+\frac{6}{x}$

(vii) x^2+5x+6 **(viii)** x^3+1

हल– हम जानते हैं कि $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n$ के रूप का प्रत्येक बीजीय व्यंजक बहुपद कहलाता है।

(i) व्यंजक $x^2+3\sqrt{x}+5$ में x की घात भिन्नात्मक रूप में है। अत: यह बहुपद **नहीं** है।

(ii) व्यंजक $x^2-x\sqrt{x}$ में x की घात भिन्नात्मक रूप में है। अत: यह बहुपद **नहीं** है।

(iii) $x^2-5\sqrt{x}+7$ में x की घात भिन्नात्मक रूप में है। अत: यह बहुपद **नहीं** है।

(iv) व्यंजक x^2-3x+4 में प्रत्येक पद में चर x की घात ऋणेतर पूर्णांक है। अत: वह एक बहुपद **है**।

(v) $3x^7$ एक बहुपद है क्योंकि इसके चर की घात ऋणेत्तर पूर्णांक है।

(vi) व्यंजक $3x^2-8x+\frac{6}{x}$ के तीसरे पद $\frac{6}{x}$ या $6x^{-1}$ में चर x का घातांक -1 ऋण पूर्णांक होने के कारण यह बहुपद **नहीं** है।

(vii) व्यंजक x^2+5x+6 एक बहुपद **है**। क्योंकि प्रत्येक पद में चर x की घात ऋणेत्तर पूर्णांक है।

(viii) व्यंजक x^3+1 के प्रत्येक पद में चर x की घात ऋणेत्तर पूर्णांक है। अत: यह एक बहुपद **है**।

2. निम्नलिखित में कौन-कौन परिमेय व्यंजक हैं?

(i) $\frac{x^3-3x^2}{2x+3}$ **(ii)** $\frac{\sqrt{3}x^2-4x+8}{\sqrt{8}}$

(iii) $\frac{x^2-1}{2\sqrt{x}+4}$ **(iv)** $\frac{x^2\sqrt{3}-\sqrt{4}x+7}{x+\sqrt{5}}$

(v) $\frac{3x^2+5\sqrt{x}+6}{x+1}$ **(vi)** $\frac{x^2+2x+4}{2x+3}$

हल– हम जानते है कि— $\frac{p(x)}{q(x)}$ परिमेय व्यंजक होगा यदि $p(x)$ एवं $q(x)$ दोनों बहुपद हैं।

(i) व्यंजक $\frac{x^3-3x^2}{2x+3}$ में अंश व हर दोनों बहुपद हैं। अतः यह एक परिमेय व्यंजक है।

(ii) व्यंजक $\frac{\sqrt{3}x^2-4x+8}{\sqrt{8}}$ में अंश एक बहुपद है तथा हर $\neq 0$। अतः यह एक परिमेय व्यंजक है।

(iii) व्यंजक $\frac{x^2-1}{2\sqrt{x}+4}$ में अंश एक बहुपद है तथा हर बहुपद नहीं है। अतः परिमेय व्यंजक नहीं है।

(iv) व्यंजक $\frac{x^2\sqrt{3}-\sqrt{4}x+7}{x+\sqrt{5}}$ में अंश व हर दोनों बहुपद हैं। अतः यह एक बहुपद है।

(v) व्यंजक $\frac{3x^2+5\sqrt{x}+6}{x+1}$ में अंश एक बहुपद नहीं है। जबकि हर बहुपद है। अतः यह एक परिमेय व्यंजक नहीं है।

(vi) व्यंजक $\frac{x^2+2x+4}{2x+3}$ में अंश एवं हर दोनों बहुपद हैं। अतः यह एक परिमेय व्यंजक है।

3. एक परिमेय व्यंजक ज्ञात कीजिए, जिसका अंश शून्यक -2 एवं 1 वाला एक द्विघात बहुपद हो तथा हर शून्यक 2 और 3 वाला एक द्विघात बहुपद हो।

हल– दिया है : परिमेय व्यंजक का अंश = शून्यक -2 तथा 1 वाला द्विघात बहुपद

$$=(x+2)(x-1)$$
$$=x^2-x+2x-2=x^2+x-2$$

तथा परिमेय व्यंजक का हर = शून्यक 2 तथा 3 वाला द्विघात बहुपद

$$=(x-2)(x-3)$$
$$=x^2-3x-2x+6=x^2-5x+6$$

अतः अभीष्ट परिमेय व्यंजक $=\frac{x^2+x-2}{x^2-5x+6}$ **उत्तर**

4. एक ऐसा परिमेय व्यंजक ज्ञात कीजिए, जिसका अंश 3 तथा $\frac{1}{2}$ शून्यकों वाला द्विघात बहुपद है तथा जिसका हर $-\frac{3}{2}$ तथा 4 शून्यकों वाला द्विघात बहुपद है।

हल– दिया है— अंश = शून्यकों 3 व $\frac{1}{2}$ वाला बहुपद $=(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

हर = शून्यकों $-\frac{3}{2}$ तथा 4 वाला बहुपद $=\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-4)$

अतः परिमेय व्यंजक $=\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}=\frac{(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-4)}$

$$= \frac{(x-3)(2x-1)}{(2x+3)(x-4)} = \frac{2x^2-x-6x+3}{2x^2-8x+3x-12}$$

अतः अभीष्ट परिमेय व्यंजक $= \frac{2x^2-7x+3}{2x^2-5x-12}$ उत्तर

5. यह कथन सत्य है या असत्य– परिमेय व्यंजक $\frac{x^6-7x^2+2}{x^2+4}$ के हर की घात 6 है।

हल– व्यंजक $\frac{x^6-7x^2+2}{x^2+4}$ के हर x^2+4 की घात 2 है। अतः दिया गया कथन असत्य है।

अभ्यास 2.2

1. निम्नलिखित को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए–

(i) $\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$ **(ii)** $\frac{12a^3b^5c^4}{24a^2b^6c^5}$

(iii) $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ **(iv)** $\frac{x^2-4}{(x+2)^2}$

(v) $\frac{9-x^2}{(x+3)^2}$ **(vi)** $\frac{x^3-8}{x^2-4}$

(vii) $\frac{x^2-13x-48}{x^2-2x-15}$ **(viii)** $\frac{x^2-5x+6}{x-3}$

(ix) $\frac{2x^4-2x}{x^3+x^2+x}$ **(x)** $\frac{x^2-4}{x^3-8}$

हल— **(i)** $\frac{x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)}$ उत्तर

(ii) $\frac{12a^3b^5c^4}{24a^2b^6c^5} = \frac{2\times2\times3\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times b\times b\times c\times c\times c\times c}{2\times2\times2\times3\times a\times a\times b\times b\times b\times b\times b\times b\times c\times c\times c\times c\times c}$

$= \frac{a}{2bc}$ उत्तर

(iii) $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)} = (a-b)$ उत्तर

(iv) $\frac{x^2-4}{(x+2)^2} = \frac{x^2-2^2}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+2)} = \frac{(x-2)}{(x+2)}$ उत्तर

(v) $\frac{9-x^2}{(x+3)^2} = \frac{3^2-x^2}{(x+3)^2} = \frac{(3+x)(3-x)}{(x+3)(x+3)} = \frac{3-x}{x+3}$ उत्तर

(vi) $\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{x^3-2^3}{x^2-2^2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$ उत्तर

(vii) $\frac{x^2-13x-48}{x^2-2x-15}=\frac{x^2-16x+3x-48}{x^2-5x+3x-15}=\frac{x(x-16)+3(x-16)}{x(x-5)+3(x-5)}$

$=\frac{(x-16)(x+3)}{(x-5)(x+3)}=\frac{x-16}{x-5}$ उत्तर

(viii) $\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{x^2-3x-2x+6}{x-3}=\frac{x(x-3)-2(x-3)}{(x-3)}$

$=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)}=(x-2)$ उत्तर

(ix) $\frac{2x^4-2x}{x^3+x^2+x}=\frac{2x(x^3-1)}{x(x^2+x+1)}=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)}$

$=2(x+1)$ उत्तर

(x) $\frac{x^2-4}{x^3-8}=\frac{x^2-2^2}{x^3-2^3}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{(x+2)}{(x^2+2x+4)}$ उत्तर

2. निम्नलिखित को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए–

(i) $\frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^3-8x+3}$ **(ii)** $\frac{8(a+b-c)^2}{12(a+b-c)^3}$

(iii) $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(b+c)x+bc}$ **(iv)** $\frac{x^3+x^2}{x^2+5x+4}$

(v) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$ **(vi)** $\frac{x^3+4x^2}{x^2+5x+4}$

(vii) $\frac{x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}{x^4-b^4}$ **(viii)** $\frac{(x^2-1)(x+2)(x^2-x-72)}{(x-9)(x+1)}$

हल– (i) $\frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^3-8x+3}=\frac{x^3+3x^2-x^2-3x+x+3}{x^3+3x^2-3x^2-9x+x+3}$

$=\frac{x^2(x+3)-x(x+3)+1(x+3)}{x^2(x+3)-3x(x+3)+1(x+3)}$

$=\frac{(x+3)(x^2-x+1)}{(x+3)(x^2-3x+1)}=\frac{x^2-x+1}{x^2-3x+1}$ उत्तर

(ii) $\frac{8(a+b-c)^2}{12(a+b-c)^3}=\frac{2\times2\times2(a+b-c)(a+b-c)}{2\times2\times3(a+b-c)(a+b-c)(a+b-c)}$

$=\frac{2}{3(a+b-c)}$ उत्तर

(iii) $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(b+c)x+bc}=\frac{x^2+ax+bx+ab}{x^2+bx+cx+bc}$

$=\frac{x(x+a)+b(x+a)}{x(x+b)+c(x+b)}=\frac{(x+a)(x+b)}{(x+b)(x+c)}=\frac{x+a}{x+c}$ उत्तर

(iv) $\frac{x^3+x^2}{x^2+5x+4}=\frac{x^2(x+1)}{x^2+4x+x+4}=\frac{x^2(x+1)}{x(x+4)+1(x+4)}$

$=\frac{x^2(x+1)}{(x+4)(x+1)}=\frac{x^2}{x+4}$ उत्तर

(v) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}=\frac{(x^2+xy+y^2)}{(x+y)}$ उत्तर

(vi) $\frac{x^3+4x^2}{x^2+5x+4}=\frac{x^2(x+4)}{x^2+4x+x+4}=\frac{x^2(x+4)}{x(x+4)+1(x+4)}$

$=\frac{x^2(x+4)}{(x+4)(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}$ उत्तर

(vii) $\frac{x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}{x^4-b^4}=\frac{x^4-a^2x^2-b^2x^2+a^2b^2}{(x^2+b^2)(x^2-b^2)}$

$=\frac{x^2(x^2-a^2)-b^2(x^2-a^2)}{(x^2+b^2)(x^2-b^2)}$

$=\frac{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}{(x^2+b^2)(x^2-b^2)}=\frac{(x^2-a^2)}{(x^2+b^2)}$ उत्तर

(viii) $\frac{(x^2-1)(x+2)(x^2-x-72)}{(x-9)(x+1)}=\frac{(x+1)(x-1)(x+2)(x^2-9x+8x-72)}{(x-9)(x+1)}$

$=\frac{(x-1)(x+2)\{x(x-9)+8(x-9)\}}{(x-9)}$

$=\frac{(x-1)(x+2)\{(x-9)(x+8)\}}{(x-9)}$

$=\frac{(x-1)(x+2)(x-9)(x+8)}{(x-9)}$

$=(x-1)(x+2)(x+8)$ उत्तर

3. क्या $\frac{3(4-x^2)}{(x+2)^2}$ अपने निम्नतम पदों में है? यदि नहीं तो इसे निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए।

हल– व्यंजक $\frac{3(4-x^2)}{(x+2)^2}$ अपने निम्नतम पदों में नहीं है।

$\frac{3(4-x^2)}{(x+2)^2}=\frac{3(2^2-x^2)}{(x+2)(x+2)}$

$=\frac{3(2+x)(2-x)}{(x+2)(x+2)}=\frac{3(2-x)}{(x+2)}$ उत्तर

4. व्यंजक $\frac{5x-10}{x^2+x-6}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{5x-10}{x^2+x-6}=\frac{5(x-2)}{x^2+3x-2x-6}$

$=\frac{5(x-2)}{x(x+3)-2(x+3)}$

$=\frac{5(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\frac{5}{(x+3)}$ उत्तर

5. $\frac{27-x^3}{x^2-9}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{27-x^3}{x^2-9}=\frac{x^3-3^3}{x^2-3^2}=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{x^2+3x+9}{x+3}$ उत्तर

6. $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}=\frac{(x-4)^2}{x^2-4^2}=\frac{(x-4)(x-4)}{(x+4)(x-4)}=\frac{x-4}{x+4}$ उत्तर

7. निम्नलिखित परिमेय व्यंजकों को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए–

(i) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$ (ii) $\frac{x+1}{2x^2+x-1}$

(iii) $\frac{x^2-6x-27}{x^2-9}$ (iv) $\frac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

(v) $\frac{9x^2-(x^2-4)^2}{3x+4-x^2}$ (vi) $\frac{4(2x^2+x-1)}{4x^2-4}$

हल– (i) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}=\frac{x^2-4x-2x+8}{x^2-3x-2x+6}=\frac{x(x-4)-2(x-4)}{x(x-3)-2(x-3)}$

$=\frac{(x-4)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x-4}{x-3}$ उत्तर

(ii) $\frac{x+1}{2x^2+x-1}=\frac{x+1}{2x^2+2x-x-1}=\frac{(x+1)}{2x(x+1)-1(x+1)}$

$=\frac{(x+1)}{(x+1)(2x-1)}=\frac{1}{2x-1}$ उत्तर

(iii) $\frac{x^2-6x-27}{x^2-9}=\frac{x^2-9x+3x-27}{x^2-3^2}=\frac{x(x-9)+3(x-9)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{(x-9)(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x-9}{x-3}$ उत्तर

(iv) $\frac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}=\frac{(x-1)(x-2)(x^2-7x-2x+14)}{(x-7)(x^2-2x-x+2)}$

$=\frac{(x-1)(x-2)\{x(x-7)-2(x-7)\}}{(x-7)\{x(x-2)-1(x-2)\}}$

$=\frac{(x-1)(x-2)\{(x-7)(x-2)\}}{(x-7)\{(x-2)(x-1)\}}$

$=\frac{(x-1)(x-2)(x-7)(x-2)}{(x-7)(x-2)(x-1)}=(x-2)$ उत्तर

(v) $\frac{9x^2-(x^2-4)^2}{3x+4-x^2}=\frac{(3x)^2-(x^2-4)^2}{3x+4-x^2}$

$=\frac{(3x+x^2-4)(3x-x^2+4)}{(3x+4-x^2)}=3x+x^2-4$

$=x^2+3x-4=x^2+4x-x-4$

$=x(x+4)-1(x+4)=(x+4)(x-1)$ उत्तर

(vi) $\frac{4(2x^2+x-1)}{4x^2-4}=\frac{4(2x^2+x-1)}{4(x^2-1)}=\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

$=\frac{2x^2+2x-x-1}{x^2-1^2}=\frac{2x(x+1)-1(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x-1}{x-1}$ उत्तर

8. $\frac{x^2-5x-6}{x^2+3x+2}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{x^2-5x-6}{x^2+3x+2}=\frac{x^2-6x+x-6}{x^2+2x+x+2}=\frac{x(x-6)+1(x-6)}{x(x+2)+1(x+2)}$

$=\frac{(x-6)(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\frac{x-6}{x+2}$ उत्तर

9. $\frac{3x^2-x-4}{9x^2-16}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{3x^2-x-4}{9x^2-16}=\frac{3x^2-4x+3x-4}{(3x)^2-(4)^2}=\frac{x(3x-4)+1(3x-4)}{(3x+4)(3x-4)}$

$=\frac{(3x-4)(x+1)}{(3x+4)(3x-4)}=\frac{x+1}{3x+4}$ उत्तर

10. $\frac{x^8-a^8}{x^6-a^6}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{x^8-a^8}{x^6-a^6}=\frac{(x^4)^2-(a^4)^2}{(x^3)^2-(a^3)^2}=\frac{(x^4+a^4)(x^4-a^4)}{(x^3+a^3)(x^3-a^3)}$

$$=\frac{(x^4+a^4)\{(x^2)^2-(a^2)^2\}}{(x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)(x^2+ax+a^2)}$$

$$=\frac{(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x^2-a^2)}{(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)}$$

$$=\frac{(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}{(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)}$$

$$=\frac{(x^4+a^4)(x^2+a^2)}{(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)}$$ उत्तर

11. $\frac{3x^4+3x}{x^3-x^2+x}$ को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए।

हल– $\frac{3x^4+3x}{x^3-x^2+x}=\frac{3x(x^3+1)}{x(x^2-x+1)}=\frac{3x(x^3+1^3)}{x(x^2-x+1)}$

$$=\frac{3(x+1)(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)}=3(x+1)$$ उत्तर

अभ्यास 2.3

1. निम्नलिखित व्यंजकों को परिमेय व्यंजकों के रूप में व्यक्त कीजिए—

(i) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x-2}$ (ii) $\frac{x^2+x-1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^3+2}$

(iii) $\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x+2}$

(iv) $\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)}+\frac{(x^2-4)(4x^2-1)}{(x+3)}$

(v) $\frac{x}{(x-y)}+\frac{y}{(x+y)}-\frac{2xy}{y^2-x^2}$ (vi) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

(vii) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}$ (viii) $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{2xy}{x^2-y^2}$

हल– (i) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{x+1+x-1}{(x-2)}=\frac{2x}{(x-2)}$ उत्तर

(ii) $\frac{x^2+x-1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^3+2}=\frac{(x^3+2)(x^2+x-1)+(x^2-1)(x+1)}{(x^2-1)(x^3+2)}$

$$=\frac{(x^5+x^4-x^3+2x^2+2x-2+x^3+x^2-x-1)}{(x^2-1)(x^3+2)}$$

$$=\frac{(x^5+x^4+3x^2+x-3)}{(x^2-1)(x^3+2)}$$ उत्तर

(iii) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{(x+2)(x^2+1)+(x^2-1)(x+1)}{(x^2-1)(x+2)}$

$=\dfrac{x^3+x+2x^2+2+x^3+x^2-x-1}{(x^2-1)(x+2)}$

$=\dfrac{\mathbf{2x^3+3x^2+1}}{\mathbf{(x^2-1)(x+2)}}$ **उत्तर**

(iv) $\dfrac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)}+\dfrac{(x^2-4)(4x^2-1)}{(x+3)}$

$=\dfrac{(2x-1)(x+2)+(x^2-4)(4x^2-1)}{(x+3)}$

$=\dfrac{2x^2+4x-x-2+4x^4-x^2-16x^2+4}{(x+3)}$

$=\dfrac{\mathbf{4x^4-15x^2+3x+2}}{\mathbf{x+3}}$ **उत्तर**

(v) $\dfrac{x}{(x-y)}+\dfrac{y}{(x+y)}-\dfrac{2xy}{y^2-x^2}=\dfrac{x(x+y)+y(x-y)}{(x-y)(x+y)}-\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)}$

$=\dfrac{x(x+y)+y(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\dfrac{2xy}{(x+y)(x-y)}$

$=\dfrac{x^2+xy+xy-y^2-2xy}{(x+y)(x-y)}$

$=\dfrac{x^2-y^2}{x^2-y^2}=\mathbf{1}$ **उत्तर**

(vi) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}+\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}=\dfrac{x^2-3x+2x-6}{x^2-3^2}+\dfrac{x^2+6x-4x-24}{x^2-4x+3x-12}$

$=\dfrac{x(x-3)+2(x-3)}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{x(x+6)-4(x+6)}{x(x-4)+3(x-4)}$

$=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{(x+6)(x-4)}{(x-4)(x+3)}$

$=\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+6}{x+3}=\dfrac{x+2+x+6}{x+3}$

$=\dfrac{2x+8}{x+3}=\dfrac{\mathbf{2(x+4)}}{\mathbf{(x+3)}}$ **उत्तर**

(vii) $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{(x+2)^2+(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{x^2+4+4x+x^2+4-4x}{(x^2-4)}$

$$=\frac{2x^2+8}{(x^2-4)}=\frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)}$$ उत्तर

(viii) $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{x(x-y)+y(x+y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$

$$=\frac{x^2-xy+xy+y^2}{(x+y)(x-y)}+\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{(x+y)(x-y)}+\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x^2+y^2+2xy}{(x+y)(x-y)}=\frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x+y}{x-y}$$ उत्तर

2. निम्नलिखित व्यंजकों को परिमेय व्यंजकों के रूप में व्यक्त कीजिए—

(i) $\frac{x^2+1}{x-3}-\frac{2x^2+3}{x-3}$ (ii) $\frac{x^2+2}{x-1}-\frac{x-3}{x+1}$

(iii) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}$ (iv) $\frac{4x-x^2+1}{1-x}-\frac{2x+x^2-1}{2+x}$

(v) $\left[\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}\right]-\frac{3x^2}{x-1}$ (vi) $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1-x^4}$

(vii) $\frac{x^3}{x^2-1}-\frac{x^2}{x+1}$ (viii) $\frac{x^2-1}{x+1}-\frac{1-x^3}{1+x+x^2}$

हल– (i) $\frac{x^2+1}{x-3}-\frac{2x^2+3}{x-3}=\frac{(x^2+1)-(2x^2+3)}{(x-3)}$

$$=\frac{x^2+1-2x^2-3}{x-3}=\frac{-x^2-2}{x-3}$$

$$=\frac{-(x^2+2)}{x-3}=\frac{x^2+2}{3-x}$$ उत्तर

(ii) $\frac{x^2+2}{x-1}-\frac{x-3}{x+1}=\frac{(x+1)(x^2+2)-(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)}$

$$=\frac{x^3+2x+x^2+2-(x^2-3x-x+3)}{(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^3+2x+x^2+2-x^2+3x+x-3}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^3+6x-1}{x^2-1}$$ उत्तर

(iii) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$

$$=\frac{x^2+1+2x-(x^2+1-2x)}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^2+1+2x-x^2-1+2x}{x^2-1}=\frac{\mathbf{4x}}{\mathbf{x^2-1}}$$ उत्तर

(iv) $\dfrac{4x-x^2+1}{1-x}-\dfrac{2x+x^2-1}{2+x}=\dfrac{(2+x)(4x-x^2+1)-(1-x)(2x+x^2-1)}{(1-x)(2+x)}$

$$=\frac{8x-2x^2+2+4x^2-x^3+x-(2x+x^2-1-2x^2-x^3+x)}{2+x-2x-x^2}$$

$$=\frac{8x-2x^2+2+4x^2-x^3+x-2x-x^2+1+2x^2+x^3-x}{2+x-2x-x^2}$$

$$=\frac{6x^2-3x^2+9x-3x+x^3-x^3+3}{2-x-x^2}$$

$$=\frac{3x^2+6x+3}{2-x-x^2}=\frac{\mathbf{3(x^2+2x+1)}}{\mathbf{2-x-x^2}}$$ उत्तर

(v) $\left[\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}\right]-\dfrac{3x^2}{x-1}=\left[\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\right]-\dfrac{3x^2}{x-1}$

$$=\frac{x^2+1+2x+x^2+1-2x}{(x-1)(x+1)}-\frac{3x^2}{(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)}-\frac{3x^2}{(x-1)}=\frac{(2x^2+2)-3x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2+2-3x^3-3x^2}{x^2-1^2}=\frac{\mathbf{-3x^3-x^2+2}}{\mathbf{x^2-1}}$$ उत्तर

(vi) $\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{4x}{1+x^2}-\dfrac{8x}{1-x^4}$

$$=\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1-x^4}$$

$$=\frac{1+x^2+2x-(1+x^2-2x)}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1-x^4}$$

$$=\frac{1+x^2+2x-1-x^2+2x}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1-x^4}$$

$$=\frac{4x}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x^2}{1-x^4}$$

$$=\frac{4x(1+x^2)+4x(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}-\frac{8x}{1-x^4}$$

$$=\frac{4x+4x^3+4x-4x^3}{1-x^4}-\frac{8x}{1-x^4}$$

$$=\frac{8x}{1-x^4}-\frac{8x}{1-x^4}=\mathbf{0}$$ उत्तर

(vii) $\dfrac{x^3}{x^2-1}-\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^3}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{x^2}{(x+1)}$

$$=\frac{x^3-(x-1)x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^3-x^3+x^2}{x^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$$ उत्तर

(viii) $\dfrac{x^2-1}{x+1}-\dfrac{1-x^3}{1+x+x^2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}-\dfrac{(1-x)(x^2+x+1)}{(1+x+x^2)}$

$$=x-1-(1-x)=x-1-1+x=\mathbf{2x-2}$$ उत्तर

3. परिमेय व्यंजक $\dfrac{x-1}{x+2}$ का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल– व्यंजक $\dfrac{x-1}{x+2}$ का योज्य प्रतिलोम $=-\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{\mathbf{1-x}}{\mathbf{x+2}}$ उत्तर

4. यदि $A=\dfrac{x-2}{x+2}$ तो $A-\dfrac{1}{A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $A=\dfrac{x-2}{x+2}$

अतः $A-\dfrac{1}{A}=\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{1}{\frac{x-2}{x+2}}=\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}$

$$=\frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2+4-4x-(x^2+4+4x)}{x^2-4}$$

$$=\frac{x^2+4-4x-x^2-4-4x}{x^2-4}=\frac{\mathbf{-8x}}{\mathbf{x^2-4}}$$ उत्तर

5. $\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{4x}{1+x^2}-\dfrac{8x}{1+x^4}$ को सरल कीजिए।

हल– $\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{4x}{1+x^2}-\dfrac{8x}{1+x^4}=\dfrac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}+\dfrac{4x}{1+x^2}-\dfrac{8x}{1+x^4}$

$$=\frac{1+x^2+2x-(1+x^2-2x)}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1+x^4}$$

$$=\frac{1+x^2+2x-1-x^2+2x}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1+x^4}$$

$$=\frac{4x}{1-x^2}+\frac{4x}{1+x^2}-\frac{8x}{1+x^4}$$

$$=\frac{4x(1+x^2)+4x(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}-\frac{8x}{1+x^4}$$

$$= \frac{8x}{1-x^4} - \frac{8x}{1+x^4} = \frac{8x(1+x^4) - 8x(1-x^4)}{(1-x^4)(1+x^4)}$$

$$= \frac{8x + 8x^5 - 8x + 8x^5}{1-x^8} = \frac{\mathbf{16x^5}}{\mathbf{1-x^8}}$$ उत्तर

6. व्यंजक $\frac{x^2-3x}{x-2}$ में क्या जोड़ा जाए कि योगफल $\frac{x^2}{x-2}$ हो जाए?

हल– माना व्यंजक $\frac{x^2-3x}{x-2}$ में A जोड़ने पर योगफल $\frac{x^2}{x-2}$ हो जाता है।

अतः $$\frac{x^2-3x}{x-2} + A = \frac{x^2}{x-2}$$

$$A = \frac{x^2}{x-2} - \frac{x^2-3x}{x-2}$$

या $$A = \frac{x^2 - (x^2-3x)}{x-2}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 + 3x}{x-2} = \frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{x-2}}$$ उत्तर

7. $A = \frac{x^2+2}{x-3}$, $B = \frac{x^2-1}{x}$ तो $A - B$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $A = \frac{x^2+2}{x-3}$ तथा $B = \frac{x^2-1}{x}$

अतः $$A - B = \frac{x^2+2}{x-3} - \frac{x^2-1}{x}$$

$$= \frac{x(x^2+2) - (x-3)(x^2-1)}{x(x-3)}$$

$$= \frac{x^3 + 2x - (x^3 - x - 3x^2 + 3)}{x(x-3)}$$

$$= \frac{x^3 + 2x - x^3 + x + 3x^2 - 3}{x(x-3)} = \frac{\mathbf{3x^2 + 3x - 3}}{\mathbf{x(x-3)}}$$ उत्तर

8. परिमेय व्यंजक $\frac{x^3+6x-1}{(x-1)(x+1)}$ में क्या जोड़ा जाए कि योगफल $\frac{x^2+1}{x-1}$ हो जाए?

हल– माना व्यंजक $\frac{x^3+6x-1}{(x-1)(x+1)}$ में A जोड़ने पर योगफल $\frac{x^2+1}{x-1}$ हो जाता है।

अतः $$\frac{x^3+6x-1}{(x-1)(x+1)} + A = \frac{x^2+1}{x-1}$$

या $$A = \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^3+6x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{(x+1)(x^2+1)-(x^3+6x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x^3+x+x^2+1-x^3-6x+1}{(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^2-5x+2}{x^2-1}$$ उत्तर

9. $\frac{3x-x^2}{2-x}$ का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल– $\frac{3x-x^2}{2-x}$ का योज्य प्रतिलोम $=\frac{3x-x^2}{2-x}=\frac{-3x+x^2}{2-x}=\frac{x^2-3x}{2-x}$ उत्तर

10. $P=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$ तो P^{-1} का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $P=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$

या $P=\frac{x^2+16}{4x}$ या $\frac{1}{P}=\frac{4x}{x^2+16}$

या $P^{-1}=\frac{4x}{x^2+16}$ उत्तर

11. $\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}-\frac{c-b}{(b-a)(x-b)}$ को हल कीजिए।

हल– $\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}-\frac{c-b}{(b-a)(x-b)}=\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}+\frac{c-b}{(a-b)(x-b)}$

$$=\frac{(a-c)(x-b)+(c-b)(x-a)}{(a-b)(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{ax-ab-cx+bc+cx-ac-bx+ab}{(a-b)(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{ax+bc-bx-ac}{(a-b)(x-a)(x-b)}=\frac{ax-bx-ac+bc}{(a-b)(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{x(a-b)-c(a-b)}{(a-b)(x-a)(x-b)}=\frac{(a-b)(x-c)}{(a-b)(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{(x-c)}{(x-a)(x-b)}$$ उत्तर

अभ्यास 2.4

1. निम्नलिखित परिमेय व्यंजक युग्मों के गुणनफल ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{x^2}{yz},\frac{y^2}{zx},\frac{z^2}{xy}$

(ii) $\frac{x+2}{x-2},\frac{x+1}{x-1}$

(iii) $\frac{x^2-9}{x+2},\frac{x^2-4}{x+3}$

(iv) $\frac{5x+2}{5x-3},\frac{x+6}{x+2}$

हल– (i) दिए हुए परिमेय व्यंजक $=\frac{x^2}{yz}, \frac{y^2}{zx}, \frac{z^2}{xy}$

अतः गुणनफल $=\frac{x^2}{yz}\times\frac{y^2}{zx}\times\frac{z^2}{xy}=\frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}=1$ उत्तर

(ii) दिए हुए परिमेय व्यंजक $\frac{x+2}{x-2}$ तथा $\frac{x+1}{x-1}$

अतः गुणनफल $=\frac{(x+2)}{(x-2)}\times\frac{(x+1)}{(x-1)}=\frac{x^2+x+2x+2}{x^2-x-2x+2}$

$=\frac{\mathbf{x^2+3x+2}}{\mathbf{x^2-3x+2}}$ उत्तर

(iii) दिए हुए परिमेय व्यंजक $\frac{x^2-9}{x+2}, \frac{x^2-4}{x+3}$

अतः गुणनफल $=\frac{(x^2-9)}{(x+2)}\times\frac{(x^2-4)}{(x+3)}=\frac{x^2-3^2}{(x+2)}\times\frac{x^2-2^2}{(x+3)}$

$=\frac{(x+3)(x-3)\times(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+3)}=(x-3)(x-2)$

$=x^2-2x-3x+6=\mathbf{x^2-5x+6}$ उत्तर

(iv) दिए हुए परिमेय व्यंजक $\frac{5x+2}{5x-3}$ तथा $\frac{x+6}{x+2}$

अतः गुणनफल $=\frac{(5x+2)}{(5x-3)}\times\frac{(x+6)}{(x+2)}=\frac{5x^2+30x+2x+12}{5x^2-3x+10x-6}$

$=\frac{\mathbf{5x^2+32x+12}}{\mathbf{5x^2+7x-6}}$ उत्तर

2. $\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{8}}{x^2+3}\times\frac{x\sqrt{8}-\sqrt{32}}{x+4}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए परिमेय व्यंजक $=\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{8}}{x^2+3}$ तथा $\frac{x\sqrt{8}-\sqrt{32}}{x+4}$

अतः गुणनफल $=\frac{(x\sqrt{2}-\sqrt{8})}{(x^2+3)}\times\frac{(x\sqrt{8}-\sqrt{32})}{(x+4)}$

$=\frac{\sqrt{16}x^2-\sqrt{64}x-\sqrt{64}x+\sqrt{256}}{(x^3+4x^2+3x+12)}$

$=\frac{4x^2-8x-8x+16}{x^3+4x^2+3x+12}=\frac{\mathbf{4x^2-16x+16}}{\mathbf{x^3+4x^2+3x+12}}$ उत्तर

3. निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{x^2-7x+10}{(x-4)^2}\times\frac{x^2-7x+12}{(x-5)}$ **(ii)** $(x^2+3x+2)\frac{x+4}{x+2}$

(iii) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1}$

(iv) $\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2+4x+1}\times\dfrac{4x^2+5x+1}{5x^2+6x+1}\times\dfrac{15x^2+8x+1}{8x^2+6x+1}$

हल– **(i)** $\dfrac{x^2-7x+10}{(x-4)^2}\times\dfrac{x^2-7x+12}{(x-5)}=\dfrac{x^2-5x-2x+10}{(x-4)^2}\times\dfrac{x^2-4x-3x+12}{(x-5)}$

$=\dfrac{x(x-5)-2(x-5)}{(x-4)^2}\times\dfrac{x(x-4)-3(x-4)}{(x-5)}$

$=\dfrac{(x-5)(x-2)(x-4)(x-3)}{(x-4)^2(x-5)}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-4)}$

$=\dfrac{x^2-3x-2x+6}{x-4}=\dfrac{\mathbf{x^2-5x+6}}{\mathbf{x-4}}$ **उत्तर**

(ii) $(x^2+3x+2)\times\dfrac{x+4}{x+2}=(x^2+2x+x+2)\times\dfrac{(x+4)}{(x+2)}$

$=\{x(x+2)+1(x+2)\}\dfrac{(x+4)}{(x+2)}$

$=(x+2)(x+1)\times\dfrac{(x+4)}{(x+2)}=(x+1)(x+4)$

$=x^2+x+4x+4=\mathbf{x^2+5x+4}$ **उत्तर**

(iii) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1}=\dfrac{(x^3-2^3)}{(x)^2-(2)^2}\times\dfrac{x^2+4x+2x+8}{x^2-2x+1}$

$=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{x(x+4)+2(x+4)}{(x^2-2x+1)}$

$=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)(x+4)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x^2-2x+1)}$

$=\dfrac{(x^2+2x+4)(x+4)}{(x^2-2x+1)}$

$=\dfrac{x^3+4x^2+2x^2+8x+4x+16}{x^2-2x+1}$

$=\dfrac{\mathbf{x^3+6x^2+12x+16}}{\mathbf{x^2-2x+1}}$ **उत्तर**

(iv) $\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2+4x+1}\times\dfrac{4x^2+5x+1}{5x^2+6x+1}\times\dfrac{15x^2+8x+1}{8x^2+6x+1}$

$=\dfrac{2x^2+2x+x+1}{3x^2+3x+x+1}\times\dfrac{4x^2+4x+x+1}{5x^2+5x+x+1}\times\dfrac{15x^2+5x+3x+1}{8x^2+4x+2x+1}$

$$=\frac{2x(x+1)+1(x+1)}{3x(x+1)+1(x+1)}\times\frac{4x(x+1)+1(x+1)}{5x(x+1)+1(x+1)}\times\frac{5x(3x+1)+1(3x+1)}{4x(2x+1)+1(2x+1)}$$

$$=\frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(3x+1)}\times\frac{(x+1)(4x+1)}{(x+1)(5x+1)}\times\frac{(3x+1)(5x+1)}{(2x+1)(4x+1)}$$

$=1$ उत्तर

4. $\frac{x^2-2}{3x^2+4}$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल– $\frac{x^2-2}{3x^2+4}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $=\frac{1}{\frac{x^2-2}{3x^2+4}}=\frac{3x^2+4}{x^2-2}$ उत्तर

5. $\frac{x^7-x\sqrt{2}}{8x^7-x\sqrt{3}}$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल– $\frac{x^7-x\sqrt{2}}{8x^7-x\sqrt{3}}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $=\frac{1}{\frac{x^7-x\sqrt{2}}{8x^7-x\sqrt{3}}}=\frac{8x^7-x\sqrt{3}}{x^7-x\sqrt{2}}$ उत्तर

6. $\frac{2y+1}{y^2+2y+4}\times\frac{y^4-8y}{2y^2-5y-3}\times\frac{y+3}{y^2-2y}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{2y+1}{y^2+2y+4}\times\frac{y^4-8y}{2y^2-5y-3}\times\frac{y+3}{y^2-2y}$

$$=\frac{(2y+1)}{(y^2+2y+4)}\times\frac{y(y^3-8)}{(2y^2-6y+y-3)}\times\frac{(y+3)}{y(y-2)}$$

$$=\frac{(2y+1)}{(y^2+2y+4)}\times\frac{y(y^3-2^3)}{\{2y(y-3)+1(y-3)\}}\times\frac{(y+3)}{y(y-2)}$$

$$=\frac{(2y+1)}{(y^2+2y+4)}\times\frac{y(y-2)(y^2+2y+4)}{\{(y-3)(2y+1)\}}\times\frac{(y+3)}{y(y-2)}$$

$$=\frac{(2y+1)}{(y^2+2y+4)}\times\frac{y(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-3)(2y+1)}\times\frac{(y+3)}{y(y-2)}$$

$=\frac{y+3}{y-3}$ उत्तर

7. $\frac{x}{(x+y)^2-2xy}\times\frac{x^4-y^4}{(x+y)^3-3xy(x+y)}\times\frac{(x+y)^2-3xy}{(x+y)^2-4xy}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{x}{(x+y)^2-2xy}\times\frac{x^4-y^4}{(x+y)^3-3xy(x+y)}\times\frac{(x+y)^2-3xy}{(x+y)^2-4xy}$

$$= \frac{x}{x^2+y^2+2xy-2xy} \times \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^3+y^3+3xy(x+y)-3xy(x+y)} \times \frac{x^2+y^2+2xy-3xy}{x^2+y^2+2xy-4xy}$$

$$= \frac{x}{(x^2+y^2)} \times \frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(x^3+y^3)} \times \frac{(x^2+y^2-xy)}{x^2+y^2-2xy}$$

$$= \frac{x}{(x^2+y^2)} \times \frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2-xy)} \times \frac{(x^2+y^2-xy)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{x}{x-y}$$ उत्तर

8. $\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a^3+b^3+c^3-3abc} \times \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$ **को सरल कीजिए।**

हल– $\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a^3+b^3+c^3-3abc} \times \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$

$$= \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}$$

$[\because x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)]$

$$= \frac{x+y+z}{a+b+c}$$ उत्तर

9. $\frac{x^4-7x^2+3}{x+5}$ **का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।**

हल– $\frac{x^4-7x^2+3}{x+5}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $= \frac{1}{\frac{x^4-7x^2+3}{x+5}} = \frac{x+5}{x^4-7x^2+3}$ उत्तर

10. $\frac{a^2-25}{a+2} \times \frac{a^2-4}{a+5}$ **का गुणनफल ज्ञात कीजिए।**

हल– $\frac{a^2-25}{a+2} \times \frac{a^2-4}{a+5} = \frac{(a^2-5^2)}{(a+2)} \times \frac{(a^2-2^2)}{(a+5)}$

$$= \frac{(a+5)(a-5)}{(a+2)} \times \frac{(a+2)(a-2)}{(a+5)} = (a-5)(a-2)$$

$$= a^2-5a-2a+10$$

$$= a^2-7a+10$$ उत्तर

अभ्यास 2.5

1. $\frac{x^2-1}{x+4} \div \frac{x^2+3x+1}{2x-7}$ को परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– दिया हुआ व्यंजक $\frac{x^2-1}{x+4} \div \frac{x^2+3x+1}{2x-7} = \frac{(x^2-1)}{(x+4)} \times \frac{(2x-7)}{(x^2+3x+1)}$

$$= \frac{2x^3-7x^2-2x+7}{x^3+3x^2+x+4x^2+12x+4}$$

$$= \frac{2x^3-7x^2-2x+7}{x^3+7x^2+13x+4}$$ उत्तर

2. निम्नलिखित को सरल कीजिए—

(i) $\frac{x^2+8x+12}{x^2-7x+12} \div \frac{x^2+4x-12}{x-4}$

(ii) $\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \div \frac{(x+2)(3x+1)}{(x+3)(4x+3)}$

हल– (i) $\frac{x^2+8x+12}{x^2-7x+12} \div \frac{x^2+4x-12}{x-4} = \frac{x^2+8x+12}{x^2-7x+12} \times \frac{(x-4)}{x^2+4x-12}$

$$= \frac{x^2+6x+2x+12}{x^2-4x-3x+12} \times \frac{(x-4)}{x^2+6x-2x-12}$$

$$= \frac{x(x+6)+2(x+6)}{x(x-4)-3(x-4)} \times \frac{(x-4)}{x(x+6)-2(x+6)}$$

$$= \frac{(x+6)(x+2)}{(x-4)(x-3)} \times \frac{(x-4)}{(x+6)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+2)}{(x-2)(x-3)}$$ उत्तर

(ii) $\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \div \frac{(x+2)(3x+1)}{(x+3)(4x+3)} = \frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \times \frac{(x+3)(4x+3)}{(x+2)(3x+1)}$

$$= \frac{(2x-1)(4x+3)}{(3x+1)} = \frac{8x^2+6x-4x-3}{3x+1}$$

$$= \frac{8x^2+2x-3}{3x+1}$$ उत्तर

3. $\frac{x^2-1}{x+1} \div \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{x^2-1}{x+1} \div \frac{x^3-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} \times \frac{x^2+x+1}{x^3-1} = \frac{(x^2-1^2)}{(x+1)} \times \frac{(x^2+x+1)}{(x^3-1^3)}$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} \times \frac{(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = 1$$ उत्तर

4. $\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \div \frac{(x^2-4)(4x^2-1)}{(x+3)}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \div \frac{(x^2-4)(4x^2-1)}{(x+3)}$

$$= \frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)} \times \frac{(x+3)}{(x^2-4)(4x^2-1)}$$

$$= \frac{(2x-1)(x+2)}{(x^2-2^2)\{(2x)^2-1^2\}}$$

$$= \frac{(2x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)(2x+1)(2x-1)}$$

$$= \frac{1}{(x-2)(2x+1)} = \frac{1}{2x^2+x-4x-2}$$

$$= \frac{1}{2x^2-3x-2}$$ उत्तर

5. $\left[\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{x}{1+x}-1\right)\right] \div \frac{1+x^2}{1-x^2}$ को परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– $\left[\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{x}{1+x}-1\right)\right] \div \frac{1+x^2}{1-x^2} = \left[\left(\frac{1-x+x}{1-x}\right)\left(\frac{x-1-x}{1+x}\right)\right] \times \frac{(1-x^2)}{(1+x^2)}$

$$= \left[\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{-1}{1+x}\right)\right] \times \frac{(1+x)(1-x)}{(1-x^2)}$$

$$= \frac{-1}{(1-x)(1+x)} \times \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)}$$

$$= -\frac{1}{1+x^2}$$ उत्तर

6. $\left[\frac{2x^2+3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1}\right] \div \frac{x^2-1}{3x}$ को परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– $\left[\frac{2x^2+3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1}\right] \div \frac{x^2-1}{3x} = \left[\frac{(x+1)(2x^2+3)+(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}\right] \times \frac{3x}{x^2-1}$

$$= \frac{(2x^3+3x+2x^2+3+x^2+3x-x-3)}{(x^2-1)} \times \frac{3x}{(x^2-1)}$$

$$= \frac{(2x^3+3x^2+5x)}{(x^2-1)^2} \times 3x$$

$$= \frac{6x^4+9x^3+15x^2}{x^4-2x^2+1}$$ उत्तर

7. यदि $P=\frac{x^2+2}{x-3}$ व $Q=\frac{x-1}{x}$ तब $P\div Q$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $P=\frac{x^2+2}{x-3}$ तथा $Q=\frac{x-1}{x}$

अत: $P\div Q=\frac{x^2+2}{x-3}\div\frac{x-1}{x}=\frac{x^2+2}{x-3}\times\frac{x}{x-1}$

$=\frac{x^3+2x}{x^2-x-3x+3}=\frac{x^3+2x}{x^2-4x+3}$ उत्तर

8. $\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+y+z)^2}\div\left[\frac{(x-z)^2-y^2}{x^2+xy+zx}\div\frac{(x-y)^2-z^2}{x^2+xy+zx}\right]$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+y+z)^2}\div\left[\frac{(x-z)^2-y^2}{x^2+xy+zx}\div\frac{(x-y)^2-z^2}{x^2+xy+zx}\right]$

$=\frac{(x+y+z)(x+y-z)}{(x+y+z)^2}\div\left[\frac{(x-z)^2-y^2}{(x^2+xy+zx)}\times\frac{(x^2+xy+zx)}{(x-y)^2-z^2}\right]$

$=\frac{(x+y-z)}{(x+y+z)}\div\left[\frac{(x-z)^2-y^2}{(x-y)^2-z^2}\right]=\frac{(x+y-z)}{(x+y+z)}\times\frac{(x-y)^2-z^2}{(x-z)^2-y^2}$

$=\frac{(x+y-z)}{x+y+z}\times\frac{(x-y+z)(x-y-z)}{(x-z+y)(x-z-y)}$

$=\frac{(x+y-z)}{(x+y+z)}\times\frac{(x-y+z)(x-y-z)}{(x+y-z)(x-y-z)}=\frac{(x-y+z)}{(x+y+z)}$ उत्तर

9. यदि $P=\left[\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right]\left[\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right]\left[\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right]$

तथा $Q=\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right]\left[\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right]\left[\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right]$ तो $P\div Q$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $P=\left[\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right]\left[\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right]\left[\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right]$

$=\left[\frac{x^2-y^2}{xy}\right]\left[\frac{y^2-z^2}{zy}\right]\left[\frac{z^2-x^2}{xz}\right]$

$=\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{x^2y^2z^2}$

$Q=\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right]\left[\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right]\left[\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right]$

$=\left[\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}\right]\left[\frac{z^2-y^2}{y^2z^2}\right]\left[\frac{x^2-z^2}{z^2x^2}\right]$

$$=\frac{(y^2-x^2)(z^2-y^2)(x^2-z^2)}{x^4y^4z^4}$$

$$P\div Q=\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{x^2y^2z^2}\div\frac{(y^2-x^2)(z^2-y^2)(x^2-z^2)}{x^4y^4z^4}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{x^2y^2z^2}\times\frac{x^4y^4z^4}{(y^2-x^2)(z^2-y^2)(x^2-z^2)}$$

$$=\frac{(x^2-x^2)(z^2-y^2)(x^2-z^2)}{(y^2-x^2)(z^2-y^2)(x^2-z^2)}\times\frac{x^4y^4z^4}{x^2y^2z^2}$$

$$=-x^2y^2z^2$$ उत्तर

10. $\frac{1}{x^2-7x+12}\div\frac{1}{x^2+x-20}$ को सरल कीजिए।

हल– $\frac{1}{x^2-7x+12}\div\frac{1}{x^2+x-20}=\frac{1}{x^2-7x+12}\times\frac{x^2+x-20}{1}$

$$=\frac{x^2+5x-4x-20}{x^2-4x-3x+12}=\frac{x(x+5)-4(x+5)}{x(x-4)-3(x-4)}$$

$$=\frac{(x+5)(x-4)}{(x-4)(x-3)}=\frac{x+5}{x-3}$$ उत्तर

11. $\left[x-y+\frac{y^2}{x+y}\right]\div\left[x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2-y^2}\right]$ को परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– $\left[x-y+\frac{y^2}{x+y}\right]\div\left[x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2-y^2}\right]$

$$=\left[\frac{(x-y)(x+y)+y^2}{(x+y)}\right]\div\left[\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)+y^4}{x^2-y^2}\right]$$

$$=\left[\frac{x^2-y^2+y^2}{x+y}\right]\div\left[\frac{x^4-y^4+y^4}{x^2-y^2}\right]=\frac{x^2}{x+y}\div\frac{x^4}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^2}{x+y}\times\frac{x^2-y^2}{x^4}=\frac{x^2}{(x+y)}\times\frac{(x+y)(x-y)}{x^4}=\frac{x-y}{x^2}$$ उत्तर

12. $\frac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2}\div\frac{3x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}$ को परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल– $\frac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2}\div\frac{3x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}=\frac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2}\times\frac{2x^2-3x-2}{3x^2+2x-1}$

$$=\frac{3x^2+15x-x-5}{x^2-2x-x+2}\times\frac{2x^2-4x+x-2}{3x^2+3x-x-1}$$

$$=\frac{3x(x+5)-1(x+5)}{x(x-2)-1(x-2)}\times\frac{2x(x-2)+1(x-2)}{3x(x+1)-1(x+1)}$$

$$=\frac{(x+5)(3x-1)}{(x-2)(x-1)}\times\frac{(x-2)(2x+1)}{(x+1)(3x-1)}=\frac{(x+5)(2x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+x+10x+5}{x^2-1}=\frac{2x^2+11x+5}{x^2-1}$$ उत्तर

अभ्यास 2.6

यदि r व s परिमेय व्यंजक हों, तो निम्नलिखित कथनों में से सत्य व असत्य कथन छाँटिए—

1. $(r-s)^2=r^2-2rs+s^2$
2. $(r+s)(r-s)=r^2-s^2$
3. $r^3+s^3=(r+s)(r^2-rs+s^2)$
4. $r^3-s^3=(r-s)(r^2+s^2+rs)$
5. $r^3+s^3=(r+s)(r^2+rs-s^2)$
6. $r^3-s^3=(r-s)(r^2-rs+s^2)$
7. $8r^3+27s^3=(2r+3s)(4r^2+6rs+9s^2)$
8. $8r^3-27s^3=(2r-3s)(4r^2+6rs+9s^2)$

हल– 1. सत्य, 2. सत्य, 3. सत्य, 4. सत्य, 5. असत्य, 6. असत्य, 7. असत्य, 8. सत्य।

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट–बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 38 व 39 का अवलोकन कीजिए।

■□■

3

द्विघात समीकरण
(Quadratic Equation)

अभ्यास 3.1

1. निम्नलिखित समीकरणों में कौन-कौन से द्विघात समीकरण हैं?

(i) $x^2 = 5$ (ii) $x^3 + 7x = -1$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 1$

(iv) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ (v) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$

(vi) $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 5$ (vii) $x^2 + \frac{7}{x^2} = 1$

(viii) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$ (ix) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$

(x) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

हल– (i) $x^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 5 = 0$ एक **द्विघात समीकरण है,** क्योंकि उच्चतम घात वाले पद का घातांक 2 है।

(ii) $x^3 + 7x = -1 \Rightarrow x^3 + 7x + 1 = 0$ यहाँ उच्चतम घात वाले पद का घातांक 3 है। इसलिए यह **द्विघात समीकरण नहीं है।**

(iii) $x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ एक **द्विघात समीकरण है,** क्योंकि उच्चतम घात वाले पद का घातांक 2 है।

(iv) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

या $2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$

या $2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 4x - 5$

या $2x^2 - x^2 - 7x - 4x + 3 + 5 = 0$

या $x^2 - 11x + 8 = 0$ जो कि **द्विघात समीकरण है।**

(v) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$ या $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$

या $x + 1 = x\sqrt{x} \times \sqrt{x}$ या $x + 1 = x^2$

या $x^2 = x + 1$

या $x^2 - x - 1 = 0$ जो कि **द्विघात समीकरण है।**

(vi) $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x\sqrt{x} + 1 = 5x \Rightarrow x\sqrt{x} - 5x + 1 = 0$ जो कि **द्विघात समीकरण नहीं है।**

(vii) $x^2+\frac{7}{x^2}=1 \Rightarrow x^4+7=x^2 \Rightarrow x^4-x^2-7$ जो कि **द्विघात समीकरण नहीं** है। क्योंकि उच्चतम घात वाले पद की घातांक 4 है।

(viii) $x^2+3x+1=(x-2)^2$ या $x^2+3x+1=x^2-4x+4$

या $3x+1=-4x+4$ या $3x+4x+1-4=0$

या $7x-3=0$ जो कि **द्विघात समीकरण नहीं है।**

(ix) $(x+2)^3=2x(x^2-1)$

या $x^3+2^3+3x\times 2(x+2)=2x^3-2x$

या $x^3+8+6x^2+12x=2x^3-2x$

या $-2x^3+x^3+8+6x^2+12+2x=0$

या $-x^3+6x^2+14x+8=0$ जो कि **द्विघात समीकरण नहीं है।**

(x) $(x+1)^2=2(x-3)$ या $x^2+2x+1=2x-6$

या $x^2+2x-2x+1+6=0$

या $x^2+7=0$ जो कि **द्विघात समीकरण है।** क्योंकि यहाँ उच्चतम घात वाले पद का घातांक 2 है।

2. प्रत्येक समीकरण के लिए जाँच कीजिए, कि उनके सामने दिए हुए मान समीकरण के हल हैं अथवा नहीं—

(i) $2x^2-6x+3=0$ $\quad x=\frac{1}{2}$

(ii) $x^2+\sqrt{2}x-4=0$ $\quad x=\sqrt{2},-2\sqrt{2}$

(iii) $x^2+6x+5=0$ $\quad x=-1,-5$

(iv) $a^2x^2-3abx+ab^2=0$ $\quad x=\frac{a}{b},\frac{b}{a}$

(v) $9x^2-3x-2=0$ $\quad x=-\frac{1}{3},\frac{2}{3}$

(vi) $3x^2-2x-1=0$ $\quad x=1$

(vii) $100x^2-20x+1=0$ $\quad x=\frac{1}{10}$

हल– (i) दिए गए समीकरण, $2x^2-6x+3=0$ में $x=\frac{1}{2}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\times\frac{1}{2}+3=2\times\frac{1}{4}-3+3=\frac{1}{2}\neq \text{R.H.S.}$$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ दिए हुए समीकरण का **हल नहीं है।** **उत्तर**

(ii) दिए हुए समीकरण, $x^2+\sqrt{2}x-4=0$ में $x=\sqrt{2}$ रखने पर,

$\text{L.H.S.}=(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\times(\sqrt{2})-4=2+2-4=4-4=0=\text{R.H.S.}$

इसी प्रकार $x=-2\sqrt{2}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=(-2\sqrt{2})^2+\sqrt{2}(-2\sqrt{2})-4$$
$$=8-4-4=8-8=0=\text{R.H.S.}$$

$\therefore \sqrt{2},-2\sqrt{2}$ दिए हुए समीकरण के **हल हैं।** **उत्तर**

(iii) दिए हुए समीकरण, $x^2+6x+5=0$ में $x=-1$ रखने पर,

L.H.S. $=(-1)^2+6\times(-1)+5=1-6+5=6-6=0=$ R.H.S.

इसी प्रकार, $x=-5$ रखने पर,

L.H.S. $=(-5)^2+6\times(-5)+5=25-30+5=30-30=0=$ R.H.S.

$\therefore x=-1,-5$ दिए हुए समीकरण के **हल हैं।** **उत्तर**

(iv) दिए हुए समीकरण, $a^2x^2-3abx+ab^2=0$ में $x=\frac{a}{b}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=a^2\left(\frac{a}{b}\right)^2-3ab\times\frac{a}{b}+ab^2=a^2\times\frac{a^2}{b^2}-3a^2+ab^2$$

$$=\frac{a^4}{b^2}-3a^2+ab^2=\text{R.H.S.}$$

इसी प्रकार, $x=\frac{b}{a}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=a^2\times\left(\frac{b}{a}\right)^2-3ab\times\frac{b}{a}+ab^2=b^2-3b^2+ab^2\neq\text{R.H.S.}$$

$\therefore x=\frac{a}{b},\frac{b}{a}$ दिए हुए समीकरण के **हल नहीं हैं।** **उत्तर**

(v) दिए हुए समीकरण, $9x^2-3x-2=0$ में $x=-\frac{1}{3}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=9\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)-2=9\times\frac{1}{9}+1-2$$

$$=1+1-2=2-2=0=\text{R.H.S.}$$

इसी प्रकार, $x=\frac{2}{3}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=9\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\left(\frac{2}{3}\right)-2=9\times\frac{4}{9}-2-2=4-4=0=\text{R.H.S.}$$

$\therefore x=-\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ दिए हुए समीकरण के **हल हैं।** **उत्तर**

(vi) दिए हुए समीकरण, $3x^2-2x-1=0$ में $x=1$ रखने पर,

L.H.S. $=3\times1^2-2\times1-1=3\times1-2-1=3-3=0=$ R.H.S.

$\therefore x=1$ दिए हुए समीकरण के **हल है।** **उत्तर**

(vii) दिए हुए समीकरण, $100x^2-20x+1=0$ में $x=\frac{1}{10}$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.}=100\times\left(\frac{1}{10}\right)^2-20\times\frac{1}{10}+1=100\times\frac{1}{100}-2+1$$

$$=1-2+1=2-2=0=\text{R.H.S.}$$

$\therefore x=\frac{1}{10}$ दिए हुए समीकरण के **हल हैं।** **उत्तर**

3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण एक द्विघात समीकरण है—

$$4x^2+5x+3=3x^2+4x+2$$

हल– $4x^2+5x+3=3x^2+4x+2$

या $4x^2-3x^2+5x-4x+3-2=0$

या $x^2+x+1=0$ जो कि एक द्विघात समीकरण है।

∴ दिया हुआ समीकरण **द्विघात समीकरण** है। **उत्तर**

4. यदि समीकरण $3x^2+2px-3=0$ का एक मूल $x=-\frac{1}{2}$ है, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए समीकरण, $3x^2+2Px-3=0$ का एक मूल $x=-\frac{1}{2}$ है।

अतः यह समीकरण को सन्तुष्ट करेगा।

समीकरण में $x=-\frac{1}{2}$ रखने पर,

$$3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times p\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3=0 \quad \text{या} \quad \frac{3}{4}-p-3=0$$

या $\frac{3}{4}-3=p \Rightarrow p=\frac{3-12}{4}=-\frac{9}{4}$ **उत्तर**

5. यदि समीकरण $3x^2-2lx+2m=0$ के मूल $x=2$ तथा $x=3$ हैं, तो l व m के मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए समीकरण, $3x^2-2lx+2m$ के मूल $x=2$ तथा $x=3$ हैं। अतः ये मूल समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे।

समीकरण $3x^2-2lx+2m=0$ में $x=2$ रखने पर,

$$3\times(2)^2-2l\times2+2m=0 \quad \text{या} \quad 3\times4-4l+2m=0$$

या $12-4l+2m=0$ ...(1)

इसी प्रकार, $x=3$ रखने पर,

$$3\times(3)^2-2l\times3+2m=0$$

या $27-6l+2m=0$ ...(2)

समीकरण (2) में से समीकरण (1) घटाने पर

$$15-2l=0 \quad \text{या} \quad 15=2l \Rightarrow 2l=15 \Rightarrow l=\frac{15}{2}$$

अब l का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$12-4\times\frac{15}{2}+2m=0 \quad \text{या} \quad 12-30+2m=0$$

या $-18+2m=0$ या $-9+m=0$

या $m=9$ अतः $l=\frac{15}{2}$, $m=9$ **उत्तर**

6. यदि समीकरण $x^2-(a+b)x+k=0$ का एक मूल $x=a$ है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए हुए समीकरण, $x^2-(a+b)x+k=0$ में $x=a$ रखने पर,

$a^2-(a+b)\times a+k=0 \Rightarrow a^2-a^2-ab+k=0$

$\Rightarrow -ab+k=0 \Rightarrow k=ab$ उत्तर

अभ्यास 3.2

1. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को गुणनखण्ड विधि द्वारा हल कीजिए—

(i) $x^2+6x+5=0$ (ii) $5(x-5)(x+5)=55$

(iii) $16x^2=25$ (iv) $x^2+x-12=0$

(v) $3x^2-4x+1=0$ (vi) $3x^2-2x-21=0$

(vii) $(2x+3)(3x-7)=0$ (viii) $5x^2-3x-2=0$

(ix) $2x^2+1=33$ (x) $\frac{x}{4}=\frac{4}{x}$

हल– (i) $x^2+6x+5=0 \Rightarrow x^2+5x+x+5=0$

$\Rightarrow x(x+5)+1(x+5)=0 \Rightarrow (x+5)(x+1)=0$

अब, यदि $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

तथा $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

अत: $x=-5,-1$ उत्तर

(ii) $5(x-5)(x+5)=55 \Rightarrow (x-5)(x+5)=11$

$\Rightarrow x^2-25=11 \Rightarrow x^2-25-11=0$

$\Rightarrow x^2-36=0 \Rightarrow x^2-6^2=0$

$\Rightarrow (x+6)(x-6)=0$

अब, यदि $x+6=0 \Rightarrow x=-6$

तथा $x-6=0 \Rightarrow x=6$

अत: $x=\pm 6$ उत्तर

(iii) $16x^2=25 \Rightarrow 16x^2-25=0$

$\Rightarrow (4x)^2-5^2=0 \Rightarrow (4x+5)(4x-5)=0$

अब, यदि $4x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{4}$

तथा $4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$

अत: $x=\pm\frac{5}{4}$ उत्तर

(iv) $x^2+x-12=0 \Rightarrow x^2+4x-3x-12=0$

$\Rightarrow x(x+4)-3(x+4)=0 \Rightarrow (x+4)(x-3)=0$

अब, यदि $x-3=0 \Rightarrow x=3$ तथा $x+4=0 \Rightarrow x=-4$

अत: $x=3,-4$ उत्तर

(v) $3x^2-4x+1=0 \Rightarrow 3x^2-3x-x+1=0$

$\Rightarrow 3x(x-1)-1(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(3x-1)=0$

अब, यदि $x-1=0 \Rightarrow x=1$ तथा $3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

अत: $x=1, \frac{1}{3}$ उत्तर

(vi) $3x^2-2x-21=0 \Rightarrow 3x^2-9x+7x-21=0$

$\Rightarrow 3x(x-3)+7(x-3)=0 \Rightarrow (x-3)(3x+7)=0$

अब, यदि $x-3=0 \Rightarrow x=3$ तथा $3x+7=0 \Rightarrow x=-\frac{7}{3}$

अतः $x=3,-\frac{7}{3}$ **उत्तर**

(vii) $(2x+3)(3x-7)=0$

यदि $2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ तथा $3x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$

अतः $x=-\frac{3}{2},\frac{7}{3}$ **उत्तर**

(viii) $5x^2-3x-2=0 \Rightarrow 5x^2-5x+2x-2=0$

$\Rightarrow 5x(x-1)+2(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(5x+2)=0$

अब यदि $x-1=0 \Rightarrow x=1$ तथा $5x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{5}$

अतः $x=1,-\frac{2}{5}$ **उत्तर**

(ix) $2x^2+1=33 \Rightarrow 2x^2+1-33=0$

$\Rightarrow 2x^2-32=0 \Rightarrow x^2-16=0$

$\Rightarrow x^2-4^2=0 \Rightarrow (x+4)(x-4)=0$

अब, यदि $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ तथा $x-4=0 \Rightarrow x=4$

अतः $x=\pm 4$ **उत्तर**

(x) $\frac{x}{4}=\frac{4}{x} \Rightarrow x^2=4^2$

$\Rightarrow x^2-4^2=0 \Rightarrow (x+4)(x-4)=0$

अब, यदि $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ तथा $x-4=0 \Rightarrow x=4$

अतः $x=\pm 4$ **उत्तर**

2. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को गुणनखण्ड विधि द्वारा हल कीजिए—

(i) $(a+1)x^2+2ax+a-1=0$ **(ii)** $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$

(iii) $x^2-\frac{10x}{3}+1=0$ **(iv)** $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=\frac{x}{12}+\frac{12}{x}$

(v) $y^2+2\sqrt{3}y+3=0$ **(vi)** $x^2-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=0$

(vii) $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ **(viii)** $4x^2+4bx-(a^2-b^2)=0$

(ix) $x^2-4x-60=0$

(x) $(a+b)^2x^2-(a+b)x-6=0,\ (a+b\neq 0)$

हल– (i) $(a+1)x^2+2ax+a-1=0$

$\Rightarrow (a+1)x^2+(a+1)x+(a-1)x+(a-1)=0$

$\Rightarrow (a+1)x(x+1)+(a-1)(x+1)=0$

$\Rightarrow (x+1)\{(a+1)x+(a-1)\}=0$

अब, यदि $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ तथा $\{(a+1)x+(a-1)\}=0$

$\Rightarrow \quad x=-\frac{a-1}{a+1} \Rightarrow x=\frac{1-a}{1+a}$ अत: $x=-1, \frac{1-a}{1+a}$ उत्तर

(ii) $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}x^2+5x+2x+5\sqrt{2}=0$

$\Rightarrow \quad x(\sqrt{2}x+5)+\sqrt{2}(\sqrt{2}x+5)=0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2}x+5)(x+\sqrt{2})=0$

अब, यदि $\sqrt{2}x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-5}{\sqrt{2}}$ तथा $x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2}$

अत: $x=\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ उत्तर

(iii) $x^2-\frac{10x}{3}+1=0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-10x+3=0$

$\Rightarrow \quad 3x^2-9x-x+3=0 \quad \Rightarrow \quad 3x(x-3)-1(x-3)=0$

$\Rightarrow \quad (x-3)(3x-1)=0$

अब, यदि $x-3=0 \Rightarrow x=3$ तथा $3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

अत: $x=3, \frac{1}{3}$ उत्तर

(iv) $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=\frac{x}{12}+\frac{12}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3}-\frac{x}{12}=\frac{12}{x}-\frac{3}{x}$

$\Rightarrow \quad \frac{4x-x}{12}=\frac{12-3}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{12}=\frac{9}{x}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{4}=\frac{9}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2=36$

$\Rightarrow \quad x^2-36=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-6^2=0$

$\Rightarrow \quad (x+6)(x-6)=0$

अब, यदि $x-6=0 \Rightarrow x=6$ तथा $x+6=0 \Rightarrow x=-6$

अत: $x=\pm 6$ उत्तर

(v) $y^2+2\sqrt{3}y+3=0 \quad \Rightarrow \quad y^2+\sqrt{3}y+\sqrt{3}y+3=0$

$\Rightarrow \quad y(y+\sqrt{3})+\sqrt{3}(y+\sqrt{3})=0 \quad \Rightarrow \quad (y+\sqrt{3})(y+\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow \quad (y+\sqrt{3})^2=0 \quad \Rightarrow \quad (y+\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow \quad y=-\sqrt{3}$ उत्तर

(vi) $x^2-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-\sqrt{6}x-\sqrt{2}x+2\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow \quad x(x-\sqrt{6})-\sqrt{2}(x-\sqrt{6})=0 \quad \Rightarrow \quad (x-\sqrt{6})(x-\sqrt{2})=0$

अब, यदि $x-\sqrt{6}=0 \Rightarrow x=\sqrt{6}$ तथा $x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}$

अत: $x=\sqrt{6}, \sqrt{2}$ उत्तर

(vii) $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-\sqrt{2}x+\sqrt{2}=0$

$\Rightarrow \quad x(x-1)-\sqrt{2}(x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-\sqrt{2})=0$

अब यदि $x-1=0 \Rightarrow x=1$ तथा $x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}$

अत: $x=1, \sqrt{2}$ उत्तर

(viii) $4x^2+4bx-(a^2-b^2)=0$

$\Rightarrow \quad 4x^2+4bx-(a+b)(a-b)=0$

$\Rightarrow \quad 4x^2+2(a+b)x-2(a-b)x-(a+b)(a-b)=0$

$\Rightarrow \quad 2x[(2x+(a+b)]-(a-b)[2x+(a+b)]=0$

$\Rightarrow \quad [2x+(a+b)][2x-(a-b)]=0$

अब, यदि $2x+a+b=0 \Rightarrow x=\frac{(a+b)}{2}$

तथा $2x-(a-b)=0 \Rightarrow x=\frac{(a-b)}{2}$

अत: $x=\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}$ उत्तर

(ix) $x^2-4x-60=0 \Rightarrow x^2-10x+6x-60=0$

$\Rightarrow \quad x(x-10)+6(x-10)=0 \Rightarrow (x-10)(x+6)=0$

अब, यदि $x-10=0 \Rightarrow x=10$ तथा $x+6=0 \Rightarrow x=-6$

अत: $x=10,-6$ उत्तर

(x) $(a+b)^2x^2-(a+b)x-6=0, \ (a+b\neq 0)$

$\Rightarrow \quad (a+b)^2x^2-3(a+b)x+2(a+b)x-6=0$

$\Rightarrow \quad (a+b)x\{(a+b)x-3\}+2\{(a+b)x-3\}=0$

$\Rightarrow \quad \{(a+b)x-3\}\{(a+b)x+2\}=0$

अब, यदि $(a+b)x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{a+b}$

तथा $(a+b)x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{a+b}$

अत: $x=\frac{3}{a+b}, -\frac{2}{a+b}$ उत्तर

3. द्विघात समीकरण $6+x-2x^2=0$ को हल कीजिए।

हल– $6+x-2x^2=0 \Rightarrow 6+4x-3x-2x^2=0$

$\Rightarrow \quad 2(3+2x)-x(3+2x)=0 \Rightarrow (3+2x)(2-x)=0$

अब यदि $3+2x=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ तथा $2-x=0 \Rightarrow x=2$

अत: $x=-\frac{3}{2}, 2$ उत्तर

4. $\frac{1}{x^2+5}=\frac{1}{9}$ को हल कीजिए।

हल– $\frac{1}{x^2+5}=\frac{1}{9} \Rightarrow x^2+5=9 \Rightarrow x^2+5-9=0$

$\Rightarrow \quad x^2-4=0 \Rightarrow x^2-2^2=0 \Rightarrow (x+2)(x-2)=0$

अब यदि, $x+2=0 \Rightarrow x=2$ तथा $x-2=0 \Rightarrow x=2$

अत: $x=\pm 2$ उत्तर

अभ्यास 3.3

निदेश : प्रत्येक द्विघात समीकरण को श्रीधराचार्य सूत्र द्वारा हल कीजिए—

1. $x^2 - 4x - 2\frac{1}{4} = 0$
2. $1 + x + x^2 = 0$
3. $2x^2 + p^2 = (q - x)^2$
4. $9x^2 - 10 + 2 = 0$
5. $6x^2 - 7x - 5 = 0$
6. $\sqrt{3}x^2 + 10x - 8\sqrt{3} = 0$
7. $3x^2 - 2x - 21 = 0$
8. $2y^2 - 5y - 24 = 0$
9. $x^2 + 6x + 7 = 0$
10. $2x + \frac{7}{x} = 9$
11. $\frac{x-1}{2} - \frac{2}{x} = x - \frac{3}{x}$
12. $5x^2 - 15x + 6 = 0$
13. $x^2 - 6x - 15 = 0$
14. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}$
15. $x^2 + x - (a+2)(a+1) = 0$
16. $(x^2 + 12x)^2 + 35(x^2 + 12x) + 150 = 0$
17. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2$
18. $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$
19. $x + \frac{1}{x} = 3,\ x \neq 0$
20. $x^2 + 5x + 5 = 0$
21. $5x^2 - 31x + 30 = 0$
22. $(x+2)(x+3) = 5x + 7$

हल– 1. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2 - 4x - 2\frac{1}{4} = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1,\ b = -4,\ c = -2\frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{9}{4}\right)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16+9}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{4 \pm 5}{2}$$

धनात्मक मान लेने पर, $x = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$

ऋणात्मक मान लेने पर, $x = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2}$

अत: $x = \frac{9}{2}, -\frac{1}{2}$ **उत्तर**

2. दी गई द्विघात समीकरण, $1 + x + x^2 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 1$$

अत: श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

अतः $\boldsymbol{x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}}$ **उत्तर**

3. दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 + p^2 = (q - x)^2$

या $2x^2 + p^2 = q^2 + x^2 - 2qx$

या $x^2 + 2qx + p^2 - q^2 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1,\ b = 2q,\ c = p^2 - q^2$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2q \pm \sqrt{(2q)^2 - 4 \times 1(p^2 - q^2)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4p^2 + 4q^2}}{2}$$

$$= \frac{-2q \pm \sqrt{8q^2 - 4p^2}}{2} = \frac{-2q \pm 2\sqrt{2q^2 - p^2}}{2}$$

$$= \frac{2(-q \pm \sqrt{2q^2 - p^2})}{2} = \boldsymbol{-q \pm \sqrt{2q^2 - p^2}}$$ **उत्तर**

4. दी गई द्विघात समीकरण, $9x^2 - 10x + 2 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 9,\ b = -10,\ c = 2$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 9 \times 2}}{2 \times 9}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 72}}{18} = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{18}$$

$$= \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{18} = \boldsymbol{\frac{5 \pm \sqrt{7}}{9}}$$ **उत्तर**

5. दी गई द्विघात समीकरण, $6x^2 - 7x - 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 6,\ b = -7,\ c = -5$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5)}}{2 \times 6}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{7 \pm 13}{12}$$

धनात्मक मान लेने पर, $x = \frac{7 + 13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

ऋणात्मक मान लेने पर, $x = \frac{7 - 13}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

अतः दी गई समीकरण का हल $\boldsymbol{x = \frac{5}{3}, -\frac{1}{2}}$ **उत्तर**

6. दी गई द्विघात समीकरण, $\sqrt{3}x^2+10x-8\sqrt{3}=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=\sqrt{3},\ b=10,\ c=-8\sqrt{3}$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-10\pm\sqrt{(10)^2-4\times\sqrt{3}(-8\sqrt{3})}}{2\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{-10\pm\sqrt{100-96}}{2\sqrt{3}}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{2\sqrt{3}}=\frac{-10\pm14}{2\sqrt{3}}$$

धनात्मक मान लेने पर, $x=\frac{-10+14}{2\sqrt{3}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

ऋणात्मक मान लेने पर, $x=\frac{-10-14}{2\sqrt{3}}=-\frac{24}{2\sqrt{3}}=-4\sqrt{3}$

अतः $x=\frac{2}{\sqrt{3}},-4\sqrt{3}$ **उत्तर**

7. दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2-2x-21=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=3,\ b=-2,\ c=-21$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times3(-21)}}{2\times3}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4+252}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{256}}{6}=\frac{2\pm16}{6}=\frac{1\pm8}{3}$$

धनात्मक मान लेने पर, $x=\frac{1+8}{3}=\frac{9}{3}=3$

ऋणात्मक मान लेने पर, $x=\frac{1-8}{3}=-\frac{7}{3}$

अतः $x=3,-\frac{7}{3}$ **उत्तर**

8. दी गई द्विघात समीकरण, $2y^2-5y-24=0$ की तुलना $ay^2+by+c=0$ से करने पर,

$$a=2,\ b=-5,\ c=-24$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2\times(-24)}}{2\times2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{25+192}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{217}}{4}$$ **उत्तर**

9. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+6x+7=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1,\ b=6,\ c=7$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times7}}{2\times1}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{36-28}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$=\frac{-6\pm2\sqrt{2}}{2}=-3\pm\sqrt{2}$$ **उत्तर**

10. दी गई द्विघात समीकरण, $2x+\frac{7}{x}=9$ या $2x^2+7=9x$

या $2x^2-9x+7=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=2,\ b=-9,\ c=7$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\times2\times7}}{2\times2}$$

$$=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{4}=\frac{9\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{9\pm5}{4}$$

अतः $$x=\frac{9+5}{4},\frac{9-5}{4}=\frac{14}{4},\frac{4}{4}=\frac{7}{2},1$$ **उत्तर**

11. दी गई द्विघात समीकरण, $\frac{x-1}{2}-\frac{2}{x}=x-\frac{3}{x}$

या $$\frac{x^2-x-4}{2x}=\frac{x^2-3}{x}$$ या $$\frac{x^2-x-4}{2}=x^2-3$$

या $$x^2-x-4=2x^2-6$$ या $$2x^2-x^2+x+4-6=0$$

या $x^2+x-2=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1,\ b=1,\ c=-2$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}$$

अतः $$x=\frac{-1+3}{2},\frac{-1-3}{2}=\frac{2}{2},-\frac{4}{2}=1,-2$$ **उत्तर**

12. दी गई द्विघात समीकरण, $5x^2-15x+6=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=5,\ b=-15,\ c=6$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\times5\times6}}{2\times5}$$

$$=\frac{15\pm\sqrt{225-120}}{10}=\frac{15\pm\sqrt{105}}{10}$$ **उत्तर**

13. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-6x-15=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर

$$a=1,\ b=-6,\ c=-15$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times(-15)}}{2\times1}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{36+60}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{96}}{2}$$

$$=\frac{6\pm4\sqrt{6}}{2}=3\pm2\sqrt{6}$$ **उत्तर**

14. दी गई द्विघात समीकरण, $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}$

या $$\frac{x+2-x}{x(x+2)}=\frac{(x+4)-(x+1)}{(x+1)(x+4)}$$

या $$\frac{2}{x^2+2x}=\frac{x+4-x-1}{x^2+4x+x+4}$$

या $$\frac{2}{x^2+2x}=\frac{3}{x^2+5x+4}$$

या $$2x^2+10x+8=3x^2+6x$$

या $$3x^2-2x^2+6x-10x-8=0$$

या $$x^2-4x-8=0$$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1,\ b=-4,\ c=-8$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-8)}}{2\times1}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16+32}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{48}}{2}$$

अतः $$=\frac{4\pm4\sqrt{3}}{2}=2\pm2\sqrt{3}$$ **उत्तर**

15. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+x-(a+2)(a+1)=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=1,\ B=1,\ C=-(a+2)(a+1)$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\{-(a+2)(a+1)\}}}{2\times1}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(a+2)(a+1)}}{2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(a^2+2a+a+2)}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^2 + 8a + 4a + 8}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{4a^2 + 12a + 9}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(2a+3)^2}}{2} = \frac{-1 \pm (2a+3)}{2}$$

अतः $$x = \frac{-1 + (2a+3)}{2}, \frac{-1 - (2a+3)}{2}$$

$$= \frac{-1 + 2a + 3}{2}, \frac{-1 - 2a - 3}{2}$$

$$= \frac{2a + 2}{2}, \frac{-2a - 4}{2}$$

$$= \frac{2(a+1)}{2}, \frac{-2(a+2)}{2}$$

$$= (a+1), -(a+2)$$ **उत्तर**

16. दी गई द्विघात समीकरण, $(x^2 + 12x)^2 + 35(x^2 + 12x) + 150 = 0$ में $x^2 + 12 = X$ रखने पर, $X^2 + 35X + 150 = 0$ की तुलना $AX^2 + BX + C = 0$ से करने पर,

$$A = 1,\ B = 35,\ C = 150$$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$= \frac{-35 \pm \sqrt{(35)^2 - 4 \times 1 \times 150}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-35 \pm \sqrt{1225 - 600}}{2} = \frac{-35 \pm \sqrt{625}}{2}$$

$$= \frac{-35 \pm 25}{2}$$

अतः $$X = \frac{-35 + 25}{2}, \frac{-35 - 25}{2}$$

$$= \frac{-10}{2}, \frac{-60}{2} = -5, -30$$

या $x^2 + 12x = -5$ तथा $x^2 + 12x = -30$

या $x^2 + 12x + 5 = 0$ या $x + 12x + 30 = 0$

पुनः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$ तथा $$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 1 \times 30}}{2 \times 1}$$

या $$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 20}}{2}$$ तथा $$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 120}}{2}$$

या $x=\frac{-12\pm\sqrt{124}}{2}$ तथा $x=\frac{-12\pm\sqrt{24}}{2}$

या $x=\frac{-12\pm\sqrt{4\times 31}}{2}$ तथा $x=\frac{-12\pm 2\sqrt{6}}{2}$

या $x=\frac{-12\pm 2\sqrt{31}}{2}$ तथा $x=-6\pm\sqrt{6}$

या $x=-6\pm\sqrt{31}$

अतः दी हुई द्विघात समीकरण के अभीष्ट हल $x=-6\pm\sqrt{31},\ -6\pm\sqrt{6}$ **उत्तर**

17. दी गई द्विघात समीकरण,

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}=3$ या $\frac{x-2-x}{x(x-2)}=3$

या $\frac{-2}{x^2-2x}=3$ या $-2=3x^2-6x$

या $3x^2-6x+2=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=3,\ b=-6,\ c=2$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times 3\times 2}}{2\times 3}$$
$$=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{6}$$

अतः $x=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ **उत्तर**

18. दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=2,\ b=-2\sqrt{2},\ c=1$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{(-2\sqrt{2})^2-4\times 2\times 1}}{2\times 2}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-8}}{4}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}\pm 0}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\pm 0$$

अतः $x=\frac{1}{\sqrt{2}}+0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}-0=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}$ **उत्तर**

19. दी गई द्विघात समीकरण, $x+\frac{1}{x}=3$

या $x^2+1=3x$

या $x^2-3x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर, $a=1, b=-3, c=1$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$$

$$=\frac{\mathbf{3\pm\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$$ **उत्तर**

20. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+5x+5=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=1, b=5, c=5$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-4\times1\times5}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{25-20}}{2}$$

$$=\frac{\mathbf{-5\pm\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$$ **उत्तर**

21. दी गई द्विघात समीकरण, $5x^2-31x+30=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=5, b=-31, c=30$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-31)\pm\sqrt{(-31)^2-4\times5\times30}}{2\times5}$$

$$=\frac{31\pm\sqrt{961-600}}{10}=\frac{31\pm\sqrt{361}}{10}=\frac{31\pm19}{10}$$

अतः $$x=\frac{31+19}{10}, \frac{31-19}{10}=\frac{50}{10}, \frac{12}{10}=\mathbf{5, \frac{6}{5}}$$ **उत्तर**

22. दी गई द्विघात समीकरण, $(x+2)(x+3)=5x+7$

या $x^2+3x+2x+6=5x+7$ या $x^2+5x+6=5x+7$

या $x^2+5x-5x+6-7=0$

या $x^2-1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=1, b=0, c=-1$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{0\pm\sqrt{0^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$=\frac{\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{\pm2}{2}=\pm1$$ उत्तर

अभ्यास 3.4

निर्देश : प्रत्येक द्विघात समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाकर हल कीजिए—

1. $2x^2-5x-12=0$
2. $6x^2-13x+5=0$
3. $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=2\frac{1}{2}$
4. $4x^2+16x-9=0$
5. $-21-2x+3x^2=0$
6. $4x^2-8x+3=0$
7. $2x+3-x^2=0$
8. $6x^2-7x-3=0$
9. $x^2-4x-60=0$
10. $2x^2-7x+3=0$
11. $4x^2+4\sqrt{3}x+3=0$
12. $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30}, x\neq4, 7$

हल–

1. दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2-5x-12=0$

या $2x^2-5x=12$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-\frac{5}{2}x=6$ (दोनों पक्षों में 2 से भाग करने पर)

या $x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=6+\left(\frac{5}{4}\right)^2$ [दोनों पक्षों में $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ जोड़ने पर]

या $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=6+\frac{25}{16}$ या $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{96+25}{16}$

या $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$ या $\left(x-\frac{5}{4}\right)=\pm\sqrt{\frac{121}{16}}$

या $x-\frac{5}{4}=\pm\frac{11}{4}$

अब, यदि $x-\frac{5}{4}=\frac{11}{4}$ तो $x=\frac{11}{4}+\frac{5}{4}=\frac{16}{4}=4$

इसी प्रकार, यदि $x-\frac{5}{4}=-\frac{11}{4}$ तो $x=-\frac{11}{4}+\frac{5}{4}=\frac{-11+5}{4}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$

अतः $x=4, -\frac{3}{2}$ उत्तर

2. दी गई द्विघात समीकरण, $6x^2-13x+5=0$

या $6x^2-13x=-5$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-\frac{13}{6}x=-\frac{5}{6}$ (दोनों पक्षों में 6 से भाग करने पर)

या $x^2-\frac{13}{6}x+\left(\frac{13}{12}\right)^2=-\frac{5}{6}+\left(\frac{13}{12}\right)^2$ {दोनों पक्षों में $\left(\frac{13}{12}\right)^2$ जोड़ने पर}

या $\left(x-\frac{13}{12}\right)^2=\frac{-5}{6}+\frac{169}{144}$

या $\left(x-\frac{13}{12}\right)^2=\frac{-120+169}{144}$ या $\left(x-\frac{13}{12}\right)^2=\frac{49}{144}$

या $x-\frac{13}{12}=\pm\sqrt{\frac{49}{144}}$ या $x-\frac{13}{12}=\pm\frac{7}{12}$

अब, यदि $x-\frac{13}{12}=\frac{7}{12}$ तो $x=\frac{7}{12}+\frac{13}{12}=\frac{7+13}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

तथा यदि $x-\frac{13}{12}=-\frac{7}{12}$ तो $x=\frac{13}{12}-\frac{7}{12}=\frac{13-7}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

अत: $x=\frac{5}{3}, \frac{1}{2}$ **उत्तर**

3. दी गई द्विघात समीकरण, $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=2\frac{1}{2}$

या $\frac{x^2+(x-1)^2}{(x-1)(x)}=\frac{5}{2}$ या $\frac{x^2+x^2+1-2x}{x^2-x}=\frac{5}{2}$

या $\frac{2x^2+1-2x}{x^2-x}=\frac{5}{2}$ या $4x^2+2-4x=5x^2-5x$

या $5x^2-5x+4x-4x^2=2$ या $x^2-x=2$

या $x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$ {दोनों पक्षों में $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ जोड़ने पर}

या $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=2+\frac{1}{4}$ या $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{8+1}{4}$

या $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ या $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

या $x-\frac{1}{2}=\pm\frac{3}{2}$

अब, यदि $x-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ तो $x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$

तथा यदि $x-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$ तो $x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

अत: $x=2,-1$ **उत्तर**

4. दी गई द्विघात समीकरण, $4x^2+16x-9=0$

या $4x^2+16x=9$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2+4x=\frac{9}{4}$ (दोनों पक्षों में 4 से भाग करने पर)

या $x^2+4x+2^2=\frac{9}{4}+2^2$ (दोनों पक्षों में 2^2 जोड़ने पर)

या $(x+2)^2=\frac{9}{4}+4$ या $(x+2)^2=\frac{25}{4}$

या $x+2=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}$ या $x+2=\pm\frac{5}{2}$

अब, यदि $x+2=\frac{5}{2}$ तो $x=\frac{5}{2}-2=\frac{5-4}{2}=\frac{1}{2}$

यदि $x+2=-\frac{5}{2}$ तो $x=-\frac{5}{2}-2=\frac{-5-4}{2}=-\frac{9}{2}=-4\frac{1}{2}$

अत: $x=\mathbf{\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}}$ **उत्तर**

5. दी गई द्विघात समीकरण, $-21-2x+3x^2=0$

या $3x^2-2x=21$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-\frac{2}{3}x=7$ (दोनों पक्षों मे 3 से भाग करने पर)

या $x^2-\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=7+\left(\frac{1}{3}\right)^2$ (दोनों पक्षों में $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ जोड़ने पर)

या $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=7+\frac{1}{9}$ या $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{63+1}{9}$

या $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{64}{9}$ या $x-\frac{1}{3}=\pm\sqrt{\frac{64}{9}}$

या $x-\frac{1}{3}=\pm\frac{8}{3}$

अब, यदि $x-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$ तो $x=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8+1}{3}=\frac{9}{3}=3$

यदि $x-\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}$ तो $x=\frac{1}{3}-\frac{8}{3}=\frac{1-8}{3}=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}$

अत: $x=\mathbf{3, -2\frac{1}{3}}$ **उत्तर**

6. दी गई द्विघात समीकरण, $4x^2-8x+3=0$

या $4x^2-8x=-3$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-2x=-\frac{3}{4}$ (दोनों पक्षों मे 4 से भाग करने पर)

या $x^2-2x+1^2=-\frac{3}{4}+1^2$ (दोनों पक्षों में 1^2 जोड़ने पर)

या $(x-1)^2=-\frac{3}{4}+1$ या $(x-1)^2=\frac{-3+4}{4}$

या $(x-1)^2=\frac{1}{4}$ या $x-1=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

या $x-1=\pm\frac{1}{2}$

अब, यदि $x-1=\frac{1}{2}$ तो $x=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

यदि $x-1=-\frac{1}{2}$ तो $x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

अतः $x=\mathbf{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$ **उत्तर**

7. दी गई द्विघात समीकरण, $2x+3-x^2=0$

या $x^2-2x=3$

या $x^2-2x+1^2=3+1^2$ (दोनों पक्षों में 1^2 जोड़ने पर)

या $(x-1)^2=3+1$ या $(x-1)^2=4$

या $x-1=\pm\sqrt{4}$ या $x-1=\pm2$

यदि $x-1=2$ तो $x=2+1=3$

तथा यदि $x-1=-2$ तो $x=-2+1=-1$

अतः $x=\mathbf{3, -1}$ **उत्तर**

8. दी गई द्विघात समीकरण, $6x^2-7x-3=0$

या $6x^2-7x=3$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-\frac{7}{6}x=\frac{1}{2}$ (दोनों पक्षों में 6 से भाग करने पर)

या $x^2-\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{12}\right)^2$ (दोनों पक्षों में $\left(\frac{7}{12}\right)^2$ जोड़ने पर)

या $\left(x-\frac{7}{12}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{49}{144}$ या $\left(x-\frac{7}{12}\right)^2=\frac{72+49}{144}$

या $\left(x-\frac{7}{12}\right)^2=\frac{121}{144}$ या $\left(x-\frac{7}{12}\right)^2=\pm\sqrt{\frac{121}{144}}$

या $x-\frac{7}{12}=\pm\frac{11}{12}$

अब, यदि $x-\frac{7}{12}=\frac{11}{12}$ तो $x=\frac{11}{12}+\frac{7}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$

तथा यदि $x-\frac{7}{12}=-\frac{11}{12}$ तो $x=-\frac{11}{12}+\frac{7}{12}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$

अतः $x=\mathbf{\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}}$ **उत्तर**

9. दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-4x-60=0$

या $x^2-4x=60$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-4x+2^2=60+2^2$ (दोनों पक्षों में 2^2 जोड़ने पर)

या $(x-2)^2=60+4$ या $(x-2)^2=64$

या $x-2=\pm\sqrt{64}$ या $x-2=\pm 8$

अब, यदि $x-2=8$ तो $x=8+2=10$

तथा यदि $x-2=-8$ तो $x=2-8=-6$

अत: $x=10,-6$ **उत्तर**

10. दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2-7x+3=0$

या $2x^2-7x=-3$ (अचर पद को दाईं ओर लाने पर)

या $x^2-\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}$ (दोनों पक्षों में 2 से भाग करने पर)

या $x^2-\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{3}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)^2$ (दोनों पक्षों में $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ जोड़ने पर)

या $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{3}{2}+\frac{49}{16}$ या $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{-24+49}{16}$

या $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$ या $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\pm\sqrt{\frac{25}{16}}$

या $x-\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$

अब, यदि $x-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}$ तो $x=\frac{5}{4}+\frac{7}{4}=\frac{5+7}{4}=\frac{12}{4}=3$

तथा यदि $x-\frac{7}{4}=-\frac{5}{4}$ तो $x=\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

अत: $x=3,\ \frac{1}{2}$ **उत्तर**

11. दी गई द्विघात समीकरण, $4x^2+4\sqrt{3}x+3=0$

या $4x^2+4\sqrt{3}x=-3$ या $x^2+\sqrt{3}x=-\frac{3}{4}$

या $x^2+\sqrt{3}x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

या $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}$ या $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$

या $x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm\sqrt{0}$ या $x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm 0$

अब, यदि $x+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ तो $x=0-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

तथा यदि $x+\frac{\sqrt{3}}{2}=-0$ तो $x=-0-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

अत: $x=-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **उत्तर**

12. दी गई द्विघात समीकरण,

$$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30}$$

या $\frac{(x-7)-(x+4)}{(x+4)(x-7)}=\frac{11}{30}$ या $\frac{x-7-x-4}{x^2-7x+4x-28}=\frac{11}{30}$

या $\frac{-11}{x^2-3x-28}=\frac{11}{30}$ या $\frac{-1}{x^2-3x-28}=\frac{1}{30}$

या $x^2-3x-28=-30$ या $x^2-3x=28-30$

या $x^2-3x=-2$ या $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

या $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-2+\frac{9}{4}$ या $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{-8+9}{4}$

या $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ या $\left(x-\frac{3}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

या $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2}$

अब, यदि $x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ तो $x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2$

यदि $x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ तो $x=\frac{3}{2}\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$

अतः $x=2,1$ **उत्तर**

अभ्यास 3.5

1. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के विविक्तकर ज्ञात कीजिए–

(i) $2x^2+11x+15=0$ **(ii)** $x^2+x+1=0$

(iii) $3x^2+2x+12=0$ **(iv)** $2x^2-7x+5=0$

(v) $2x^2-9x+10=0$ **(vi)** $3x^2+8x+4=0$

(vii) $2x^2+7x+6=0$ **(viii)** $x^2-4x+1=0$

(ix) $2x^2-5x+8=0$ **(x)** $\sqrt{3}x^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{3}=0$

हल–

(i) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2+11x+15=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=2, b=11, c=15$$

अतः विविक्तकर $D=b^2-4ac$

$=11^2-4\times2\times15$

$=121-120=1$ **उत्तर**

(ii) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1, b=1, c=1$$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= 1^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 1 - 4 = -3$ **उत्तर**

(iii) दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 + 2x + 12 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 3, b = 2, c = 12$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4 \times 3 \times 12$

$= 4 - 144 = -140$ **उत्तर**

(iv) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 7x + 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 2, b = -7, c = 5$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= (-7)^2 - 4 \times 2 \times 5$

$= 49 - 40 = 9$ **उत्तर**

(v) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 9x + 10 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 2, b = -9, c = 10$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= (-9)^2 - 4 \times 2 \times 10$

$= 81 - 80 = 1$ **उत्तर**

(vi) दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 + 8x + 4 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 3, b = 8, c = 4$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= 8^2 - 4 \times 3 \times 4$

$= 64 - 48 = 16$ **उत्तर**

(vii) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 + 7x + 6 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 2, b = 7, c = 6$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= 7^2 - 4 \times 2 \times 6$

$= 49 - 48 = 1$ **उत्तर**

(viii) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2 - 4x + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 1, b = -4, c = 1$

अतः विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 16 - 4 = 12$ **उत्तर**

(ix) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 5x + 8 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = -5, c = 8$$

अत: विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= (-5)^2 - 4 \times 2 \times 8$

$= 25 - 64 = -39$ **उत्तर**

(x) दी गई द्विघात समीकरण, $\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{3}, b = -2\sqrt{2}, c = -2\sqrt{3}$$

अत: विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times (-2\sqrt{3})$

$= 8 + 24 = 32$ **उत्तर**

2. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए—

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ **(ii)** $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$ **(iv)** $2x^2 + 5x + 4 = 0$

(v) $x^2 + 8x + 7 = 0$ **(vi)** $25x^2 + 10x + 1 = 0$

(vii) $p^2x^2 + px + 1 = 0$ **(viii)** $x^2 + 5x + 5 = 0$

(ix) $3x^2 + 2\sqrt{5}x - 5 = 0$

हल–

(i) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 3x + 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = -3, c = 5$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31$

या $D < 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** है। **उत्तर**

(ii) दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3, b = -4\sqrt{3}, c = 4$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 4 = 48 - 48 = 0$

या $D = 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के **मूल वास्तविक, समान** तथा **परिमेय** होंगे। **उत्तर**

(iii) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 6x + 3 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = -6, c = 3$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 36 - 24 = 12$

या $D > 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक, असमान** तथा **अपरिमेय** होंगे। **उत्तर**

(iv) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 + 5x + 4 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 5, c = 4$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= 5^2 - 4 \times 2 \times 4 = 25 - 32 = -7$

या $D < 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** होंगे। **उत्तर**

(v) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2 + 8x + 7 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 8, c = 7$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= 8^2 - 4 \times 1 \times 7 = 64 - 28 = 36$

या $D > 0$ (धनात्मक तथा पूर्ण वर्ग)

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक, असमान तथा परिमेय** होंगे। **उत्तर**

(vi) दी गई द्विघात समीकरण, $25x^2 + 10x + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 25, b = 10, c = 1$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= 10^2 - 4 \times 25 \times 1 = 100 - 100 = 0$

या $D = 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक, समान तथा परिमेय** होंगे। **उत्तर**

(vii) दी गई द्विघात समीकरण, $p^2x^2 + px + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = p^2, b = p, c = 1$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= p^2 - 4 \times p^2 \times 1 = p^2 - 4p^2 = -3p^2$

या $D < 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** हैं। **उत्तर**

(viii) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2 + 5x + 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 5, c = 5$$

अत: $D = b^2 - 4ac$

या $= 5^2 - 4 \times 1 \times 5 = 25 - 20 = 5$

या $D > 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक, असमान तथा अपरिमेय** होंगे। **उत्तर**

(ix) दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2+2\sqrt{5}x-5=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=3, b=2\sqrt{5}, c=-5$$

अतः $D=b^2-4ac$

या $=(2\sqrt{5})^2-4\times3\times(-5)=20+60=80$

या $D>0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक, असमान तथा अपरिमेय** होंगे। **उत्तर**

3. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से किन-किन समीकरणों के मूल वास्तविक होंगे–

(i) $x^2+x+1=0$ **(ii)** $x^2+2x+1=0$

(iii) $2x^2+x-1=0$ **(iv)** $4x^2+6x+2=0$

(v) $4x^2+12x+9=0$ **(vi)** $x^2+2x+4=0$

(vii) $6x^2+x-2=0$ **(viii)** $2x^2+5\sqrt{3}x+6=0$

हल–

(i) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1, b=1, c=1$$

अतः $D=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$

अर्थात् $D<0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** हैं। **उत्तर**

(ii) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+2x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1, b=2, c=1$$

अतः $D=b^2-4ac=2^2-4\times1\times1=4-4=0$

अर्थात् $D=0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** हैं। **उत्तर**

(iii) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2+x-1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=2, b=1, c=-1$$

अतः $D=b^2-4ac=1^2-4\times2\times(-1)=1+8=9$

अर्थात् $D>0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** हैं। **उत्तर**

(iv) दी गई द्विघात समीकरण, $4x^2+6x+2=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=4, b=6, c=2$$

अतः $D=b^2-4ac=6^2-4\times4\times2=36-32=4$

अर्थात् $D>0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** हैं। **उत्तर**

(v) दी गई द्विघात समीकरण, $4x^2+12x+9=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=4, b=12, c=9$$

अतः $D=b^2-4ac=12^2-4\times4\times9=144-144=0$

अर्थात् $D=0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** होंगे। **उत्तर**

(vi) दी गई द्विघात समीकरण, $x^2+2x+4=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1, b=2, c=4$$

अतः $D=b^2-4ac=2^2-4\times1\times4=4-16=-12$

अर्थात् $D<0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** हैं। **उत्तर**

(vii) दी गई द्विघात समीकरण, $6x^2+x-2=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=6, b=1, c=-2$$

अतः $D=b^2-4ac=1^2-4\times6\times(-2)=1+48=49$

अर्थात् $D>0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** होंगे। **उत्तर**

(viii) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2+5\sqrt{3}x+6=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=2, b=5\sqrt{3}, c=6$$

अतः $D=b^2-4ac=(5\sqrt{3})^2-4\times2\times6=75-48=37$

अर्थात् $D>0$

अतः दी गई द्विघात समीकरण के मूल **वास्तविक** होंगे। **उत्तर**

4. यदि समीकरण $x^2-2(3+a)x+a^2-3=0$ के मूल बराबर हों तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-2(3+a)x+a^2-3=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=1, B=-2(3+a), C=(a^2-3)$$

ज्ञात है—समीकरण के मूल बराबर हैं।

अतः $B^2-4AC=0$

या $\{-2(3+a)\}^2-4\times1\times(a^2-3)=0$ या $4(3+a)^2-4(a^2-3)=0$

या $(3+a)^2-(a^2-3)=0$ या $9+a^2+6a-a^2+3=0$

या $6a+12=0$ या $6a=-12$

या $a=-2$ **उत्तर**

5. यदि समीकरण $3x^2 - 5x + k = 0$ के मूल समान हैं, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 - 5x + k = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3, b = -5, c = k$$

दिया है—समीकरण के मूल समान हैं।

अतः $b^2 - 4ac = 0$

या $(-5)^2 - 4 \times 3k = 0$ या $25 - 12k = 0$

या $25 = 12k \Rightarrow k = \frac{25}{12}$ **उत्तर**

6. यदि समीकरण $\frac{25}{81}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{1}{4} = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $\frac{25}{81}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{1}{4} = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \frac{25}{81}, b = \frac{5}{9}, c = \frac{1}{4}$$

अतः $D = b^2 - 4ac$ या $D = \left(\frac{5}{9}\right)^2 - 4 \times \frac{25}{81} \times \frac{1}{4}$

या $D = \frac{25}{81} - \frac{25}{81}$ या $D = 0$

अतः दी गई समीकरण के मूल **वास्तविक, परिमेय** तथा **समान** होंगे। **उत्तर**

7. p का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए समीकरण $px^2 + 4x + 1 = 0$ के मूल समान तथा वास्तविक हैं।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $px^2 + 4x + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = p, b = 4, c = 1$$

चूँकि समीकरण के मूल समान एवं वास्तविक हैं।

अतः $b^2 - 4ac = 0$

या $4^2 - 4 \times p \times 1 = 0$ या $16 - 4p = 0$

या $4 - p = 0$

या $4 = p \Rightarrow p = 4$ **उत्तर**

8. समीकरण $kx^2 + (k-1)x + k - 1 = 0$ के मूल बराबर हैं तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $kx^2 + (k-1)x + k - 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = k, b = (k-1), c = (k-1)$$

चूँकि समीकरण के मूल बराबर हैं।

अतः $b^2 - 4ac = 0$

या $(k-1)^2 - 4 \times k \times (k-1) = 0$ या $(k-1) - 4k = 0$

या $k - 1 - 4k = 0$ या $-1 - 3k = 0$

या $-1 = 3k \Rightarrow 3k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$ **उत्तर**

9. समीकरण $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ के मूल बराबर हैं। सिद्ध कीजिए–

$$2b=a+c$$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=(b-c),\ B=(c-a),\ C=(a-b)$$

चूँकि समीकरण के मूल बराबर हैं।

अतः $B^2-4AC=0$

या $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0$

या $c^2+a^2-2ca-4(ab-b^2-ca+bc)=0$

या $c^2+a^2-2ca-4ab+4b^2+4ca-4bc=0$

या $a^2+c^2+4ac-2ac+4b^2-4ab-4bc=0$

या $a^2+c^2+2ac+4b^2-4b(a+c)=0$

या $(a+c)^2+(2b)^2-2\times 2b(a+c)=0$

या $\{(a+c)-2b\}^2=0$

दोनों पक्षों का वर्गमूल करने पर,

या $\{(a+c)-2b\}=0$

या $a+c-2b=0$

या $a+c=2b \quad \Rightarrow \quad 2b=a+c$ **इति सिद्धम्**

10. समीकरण $(c^2-ab)x^2-2(a^2-bc)x+(b^2-ac)=0$ के मूल बराबर हैं। सिद्ध कीजिए– $a=0$ या $a^3+b^3+c^3=3abc$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $(c^2-ab)x^2-2(a^2-bc)x+(b^2-ac)=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=c^2-ab,\ B=-2(a^2-bc),\ C=b^2-ac$$

चूँकि समीकरण के मूल बराबर हैं।

अतः $B^2-4AC=0$

या $\{-2(a^2-bc)\}^2-4(c^2-ab)(b^2-ac)=0$

या $4(a^2-bc)^2-4(b^2c^2-ac^3-ab^3+a^2bc)=0$

या $4(a^4+b^2c^2-2a^2bc)-4(b^2c^2-ac^3-ab^3+a^2bc)=0$

या $(a^4+b^2c^2-2a^2bc)-(b^2c^2-ac^3-ab^3+a^2bc)=0$

या $a^4+b^2c^2-2a^2bc-b^2c^2+ac^3+ab^3-a^2bc=0$

या $a^4+ab^3+ac^3-3a^2bc=0$

या $a(a^3+b^3+c^3-3abc)=0$

या $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

या $a^3+b^3+c^3=3abc$

पुनः $a(a^3+b^3+c^3-3abc)=0$

या $a = \dfrac{0}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$

या $a = 0$ इति सिद्धम

11. k के किस मान के लिए $kx^2 + 4x + 1 = 0$ द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक होंगे?

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $kx^2 + 4x + 1 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = k, b = 4, c = 1$$

समीकरण के मूल वास्तविक होंगे। यदि $b^2 - 4ac \geq 0$

या $4^2 - 4 \times k \times 1 \geq 0$ या $16 - 4k \geq 0$

या $16 \geq 4k$ या $4 \geq k \Rightarrow k \leq 4$ उत्तर

12. p के वे मान ज्ञात कीजिए, जिनके लिए समीकरण $x^2 + 5px + 16 = 0$ के मूल वास्तविक नहीं हैं।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^2 + 5px + 16 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 5p, c = 16$$

समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे, यदि $b^2 - 4ac < 0$

या $(5p)^2 - 4 \times 1 \times 16 < 0$ या $25p^2 - 64 < 0$

या $p^2 - \dfrac{64}{25} < 0$ या $p^2 - \left(\dfrac{8}{5}\right)^2 < 0$

या $\mathbf{-\dfrac{8}{5} < p < \dfrac{8}{5}}$ उत्तर

13. निम्नलिखित समीकरणों में a के वे मान ज्ञात कीजिए, जिन्हें प्रतिस्थापित करने पर द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक होंगे–

(i) $2x^2 + 3x + a = 0$ **(ii)** $ax^2 + 4x + 1 = 0$

(iii) $2x^2 + ax + 3 = 0$ **(iv)** $ax^2 - 6x - 2 = 0$

हल–

(i) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 + 3x + a = 0$ की तुलना $Ax^2 + Bx + C = 0$ से करने पर,

$$A = 2, B = 3, C = a$$

समीकरण के मूल वास्तविक होंगे, यदि $B^2 - 4AC \geq 0$

या $3^2 - 4 \times 2 \times a \geq 0$ या $9 - 8a \geq 0$ या $9 \geq 8a$

या $\dfrac{9}{8} \geq a \Rightarrow \mathbf{a \leq \dfrac{9}{8}}$ उत्तर

(ii) दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2 + 4x + 1 = 0$ की तुलना $Ax^2 + Bx + C = 0$ से करने पर,

$$A = a, B = 4, C = 1$$

समीकरण के मूल वास्तविक होंगे, यदि $B^2 - 4AC \geq 0$

या $4^2 - 4 \times a \times 1 \geq 0$ या $16 - 4a \geq 0$ या $16 \geq 4a$

या $4 \geq a \Rightarrow \mathbf{a \leq 4}$ उत्तर

(iii) दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2+ax+3=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=2, B=a, C=3$$

समीकरण के मूल वास्तविक होंगे, यदि $B^2-4AC\geq 0$

या $a^2-4\times 2\times 3\geq 0$

या $a^2-24\geq 0$

या $a^2-(2\sqrt{6})^2\geq 0$

या $\boldsymbol{a\geq 2\sqrt{6}}$ **उत्तर**

(iv) दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2-6x-2=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=a, B=-6, C=-2$$

समीकरण के वास्तविक मूलों के लिए, $B^2-4AC\geq 0$

या $(-6)^2-4\times a\times(-2)\geq 0$

या $36+8a\geq 0$

या $8a\geq -36$

या $a\geq -\frac{36}{8}\Rightarrow \boldsymbol{a\geq -\frac{9}{2}}$ **उत्तर**

14. यदि द्विघात समीकरण $(1+l^2)x^2+2lax+(a^2-b^2)=0$ के मूल बराबर हैं तो सिद्ध कीजिए–

$$\boldsymbol{a^2=b^2(1+l^2)}$$

हल– दी गई द्विघात समीकरण $(1+l^2)x^2+2lax+(a^2-b^2)=0$ की तुलना $Ax^2+Bx+C=0$ से करने पर,

$$A=1+l^2,\ B=2la,\ C=a^2-b^2$$

चूँकि दी गई समीकरण के मूल बराबर है।

अतः $B^2-4AC=0$

या $(2la)^2-4(1+l^2)(a^2-b^2)=0$

या $4l^2a^2-4(a^2+l^2a^2-l^2b^2-b^2)=0$

या $4l^2a^2-4a^2-4l^2a^2+4l^2b^2+4b^2=0$

या $-4a^2+4l^2b^2+4b^2=0$

या $4a^2=4l^2b^2+4b^2\Rightarrow a^2=l^2b^2+b^2$

$\Rightarrow a^2=b^2(l^2+1)$

$\Rightarrow \boldsymbol{a^2=b^2(1+l^2)}$ **इति सिद्धम्**

अभ्यास 3.6

1. द्विघात समीकरण $3x^2 - 7x - 5 = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 - 7x - 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3,\ b = -7,\ c = -5$$

अतः मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} = \frac{-(-7)}{3} = \frac{7}{3}$

तथा मूलों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \frac{c}{a} = \frac{-5}{3}$ **उत्तर**

2. समीकरण $2x^2 - 3x - 5 = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 3x - 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2,\ b = -3,\ c = -5$$

अतः मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$

तथा मूलों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$ **उत्तर**

3. बिना हल किए समीकरण $2x^2 - 4x - 3 = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 4x - 3 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2,\ b = -4,\ c = -3$$

अतः मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} = -\frac{(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$

तथा मूलों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \frac{c}{a} = \frac{-3}{2}$ **उत्तर**

4. समीकरण $2x = x^2 - 5$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x = x^2 - 5$

या $0 = x^2 - 2x - 5 \quad \Rightarrow x^2 - 2x - 5 = 0$

अतः मूलों का योगफल $= -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = -\frac{(-2)}{1} = 2$

तथा मूलों का गुणनफल $= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-5}{1} = -5$ **उत्तर**

5. समीकरण $ax^2 - 5x + c = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल प्रत्येक 5 के बराबर है। a तथा c के मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2 - 5x + c = 0$

मूलों का योगफल $= \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $5 = \frac{-(-5)}{a}$

या $5 = \frac{5}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{5} = 1$

तथा मूलों का गुणनफल $=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$$5=\frac{c}{a} \Rightarrow c=5a=5\times 1=5$$ उत्तर

6. द्विघात समीकरण $x^2-3x-4=0$ के मूल α व β हैं, तो समीकरण हल किए बिना $(\alpha+\beta)$ और $(\alpha\cdot\beta)$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-3x-4=0$

अतः मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=-\frac{(-3)}{1}=3$

तथा मूलों का गुणनफल $(\alpha\cdot\beta)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=\frac{-4}{1}=-4$ उत्तर

7. यदि द्विघात समीकरण $2x^2+px+4=0$ का एक मूल 2 हो, तो दूसरा मूल और p का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2+px+4=0$ तथा इसका एक मूल $(\alpha)=2$, दूसरा मूल $(\beta)=?$

मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)=\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $$\alpha+\beta=\frac{p}{2} \Rightarrow 2+\beta=\frac{p}{2}$$

या $$4+2\beta=-p \quad \ldots(1)$$

मूलों का गुणनफल $(\alpha\cdot\beta)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$$2\times\beta=\frac{4}{2} \Rightarrow \beta=\frac{4}{4}=1$$

β का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$4+2\times 1=-p \Rightarrow -p=4+2=6$$

$$\Rightarrow p=-6$$ उत्तर

8. यदि समीकरण $(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0$ के मूल बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि : $c^2=a^2(1+m^2)$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0$ तथा मूल $\alpha=\beta$

मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha+\beta=\frac{2mc}{1+m^2}$

या $$\alpha+\alpha=\frac{2mc}{1+m^2} \Rightarrow 2\alpha=\frac{2mc}{1+m^2}$$

या $$\alpha=\frac{mc}{1+m^2} \quad \ldots(1)$$

मूलों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $\alpha \times \alpha = \dfrac{c^2 - a^2}{1+m^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \dfrac{c^2 - a^2}{1+m^2}$

या $\alpha = \sqrt{\dfrac{c^2 - a^2}{1+m^2}}$ ... (2)

समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{mc}{1+m^2} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{1+m^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(\frac{mc}{1+m^2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{c^2 - a^2}{1+m^2}}\right)^2 \quad \text{या} \quad \frac{m^2c^2}{(1+m^2)^2} = \frac{c^2 - a^2}{(1+m^2)}$$

या $\dfrac{m^2c^2}{1+m^2} = c^2 - a^2$

या $m^2c^2 = c^2 - a^2 + m^2c^2 - m^2a^2$

या $c^2 - a^2 = m^2a^2$ या $c^2 = a^2 + m^2a^2$

या $\mathbf{c^2 = a^2(1+m^2)}$ **इति सिद्धम्**

9. यदि समीकरण $3x^2 + px - 6 = 0$ का एक मूल -3 है, तो p का मान तथा समीकरण का दूसरा मूल ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $3x^2 + px - 6 = 0$ तथा इसका एक मूल $(\alpha) = -3$, दूसरा मूल $(\beta) = ?$, $p = ?$

मूलों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $-3 \times \beta = \dfrac{-6}{3} = -2$

या $\beta = \dfrac{-2}{-3} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

तथा मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $-3 + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{p}{3}$

या $\dfrac{-9+2}{3} = -\dfrac{p}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-7}{3} = -\dfrac{p}{3}$

या $7 = p \quad \Rightarrow \quad p = 7$ **उत्तर**

10. द्विघात समीकरण बनाइए जिनके मूल निम्नलिखित हैं–

(i) 3 तथा –4 **(ii) $3+\sqrt{7}$ तथा $3-\sqrt{7}$**

(iii) $\sqrt{3}+1$ तथा $\sqrt{3}-1$ **(iv) $2+\sqrt{3}$ तथा $2-\sqrt{3}$**

(v) $b-2a$ तथा $b+2a$ **(vi) 3 तथा –3**

(vii) -3 तथा $\frac{1}{3}$ **(viii)** -5 तथा $-\frac{1}{5}$

(ix) $-\frac{3}{2}$ तथा $-\frac{1}{2}$ **(x)** $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ तथा $1-\frac{\sqrt{5}}{2}$

हल–

(i) दिए गए मूल $=3$ तथा -4

मूलों का योगफल $=3+(-4)=3-4=-1$

तथा मूलों का गुणनफल $=3\times(-4)=-12$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-(-1)x+(-12)=0$

या $\mathbf{x^2+x-12=0}$ **उत्तर**

(ii) दिए गए मूल $=3+\sqrt{7}$ तथा $3-\sqrt{7}$

मूलों का योगफल $=(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})=3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}=6$

तथा मूलों का गुणनफल $=(3+\sqrt{7})\times(3-\sqrt{7})=9-7=2$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

$\mathbf{x^2-6x+2=0}$ **उत्तर**

(iii) दिए गए मूल $=\sqrt{3}+1$ तथा $\sqrt{3}-1$

मूलों का योगफल $=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}$

तथा मूलों का गुणनफल $=(\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{3}-1)=3-1=2$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $\mathbf{x^2-2\sqrt{3}x+2=0}$ **उत्तर**

(iv) दिए गए मूल $=2+\sqrt{3}$ तथा $2-\sqrt{3}$

मूलों का योगफल $=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$

तथा मूलों का गुणनफल $=(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $\mathbf{x^2-4x+1=0}$ **उत्तर**

(v) दिए गए मूल $=b-2a$ तथा $b+2a$

मूलों का योगफल $=b-2a+b+2a=2b$

तथा मूलों का गुणनफल $=(b-2a)\times(b+2a)=(b^2-4a^2)$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $\mathbf{x^2-2bx+(b^2-4a^2)=0}$ **उत्तर**

(vi) दिए गए मूल $=3$ तथा -3

मूलों का योगफल $=3+(-3)=3-3=0$

तथा मूलों का गुणनफल $=3\times(-3)=-9$

∴ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-0\times x+(-9)=0$

या $\mathbf{x^2-9=0}$ **उत्तर**

(vii) दिए गए मूल $=-3$ तथा $\frac{1}{3}$

मूलों का योगफल $=-3+\frac{1}{3}=\frac{-9+1}{3}=\frac{-8}{3}$

तथा मूलों का गुणनफल $=-3\times\frac{1}{3}=-1$

$\therefore$ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-\left(\frac{-8}{3}\right)x+(-1)=0$ या $x^2+\frac{8}{3}x-1=0$

या $\mathbf{3x^2+8x-3=0}$ **उत्तर**

(viii) दिए गए मूल $=-5$ तथा $-\frac{1}{5}$

मूलों का योगफल $=-5+\left(-\frac{1}{5}\right)=-5-\frac{1}{5}=\frac{-25-1}{5}=\frac{-26}{5}$

तथा मूलों का गुणनफल $=-5\times\left(-\frac{1}{5}\right)=1$

$\therefore$ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-\left(\frac{-26}{5}\right)x+1=0$ या $\mathbf{5x^2+26x+5=0}$ **उत्तर**

(ix) दिए गए मूल $=-\frac{3}{2}$ तथा $-\frac{1}{2}$

मूलों का योगफल $=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{-3-1}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

तथा मूलों का गुणनफल $=-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

$\therefore$ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-(-2)x+\frac{3}{4}=0$ या $x^2+2x+\frac{3}{4}=0$

या $\mathbf{4x^2+8x+3=0}$ **उत्तर**

(x) दिए गए मूल $=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ तथा $1-\frac{\sqrt{5}}{2}$

मूलों का योगफल $=\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1+\frac{\sqrt{5}}{2}+1-\frac{\sqrt{5}}{2}=2$

तथा मूलों का गुणनफल $=\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\times\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}$

$\therefore$ द्विघात समीकरण; x^2- (मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $x^2-2x+\left(-\frac{1}{4}\right)=0$ या $x^2-2x-\frac{1}{4}=0$

या $\mathbf{4x^2-8x-1=0}$ **उत्तर**

11. यदि समीकरण $x^2-3x+k=0$ का एक मूल दूसरे मूल का दो गुना है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-3x+k=0$

प्रश्नानुसार, समीकरण एक मूल 2α हो, तो दूसरा α मूल होगा।

अतः मूलों का योगफल $(2\alpha+\alpha)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $2\alpha+\alpha=-\frac{-3}{1}$

या $3\alpha=3$ या $\alpha=1$

तथा मूलों का गुणनफल $(2\alpha+\alpha)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $2\alpha\times\alpha=\frac{k}{1}$

या $2\alpha^2=k$ या $k=2\alpha^2$

या $k=2\times1^2=2\times1=2$ **उत्तर**

12. यदि समीकरण $2x^2-8x-m=0$ का एक मूल $\frac{5}{2}$ है, तो दूसरा मूल तथा m का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2-8x-m=0$, तथा समीकरण का एक मूल $(\alpha)=\frac{5}{2}$

माना समीकरण का दूसरा मूल $=\beta$

मूलों का योगफल $=(\alpha+\beta)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\frac{5}{2}+\beta=\frac{-8}{2}$

या $\frac{5}{2}+\beta=4$ या $\beta=4-\frac{5}{2}$ या $\beta=\frac{3}{2}$

तथा मूलों का गुणनफल $=(\alpha\beta)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{-m}{2}$

या $\frac{15}{2}=-m$ या $m=-\frac{15}{2}$ **उत्तर**

13. समीकरण $x^2-7x+12=0$ के मूलों के व्युत्क्रमों का योग ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^2-7x+12=0$

माना समीकरण के मूल α व β हैं। तब

मूलों का योगफल $=(\alpha+\beta)=\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $\alpha+\beta=\frac{-7}{1}=7$ ...(1)

तथा मूलों का गुणनफल $=(\alpha\beta)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $\alpha\beta=\frac{12}{1}=12$ ...(2)

अब मूलों के व्युत्क्रमों का योग $= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{12}$ (समी० (1) व (2) से)

उत्तर

14. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α और β हों, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके मूल $\alpha+h$ और $\beta+h$ हैं।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2+bx+c=0$ तथा मूल α व β हैं। तब

मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)=\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad ...(1)$$

तथा मूलों का गुणनफल $(\alpha\beta)=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $$\alpha\beta=\frac{c}{a} \quad ...(2)$$

दिए गए मूल $\alpha+h$ तथ $\beta+h$

मूलों का योगफल $=\alpha+h+\beta+h=\alpha+\beta+2h=-\frac{b}{a}+2h=\left(2h-\frac{b}{a}\right)$

मूलों का गुणनफल $=(\alpha+h)(\beta+h)=\alpha\beta+\alpha h+\beta h+h^2$

$$=\alpha\beta+(\alpha+\beta)h+h^2$$

$$=\frac{c}{a}+\left(-\frac{b}{a}\right)h+h^2=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}h+h^2$$

$\therefore$ द्विघात समीकरण; x^2-(मूलों का योगफल)$x+$ मूलों का गुणनफल $=0$

या $$x^2-\left(2h-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}h+h^2=0$$

या $$x^2-\left(-\frac{b}{a}+2h\right)x+h^2-\frac{b}{a}h+\frac{c}{a}=0$$

या $$x^2+\left(\frac{b}{a}-2h\right)x+h^2-\frac{b}{a}h+\frac{c}{a}=0$$

दोनों पक्षों में a से गुणा करने पर,

$$ax^2+(b-2ah)x+(ah^2-bh+c)=0$$

उत्तर

15. यदि समीकरण $px^2+qx+r=0$ का एक मूल दूसरे मूल का दो गुना हो, तो सिद्ध कीजिए कि– $2q^2=9pr$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $px^2+qx+r=0$

माना समीकरण का दूसरा मूल α है, तो पहला मूल $=$ दूसरा मूल $\times 2=2\alpha$ होगा।

अतः मूलों का योगफल $=2\alpha+\alpha=\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $3\alpha = -\frac{q}{p}$ या $\alpha = -\frac{q}{3p}$ ...(1)

तथा मूलों का गुणनफल $= 2\alpha \times \alpha = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $2\alpha^2 = \frac{r}{p}$ या $2\left(-\frac{q}{3p}\right)^2 = \frac{r}{p}$ [समी० (1) से]

या $2 \times \frac{q^2}{9p^2} = \frac{r}{p}$ या $2q^2 = \frac{9p^2 r}{p}$

या $2q^2 = 9pr$ इति सिद्धम्

16. यदि α और β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हों, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ **(ii)** $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ (iii) $\alpha^3 + \beta^3$

(iv) $\alpha^2 + \beta^2$ **(v)** $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α व β हैं।

अतः मूलों का योगफल $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ...(1)

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a}$ ...(2)

(i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$

या $= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$ या $= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

या $= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}}$ या $= \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}}$

$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{a}{c} = \frac{\boldsymbol{b^2 - 2ac}}{\boldsymbol{ac}}$ **उत्तर**

(ii) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta}$

या $= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)}{\alpha\beta}$

या $= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 3\alpha\beta)}{\alpha\beta}$

या $= \dfrac{(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta\}}{\alpha\beta} = \dfrac{-\dfrac{b}{a}\left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 3\dfrac{c}{a}\right\}}{\dfrac{c}{a}}$

या $= \dfrac{-\dfrac{b}{a}\left\{\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{3c}{a}\right\}}{\dfrac{c}{a}}$ या $= \dfrac{-\dfrac{b}{a}\left\{\dfrac{b^2-3ac}{a^2}\right\}}{\dfrac{c}{a}}$

या $= \dfrac{-\dfrac{b}{a^3}(b^2-3ac)}{\dfrac{c}{a}}$ या $= -\dfrac{ab}{a^3c}(b^2-3ac)$

$= \dfrac{-b^3+3abc}{a^2c}$ **उत्तर**

(iii) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$

या $= (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-3\alpha\beta)$

या $= (\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$

$= -\dfrac{b}{a}\left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 3\dfrac{c}{a}\right\}$ या $= -\dfrac{b}{a}\left\{\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{3c}{a}\right\}$

$= -\dfrac{b}{a}\left\{\dfrac{b^2-3ac}{a^2}\right\}$ या $= \dfrac{-b^3+3abc}{a^3}$ **उत्तर**

(iv) $\alpha^2+\beta^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$= \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 2\times\dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a} = \dfrac{b^2-2ac}{a^2}$ **उत्तर**

(v) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$= \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2-ac}{a^2}$ **उत्तर**

17. यदि α और β द्विघात समीकरण $2x^2-3x+5=0$ के मूल हों, तो $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2-3x+5=0$

मूलों का योगफल $= \alpha+\beta = \dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{-3}{2} = \dfrac{3}{2}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{5}{2}$

अतः $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{5}{2}\times\dfrac{3}{2} = \dfrac{15}{4}$ **उत्तर**

18. वह द्विघात समीकरण बनाइए, जिसके मूल $p-2q$ व $p+2q$ हैं।

हल– दिए गए मूल $= p-2q$ तथा $p+2q$

मूलों का योगफल $= p-2q+p+2q = 2p$

तथा मूलों का गुणनफल $= (p-2q)(p+2q) = p^2-4q^2$

अत: द्विघात समीकरण; $x^2 -$ (मूलों का योगफल)$x +$ मूलों का गुणनफल $= 0$

या $x^2 - 2px + (p^2 - 4q^2) = 0$ **उत्तर**

19. यदि समीकरण $3kx^2 - 25kx + k + 8 = 0$ के मूलों का गुणनफल 1 हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $3kx^2 - 25kx + k + 8 = 0$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

या $1 = \dfrac{k+8}{3k}$ या $3k = k+8$ या $3k - k = 8$

या $k = 4$ **उत्तर**

20. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α व β हैं, तो $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α व β हैं।

$$\text{मूलों का योगफल} = \alpha + \beta = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \quad \text{या} \quad (\alpha+\beta) = -\frac{b}{a}$$

$$\text{तथा मूलों का गुणनफल} = \alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \quad \text{या} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

अत:
$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$ **उत्तर**

21. यदि समीकरण $lx^2 + nx + n = 0$ के मूल $p : q$ के अनुपात में हैं, तो सिद्ध कीजिए–

$$\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = 0$$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $lx^2+nx+n=0$ तथा मूल $p:q$ के अनुपात में है।

अतः मूलों का योगफल $=p+q=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{n}{l}$

तथा मूलों का गुणनफल $=pq=\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=\dfrac{n}{l}$

$$\text{L.H.S.} \quad =\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=\frac{p+q}{\sqrt{pq}}+\sqrt{\frac{n}{l}}$$

$$=-\frac{n/l}{\sqrt{n/l}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=-\sqrt{\frac{n}{l}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0=\text{R.H.S.}$$

22. यदि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल दूसरे मूल का दो गुना हो तो सिद्ध कीजिए—

$$2b^2=9ac$$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2+bx+c=0$

माना समीकरण का एक मूल 2α तब दूसरा मूल α होगा।

अतः मूलों का योगफल $=2\alpha+\alpha=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $3\alpha=-\dfrac{b}{a}$

या $$\alpha=-\frac{b}{3a} \qquad \ldots(1)$$

तथा मूलों का गुणनफल $=2\alpha\times\alpha=\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $2\alpha^2=\dfrac{c}{a}$

या $$2\left(-\frac{b}{3a}\right)^2=\frac{c}{a} \qquad \text{(समी० (1) से)}$$

या $$2\times\frac{b^2}{9a^2}=\frac{c}{a} \quad \text{या} \quad 2b^2=\frac{9a^2c}{a}$$

या $$2b^2=9ac \qquad \textbf{इति सिद्धम्}$$

23. यदि समीकरण $ax^2-bx+b=0$ के मूल α व β हैं, तो सिद्ध कीजिए–

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{b}{a}}=0$$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2-bx+b=0$ तथा इसके मूल α व β हैं।

मूलों का योगफल $=\alpha+\beta=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $$(\alpha+\beta)=-\frac{-b}{a} \quad \text{या} \quad (\alpha+\beta)=\frac{b}{a}$$

तथा मूलों का गुणनफल $=\alpha\beta=\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha\beta=\dfrac{b}{a}$

$$\text{L.H.S} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{b/a}{\sqrt{b/a}} - \sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$= \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = 0 = \text{R.H.S}$$

24. यदि समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ के मूल α व β हैं, तो व्यंजक $(\alpha^2\beta + \beta^2\alpha)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2x^2 - 3x + 1 = 0$ तथा मूल α व β हैं।

अत: मूलों का योगफल $= \alpha + \beta = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

या $\alpha + \beta = \frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

अब, $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ **उत्तर**

25. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α व β हैं, तो व्यंजक $(\alpha^3 + \beta^3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ तथा मूल α व β हैं।

अत: मूलों का योगफल $= \alpha + \beta = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

अब, $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 3\alpha\beta)$
$= (\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta\} = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$= \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2}$
$= \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{b(3ac - b^2)}{a^3}$ **उत्तर**

26. यदि समीकरण $cx^2 + bx + a = 0$ के मूल α व β हैं, तो व्यंजक $(\alpha^3 - \beta^3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $cx^2 + bx + a = 0$ तथा मूल α व β हैं।

अत: मूलों का योगफल $= \alpha + \beta = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha + \beta = -\frac{b}{c}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ या $\alpha\beta = \frac{a}{c}$

अब, $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}\times(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-\alpha\beta)$

$=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)}\times\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}$

$=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta)}\times\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}$

$=\sqrt{\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}\times\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}$

$=\sqrt{\left\{\left(-\frac{b}{c}\right)^2-4\frac{a}{c}\right\}}\times\left\{\left(-\frac{b}{c}\right)^2-\frac{a}{c}\right\}$

$=\sqrt{\left(\frac{b^2}{c^2}-\frac{4a}{c}\right)}\times\left(\frac{b^2}{c^2}-\frac{a}{c}\right)=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{c^2}}\times\left(\frac{b^2-ac}{c^2}\right)$

$=\frac{1}{c^3}(b^2-ac)\sqrt{(b^2-4ac)}$ **उत्तर**

27. यदि समीकरण $(l^2-3)x^2+3lx+3l+1=0$ के मूल आपस में व्युत्क्रम हों, तो l का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $(l^2-3)x^2+3lx+3l+1=0$

माना इस समीकरण का एक मूल α है, तो दूसरा मूल $\frac{1}{\alpha}$ होगा।

मूलों का गुणनफल $=\alpha\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\text{अचर पद}}{x^2\text{ का गुणांक}}$

या $1=\frac{3l+1}{l^2-3}$ या $l^2-3=3l+1$

या $l^2-3l-3-1=0$ या $l^2-3l-4=0$

या $l^2-4l+l-4=0$ या $l(l-4)+1(l-4)=0$

या $(l-4)(l+1)=0$

यदि $l-4=0$ तो $l=4$ तथा यदि $l+1=0$ तो $l=-1$ अतः $l=-1$ या 4 **उत्तर**

अभ्यास 3.7

निम्नलिखित समीकरणों को द्विघात समीकरण में परिवर्तित करके हल कीजिए–

1. $z^4-10z^2+9=0$

हल– दी गई समीकरण $z^4-10z^2+9=0$

या $(z^2)^2-10z^2+9=0$ [$z^2=x$ रखने पर]

या $x^2-10x+9=0$

या $x^2-9x-x+9=0$ या $x(x-9)-1(x-9)=0$

या $(x-9)(x-1)=0$ [$x=z^2$ रखने पर]

या $(z^2-9)(z^2-1)=0$

अब, यदि $z^2-9=0\Rightarrow z^2=9\Rightarrow z=\pm\sqrt{9}\Rightarrow\pm3$

तथा यदि $z^2-1=0 \Rightarrow z^2=1 \Rightarrow z=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \pm 1$

अतः $z=\pm 3, \pm 1$ **उत्तर**

2. $x^4-26x^2+25=0$

हल– दी गई समीकरण, $x^4-26x^2+25=0$

या $(x^2)^2-26x^2+25=0$

या $y^2-26y+25=0$ [$x^2=y$ रखने पर]

या $y^2-25y-y+25=0$ या $y(y-25)-1(y-25)=0$

या $(y-25)(y-1)=0$

या $(x^2-25)(x^2-1)=0$ [$y=x^2$ रखने पर]

अब, यदि $x^2-25=0$ तो $x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$ तथा यदि $x^2-1=0$ तो $x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

अतः $x=\pm 1, \pm 5$ **उत्तर**

3. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8=0$

हल– दी गई समीकरण, $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8=0$

या $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-8=0$

या $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8=0$

या $(y+4)(y+6)-8=0$ ($x^2+5x=y$ रखने पर)

या $y^2+10y+24-8=0$ या $y^2+10y+16=0$

या $(y+8)(y+2)=0$

यदि $y+8=0$ तो $x^2+5x+8=0$ यहाँ $a=1, b=5, c=8$

$D=b^2-4ac=5^2-4\times 1\times 8=25-32=-7$

या $D<0$ अतः समीकरण के मूल **वास्तविक नहीं** हैं।

यदि $y+2=0$ तो $x^2+5x+2=0$ ($y=x^2+5x$ रखने पर)

यहाँ $a=1, b=5, c=2$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 1\times 2}}{2\times 1}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{25-8}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$ **उत्तर**

4. $2x+\frac{4}{x}=9$

हल– दी गई समीकरण, $2x+\frac{4}{x}=9$

या $2x^2+4=9x$ या $2x^2-9x+4=0$

या $2x^2-x-8x+4=0$ या $x(2x-1)-4(2x-1)=0$

या $(2x-1)(x-4)=0$

अब, यदि $2x-1=0$ तो $x=1/2$

तथा यदि $x-4=0$ तो $x=4$ **उत्तर**

5. $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3x}=0$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3x}=0$

या $\sqrt{x^2+2}=-\sqrt{3x}$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$x^2+2=3x$

या $x^2-3x+2=0$ या $(x-1)(x-2)=0$

अब, यदि $x-1=0$ तो $x=1$

तथा यदि $x-2=0$ तो $x=2$

अतः $x=\mathbf{1, 2}$ **उत्तर**

6. $(x^2+3x+2)^2-8(x^2+3x)-4=0$

हल– दी गई समीकरण, $(x^2+3x+2)^2-8(x^2+3x)-4=0$

या $(y+2)^2-8y-4=0$ ($x^2+3x=y$ रखने पर)

या $y^2+4y+4-8y-4=0$ या $y^2-4y=0$ या $y(y-4)=0$

अतः $y=0$ तथा $y-4=0$ या $y=4$

या $x^2+3x=0$ तथा $x^2+3x-4=0$ ($y=x^2+3x$ रखने पर)

या $x(x+3)=0$ तथा $x^2+4x-x-4=0$

अब $x=0$ या $x+3=0$ तथा $x(x+4)-1(x+4)=0$

या $x=-3$ तथा $(x+4)(x-1)=0$

यदि $x+4=0$ तो $x=-4$

यदि $x-1=0$ तो $x=1$

अतः $x=\mathbf{(0, -3, 1, -4)}$ **उत्तर**

7. $x-2-\sqrt{2x-5}=0$

हल– दी गई समीकरण, $x-2-\sqrt{2x-5}=0$

या $(x-2)=\sqrt{2x-5}$

या $(x-2)^2=(2x-5)$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $x^2-4x+4=2x-5$ या $x^2-4x-2x+4+5=0$

या $x^2-6x+9=0$

या $(x-3)^2=0$ या $(x-3)=0$ या $x=3$ **उत्तर**

8. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=2\dfrac{1}{2}$

हल– दी गई समीकरण, $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=2\dfrac{1}{2}$

या $\dfrac{(x-2)^2+(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{5}{2}$ या $\dfrac{x^2+4-4x+x^2+4+4x}{x^2-4}=\dfrac{5}{2}$

या $\dfrac{2x^2+8}{x^2-4}=\dfrac{5}{2}$ या $4x^2+16=5x^2-20$

या $5x^2-4x^2-20-16=0$ या $x^2-36=0$

या $x^2=36 \Rightarrow x=\pm\sqrt{36} \Rightarrow x=\pm 6$ **उत्तर**

9. $6\left(\frac{2x+5}{x+1}\right)-4\left(\frac{x+1}{2x+5}\right)=5$

हल– दी गई समीकरण, $6\left(\frac{2x+5}{x+1}\right)-4\left(\frac{x+1}{2x+5}\right)=5$

या $6y-4\frac{1}{y}=5$ $\left(\frac{2x+5}{x+1}=y \text{ रखने पर}\right)$

या $6y^2-4=5y$ या $6y^2-5y-4=0$

या $6y^2-8y+3y-4=0$ या $2y(3y-4)+1(3y-4)=0$

या $(3y-4)(2y+1)=0$

अब, यदि $3y-4=0$ तो $3\times\frac{2x+5}{x+1}-4=0$ $\left(y=\frac{2x+5}{x+1} \text{ रखने पर}\right)$

या $6x+15-4x-4=0$ या $2x+11=0$ या $x=\frac{11}{2}$

तथा यदि $2y+1=0$ तो $2\times\frac{2x+5}{x+1}+1=0$ $\left(y=\frac{2x+5}{x+1} \text{ रखने पर}\right)$

या $4x+10+x+1=0$ या $5x+11=0$ या $x=-\frac{11}{5}$

अत: $x=-\frac{11}{2},-\frac{11}{5}$ **उत्तर**

10. $\sqrt{2x^2-2x+21}=2x-3$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{2x^2-2x+21}=2x-3$

या $2x^2-2x+21=(2x-3)^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $2x^2-2x+21=4x^2-12x+9$ या $4x^2-2x^2-12x+2x+9-21=0$

या $2x^2-10x-12=0$ या $x^2-5x-6=0$

या $x^2-6x+x-6=0$ या $x(x-6)+1(x-6)=0$

या $(x-6)(x+1)=0$

अब, यदि $x-6=0$ तो $x=6$ या $x+1=0$ तो $x=-1$ **उत्तर**

11. $\sqrt{2x+9}=13-x$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{2x+9}=13-x$

या $2x+9=(13-x)^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $2x+9=169+x^2-26x$ या $x^2-26x-2x+169-9=0$

या $x^2-28x+160=0$ या $x^2-20x-8x+160=0$

या $x(x-20)-8(x-20)=0$ या $(x-20)(x-8)=0$

यदि $x-20=0$ तो $x=20$ तथा यदि $x-8=0$ तो $x=8$ **उत्तर**

12. $\sqrt{217-x}=x-7$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{217-x}=x-7$

या $217-x=(x-7)^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $217-x=x^2-14x+49$ या $x^2-14x+x+49-217=0$

या $x^2-13x-168=0$ या $x^2-(21-8)x-168=0$

या $x^2-21x+8x-168=0$ या $x(x-21)+8(x-21)=0$

या $(x-21)(x+8)=0$

यदि $x-21=0$ तो $x=\mathbf{21}$ तथा यदि $x+8=0$ तो $x=\mathbf{-8}$ **उत्तर**

13. $\sqrt{3x^2+x+5}=x-3$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{3x^2+x+5}=x-3$

या $3x^2+x+5=(x-3)^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $3x^2+x+5=x^2+9-6x$ या $3x^2-x^2+x+6x+5-9=0$

या $2x^2+7x-4=0$ या $2x^2+8x-x-4=0$

या $2x(x+4)-1(x+4)=0$ या $(x+4)(2x-1)=0$

यदि $x+4=0$ तो $x=\mathbf{-4}$ तथा $2x-1=0$ तो $x=\mathbf{\frac{1}{2}}$ **उत्तर**

14. $\sqrt{3x+10}+\sqrt{6-x}=6$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{3x+10}+\sqrt{6-x}=6$

या $\sqrt{3x+10}=6-\sqrt{6-x}$

या $(\sqrt{3x+10})^2=(6-\sqrt{6-x})^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $3x+10=36+(6-x)-12\sqrt{6-x}$

या $3x+10=36+6-x-12\sqrt{6-x}$

या $3x+x+10-36-6=-12\sqrt{6-x}$ या $4x-32=-12\sqrt{6-x}$

या $x-8=-3\sqrt{6-x}$

$(x-8)^2=(-3\sqrt{6-x})^2$ (पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $x^2+64-16x=9(6-x)$ या $x^2-16x+64=54-9x$

या $x^2-16x+9x+64-54=0$ या $x^2-7x+10=0$

या $x^2-2x-5x+10=0$ या $x(x-2)-5(x-2)=0$

या $(x-2)(x-5)=0$

अब, यदि $x-2=0$ तो $x=\mathbf{2}$ तथा यदि $x-5=0$ तो $x=\mathbf{5}$ **उत्तर**

15. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+9}=5$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+9}=5$

या $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{4-x}$

या $(\sqrt{x+9})^2=(5-\sqrt{4-x})^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $x+9=25+(4-x)-10\sqrt{4-x}$ या $x+9=25+4-x-10\sqrt{4-x}$

या $x+x+9-25-4=-10\sqrt{4-x}$ या $2x-20=-10\sqrt{4-x}$

या $x-10=-5\sqrt{4-x}$ (दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर)

या $(x-10)^2=[-5\sqrt{4-x}]^2$ (पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $x^2+100-20x=25(4-x)$ या $x^2+100-20x=100-25x$

या $x^2+100-100-20x+25x=0$ या $x^2+5x=0$ या $x(x+5)=0$

अतः $x=0$ या $x+5=0$ तो $x=-5$

अतः $x=\mathbf{0,-5}$ **उत्तर**

16. $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=3$

हल– दी गई समीकरण, $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=3$

या $\sqrt{2x+9}=3+\sqrt{x-4}$

$(\sqrt{2x+9})^2=(3+\sqrt{x-4})^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $(2x+9)=9+(x-4)+6\sqrt{x-4}$

या $2x+9=9+x-4+6\sqrt{x-4}$

या $2x-x+9-9+4=6\sqrt{x-4}$

या $x+4=6\sqrt{x-4}$ पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$(x+4)^2=(6\sqrt{x-4})^2$

या $x^2+16+8x=36(x-4)$ या $x^2+16+8x-36(x-4)=0$

या $x^2+16+8x-36x+144=0$ या $x^2-28x+160=0$

या $x^2-20x-8x+160=0$ वा $x(x-20)-8(x-20)=0$

या $(x-20)(x-8)=0$

यदि $x-20=0$ तो $x=\mathbf{20}$ यदि $x-8=0$ तो $x=\mathbf{8}$ **उत्तर**

17. $\mathbf{6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0}$

हल– दी गई समीकरण, $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$ ...(1)

माना $x+\frac{1}{x}=y$ ...(2)

या $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$ या $x^2+\frac{1}{x^2}+2=y^2$

या $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$6(y^2-2)-35y+62=0$ या $6y^2-12-35y+62=0$

या $6y^2-35y+50=0$ या $6y^2-20y-15y+50=0$

या $2y(3y-10)-5(3y-10)=0$ या $(3y-10)(2y-5)=0$

अब, यदि $3y-10=0$ तो $y=\frac{10}{3}$ तथा यदि $2y-5=0$ तो $y=\frac{5}{2}$

या $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ तथा $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$

या $x^2+1=\frac{10x}{3}$ तथा $x^2+1=\frac{5x}{2}$

या $3x^2+3=10x$ तथा $2x^2+2=5x$

या $3x^2-10x+3=0$ तथा $2x^2-5x+2=0$

या $3x^2-9x-x+3=0$ तथा $2x^2-4x-x+2=0$

या $3x(x-3)-1(x-3)=0$ तथा $2x(x-2)-1(x-2)=0$

या $(x-3)(3x-1)=0$ तथा $(x-2)(2x-1)=0$

अतः $x=3,\frac{1}{3}$ अतः $x=2,\frac{1}{2}$

अतः $x=\mathbf{2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}}$ **उत्तर**

18. $\mathbf{3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0}$

हल– दी गई समीकरण, $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$ ...(1)

माना $x+\frac{1}{x}=y$ ...(2)

या $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

या $x^2+\frac{1}{x^2}+2=y^2$ या $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$3(y^2-2)-16y+26=0$

या $3y^2-6-16y+26=0$ या $3y^2-16y+20=0$

या $3y^2-10y-6y+20=0$ या $y(3y-10)-2(3y-10)=0$

या $(3y-10)(y-2)=0$

यदि $3y-10=0$ तो $y=\frac{10}{3}$

या $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$

या $3x^2+3=10x$

या $3x^2-10x+3=0$

या $3x^2-9x-x+3=0$

या $3x(x-3)-1(x-3)=0$

या $(x-3)(3x-1)=0$

अतः $x=3$ या $x=\frac{1}{3}$

तथा यदि $y-2=0$ तो $y=2$

तथा $x+\frac{1}{x}=2$

तथा $x^2+1=2x$

तथा $x^2-2x+1=0$

तथा $(x-1)^2=0$

तथा $x-1=0$

तथा $x=1$

अतः $x=\mathbf{1, \frac{1}{3}, 3}$ **उत्तर**

19. $\mathbf{8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-42\left(x-\frac{1}{x}\right)+29=0}$

हल– दी गई समीकरण, $8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-42\left(x-\frac{1}{x}\right)+29=0$ ...(1)

माना $x-\frac{1}{x}=y$ ...(2)

या $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=y^2$ या $x^2+\frac{1}{x^2}-2=y^2$

या $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$8(y^2+2)-42y+29=0$

या $8y^2+16-42y+29=0$

या $8y^2-42y+45=0$

या $8y^2-30y-12y+45=0$

या $2y(4y-15)-3(4y-15)=0$

या $(4y-15)(2y-3)=0$

अब, यदि $4y-15=0$

तो $4\left(x-\frac{1}{x}\right)-15=0$

या $4x^2-4-15x=0$

या $4x^2-16x+x-4=0$

या $4x(x-4)+1(x-4)=0$

या $(x-4)(4x+1)=0$

अतः $x=4, -\frac{1}{4}$

तथा $2y-3=0$

तो $2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0$

तथा $2x^2-2-3x=0$

तथा $2x^2-4x+x-2=0$

तथा $2x(x-2)+1(x-2)=0$

तथा $(x-2)(2x+1)=0$

तथा $x=2, -\frac{1}{2}$

अतः $x=\mathbf{4, -\frac{1}{4}, 2, -\frac{1}{2}}$ **उत्तर**

20. $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x-\frac{1}{x}\right)+12=0$

हल– दी गई समीकरण, $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x-\frac{1}{x}\right)+12=0$ ...(1)

माना $x-\frac{1}{x}=y$ ...(2)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=y^2$$

$\Rightarrow \quad x^2+\frac{1}{x^2}-2=y^2$

या $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$6(y^2+2)-25y+12=0$

या $6y^2+12-25y+12=0$ या $6y^2-25y+24=0$

या $6y^2-16y-9y+24=0$ या $2y(3y-8)-3(3y-8)=0$

या $(3y-8)(2y-3)=0$

अब, यदि $3y-8=0$ तथा यदि $2y-3=0$

तो $3\left(x-\frac{1}{x}\right)-8=0$ तो $2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0$

या $3x-\frac{3}{x}-8=0$ तथा $2x-\frac{2}{x}-3=0$

या $3x^2-3-8x=0$ तथा $2x^2-2-3x=0$

या $3x^2-9x+x-3=0$ तथा $2x^2-4x+x-2=0$

या $3x(x-3)+1(x-3)=0$ तथा $2x(x-2)+1(x-2)=0$

या $(x-3)(3x+1)=0$ तथा $(x-2)(2x+1)=0$

अब, यदि $x-3=0\Rightarrow x=3$ अब, यदि $x-2=0\Rightarrow x=2$

तथा $3x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ तथा $2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

अतः $x=3,-\frac{1}{3},2,-\frac{1}{2}$ **उत्तर**

21. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-17=0$

हल– दी गई समीकरण,

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-17=0 \quad ...(1)$$

माना $x-\frac{1}{x}=y$ ...(2)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=y^2 \quad \text{या} \quad x^2+\frac{1}{x^2}-2=y^2$$

या $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ ...(3)

अब समीकरण (2) व (3) के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$(y^2+2)-2y-17=0$ या $y^2+2-2y-17=0$

या $y^2-2y-15=0$ या $y^2-5y+3y-15=0$

या $y(y-5)+3(y-5)=0$ या $(y-5)(y+3)=0$

अब यदि $y-5=0$ तो $x-\frac{1}{x}-5=0$

या $x^2-1-5x=0$ या $x^2-5x-1=0$

यहाँ $a=1, b=-5, c=-1$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-(-5)\pm\sqrt{25+4}}{2}=\frac{(5)\pm\sqrt{29}}{2}$$

तथा यदि $y+3=0$ तब $x-\frac{1}{x}+3=0$

या $x^2+3x-1=0$

यहाँ $a=1, b=3, c=-1$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

अतः $x=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}, \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ **उत्तर**

22. $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{13}{6}$ $x\neq0, x\neq1$

हल– दी गई समीकरण,

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{13}{6} \qquad ...(1)$$

माना $\frac{x}{1-x}=y \Rightarrow \frac{1-x}{x}=\frac{1}{y}$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$\sqrt{y}+\sqrt{\frac{1}{y}}=\frac{13}{6}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\left(\sqrt{y}+\sqrt{\frac{1}{y}}\right)^2=\left(\frac{13}{6}\right)^2 \quad \text{या} \quad y+\frac{1}{y}+2=\frac{169}{36}$$

या $y^2+1+2y=\frac{169y}{36}$ या $36y^2+36+72y=169y$

या $36y^2+72y-169y+36=0$ या $36y^2-97y+36=0$

या $36y^2-81y-16y+36=0$

या $9y(4y-9)-4(4y-9)=0$

या $(4y-9)(9y-4)=0$

अब, यदि $4y-9=0$ तो $y=\frac{9}{4}$

या $\frac{x}{1-x}=\frac{9}{4}$ या $4x=9-9x$

या $4x+9x=9$ या $13x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{13}$

तथा यदि $9y-4=0$ या $y=\frac{4}{9}$

या $\frac{x}{1-x}=\frac{4}{9}$ या $9x=4-4x$

या $9x+4x=4$ या $13x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{13}$

अतः $x=\frac{9}{13}, \frac{4}{13}$ **उत्तर**

23. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x+1}\right)+6=0,\ x\neq 1$

हल– दी गई समीकरण,

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x+1}\right)+6=0 \qquad ...(1)$$

माना $\frac{x}{x+1}=y$ समीकरण (1) में रखने पर,

$y^2-5y+6=0$ या $y^2-3y-2y+6=0$

या $y(y-3)-2(y-3)=0$ या $(y-3)(y-2)=0$

अब, यदि $y-3=0$ या $y=3$

या $\frac{x}{x+1}=3$ या $x=3x+3$

या $x-3x=3$ या $-2x=3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

तथा यदि $y-2=0 \Rightarrow y=2$ या $\frac{x}{x+1}=2$

या $x=2x+2$

या $x-2x=2 \Rightarrow -x=2 \Rightarrow x=-2$

अतः $x=\frac{3}{2}, -2$ **उत्तर**

24. $\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2+3-4\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=0, \ (x \neq -2)$

हल– दी गई समीकरण $\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2+3-4\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ में $\frac{x-2}{x+2}=y$ रखने पर,

$y^2+3-4y=0$ या $y^2-3y-y+3=0$

$y(y-3)-1(y-3)=0$ या $(y-3)(y-1)=0$

अब, यदि $y-3=0$ या $y=3$

या $\frac{x-2}{x+2}=3$ या $x-2=3x+6$

या $x-3x=6+2$ या $-2x=8 \Rightarrow x=-4$

तथा यदि $y-1=0 \Rightarrow y=1$ या $\frac{x-2}{x+2}=1$ जो कि असान्य है।

अतः $x=-4$ **उत्तर**

25. $9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-27\left(x+\frac{1}{x}\right)=10$

हल– दी गई समीकरण $9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-27\left(x+\frac{1}{x}\right)=10$ में $x+\frac{1}{x}=y$ रखने पर,

$9y^2-27y-10=0$ या $9y^2-30y+3y-10=0$

$3y(3y-10)+1(3y-10)=0$

या $(3y-10)(3y+1)=0$

अब, यदि $3y-10=0$ या $3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$

या $3x^2+3-10x=0$ या $3x^2-9x-x+3=0$

या $3x(x-3)-1(x-3)=0$ या $(x-3)(3x-1)=0$

अतः $x=3, \frac{1}{3}$

तथा यदि $3y+1=0 \Rightarrow 3\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$

या $3x^2+3+x=0$ या $3x^2+x+3=0$

यहाँ $a=3, b=1, c=3$

अतः $D=b^2-4ac=1^2-4\times 3\times 3=1-36=-35$

$D<0$ अतः समीकरण के मूल अवास्तविक होंगे।

अतः $x=3, \frac{1}{3}$ **उत्तर**

26. $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4-13\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+36=0$

हल– दी गई समीकरण, $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4-13\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+36=0$ में $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2=y$ रखने पर

$y^2-13y+36=0$ या $y^2-9y-4y+36=0$

या $y(y-9)-4(y-9)=0$ या $(y-9)(y-4)=0$

अब यदि $y-9=0$ या $y=9$

या $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2=9 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}=\pm\sqrt{9}$ या $\frac{x-1}{x+1}=\pm 3$

या $\frac{x-1}{x+1}=+3$ तथा $\frac{x-1}{x+1}=-3$

या $x-1=3x+3$ तथा $x-1=-3x-3$

या $x-3x=3+1$ तथा $x+3x=1-3$

या $-2x=4$ तथा $4x=-2$

या $x=-2$ तथा $x=-\frac{1}{2}$

तथा यदि $y-4=0 \Rightarrow y=4$

$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2=4 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\pm\sqrt{4}$ या $\frac{x-1}{x+1}=\pm 2$

या $\frac{x-1}{x+1}=2$ तथा $\frac{x-1}{x+1}=-2$

या $x-1=-2x-2$

या $x-2x=2+1$ तथा $x-1=-2x-2$

तथा $x+2x=-2+1$

या $-x=3$ तथा $3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

या $x=-3$

अतः $x=-2, -\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$ **उत्तर**

27. $2^{x+3}+2^{-x}=6$

हल– दी गई समीकरण, $2^{x+3}+2^{-x}=6$

या $2^x \times 2^3+\frac{1}{2^x}=6 \Rightarrow 8\times 2^x+\frac{1}{2^x}=6$

$2^x=y$ रखने पर,

$8y+\frac{1}{y}=6$ या $8y^2+1=6y$

या $8y^2-6y+1=0$ या $8y^2-4y-2y+1=0$

या $4y(2y-1)-1(2y-1)=0$

या $(2y-1)(4y-1)=0$

अब, यदि $2y-1=0$ या $2y=1$

या $2\times 2^x=1$ या $2^{x+1}=2^0$

दोनों पक्षों में घातों की तुलना करने पर,

$x+1=0$ या $x=-1$

तथा यदि $4y-1=0$ या $4\cdot 2^x=1$

या $2^2\cdot 2^x=1$ या $2^{2+x}=2^0$

दोनों पक्षों में घातों की तुलना करने पर,

$2+x=0 \Rightarrow x=-2$

अतः $x=-1,-2$ **उत्तर**

28. $y^{2/3}-2y^{1/3}=15$

हल– दी गई समीकरण, $y^{2/3}-2y^{1/3}=15$ में, $y^{1/3}=x$ रखने पर,

$x^2-2x=15$ या $x^2-2x-15=0$

या $x^2-5x+3x-15=0$ या $x(x-5)+3(x-5)=0$

या $(x-5)(x+3)=0$

अब, यदि $x-5=0$

या $x=5$ या $y^{1/3}=5$

या $y=5^3=125$

तथा यदि $x+3=0$ या $x=-3$

या $y^{1/3}=-3$ या $y=(-3)^3=-27$

अतः $y=125,-27$ **उत्तर**

29. $6x^{1/4}-x^{1/2}=9$

हल– दी गई समीकरण, $6x^{1/4}-x^{1/2}=9$ में $x^{1/4}=y$ रखने पर,

$6y-y^2=9$ या $y^2-6y+9=0$

या $(y-3)^2=0$ या $y-3=0$

या $y=3$ या $x^{1/4}=3$

या $(x^{1/4})^4=3^4$ या $x=81$ **उत्तर**

30. $2^{2x+3} = 65(2^x - 1) + 57$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $2^{2x+3} = 65(2^x - 1) + 57$

या $2^{2x} \cdot 2^3 = 65 \times 2^x - 65 + 57$

या $8 \times (2^x)^2 = 65 \times 2^x - 8$

$2^x = y$ रखने पर,

$8y^2 = 65y - 8$ या $8y^2 - 65y + 8 = 0$

या $8y^2 - 64y - y + 8 = 0$ या $8y(y-8) - 1(y-8) = 0$

या $(y-8)(8y-1) = 0$

अब, यदि $y - 8 = 0$ तो $y = 8$

या $2^x = 2^3$ या $x = 3$

तथा यदि $8y - 1 = 0$ तो $y = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

या $2^x = 2^{-3}$ या $x = -3$

अतः $x = 3, -3$ **उत्तर**

31. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

हल– दी गई द्विघात समीकरण, $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

या $x^3 - 2x^2 + 5x^2 - 10x + 6x - 12 = 0$

या $x^2(x-2) + 5x(x-2) + 6(x-2) = 0$

या $(x-2)(x^2 + 5x + 6) = 0$

या $(x-2)\{x^2 + 3x + 2x + 6\} = 0$

या $(x-2)\{x(x+3) + 2(x+3)\} = 0$

या $(x-2)\{(x+3)(x+2)\} = 0$

या $(x-2)(x+3)(x+2) = 0$

अब, यदि $x - 2 = 0$ तो $x = 2$

यदि $x + 3 = 0$ तो $x = -3$

तथा यदि $x + 2 = 0$ तो $x = -2$

अतः $x = -2, -3, 2$ **उत्तर**

32. $(x^2 + 12x)^2 + 35(x^2 + 12x) + 150 = 0$

हल– दी गई समीकरण,

$(x^2 + 12x)^2 + 35(x^2 + 12x) + 150 = 0$ में $x^2 + 12x = y$ रखने पर,

$y^2 + 35y + 150 = 0$ या $y^2 + 30y + 5y + 150 = 0$

या $y(y+30) + 5(y+30) = 0$ या $(y+30)(y+5) = 0$

अब, यदि $y + 30 = 0$

तो $x^2 + 12x + 30 = 0$

यहाँ $a = 1, b = 12, c = 30$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times1\times30}}{2\times1}$$
$$=\frac{-12\pm\sqrt{144-120}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{24}}{2}$$
$$=\frac{-12\pm2\sqrt{6}}{2}=-6\pm\sqrt{6}$$

तथा यदि $y+5=0$ तो $x^2+12x+5=0$

यहाँ $a=1, b=12, c=5$

अतः श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times1\times5}}{2\times1}$$
$$=\frac{-12\pm\sqrt{144-20}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{124}}{2}$$
$$=\frac{-12\pm2\sqrt{31}}{2}=-6\pm\sqrt{31}$$

अतः $x=-6\pm\sqrt{6},\ -6\pm\sqrt{31}$ **उत्तर**

33. $(25)^x-6(5)^x+5=0$

हल– दी गई समीकरण,

$$(25)^x-6(5)^x+5=0$$

या $(5)^{2x}-6(5)^x+5=0$ में $5^x=y$ रखने पर,

$$y^2-6y+5=0 \quad \text{या} \quad y^2-5y-y+5=0$$

या $y(y-5)-1(y-5)=0$ या $(y-5)(y-1)=0$

अब, यदि $(y-5)=0$ तो $y=5$

या $5^x=5^1 \Rightarrow x=1$

तथा यदि $y-1=0$ तो $y=1$

या $5^x=1$ या $5^x=5^0 \Rightarrow x=0$

अतः $x=0, 1$ **उत्तर**

34. $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$

हल– दी गई समीकरण, $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$

या $\frac{x+5-(x-3)}{(x-3)(x+5)}=\frac{1}{6}$

या $\frac{x+5-x+3}{x^2+5x-3x-15}=\frac{1}{6}$ या $\frac{8}{x^2+2x-15}=\frac{1}{6}$

या $x^2+2x-15=48$ या $x^2+2x-15-48=0$

या $x^2+2x-63=0$ या $x^2+9x-7x-63=0$

या $x(x+9)-7(x+9)=0$ या $(x+9)(x-7)=0$

अब, यदि $x+9=0$ तो $x=-9$

तथा यदि $x-7=0$ तो $x=7$

अतः $x=-9, 7$ **उत्तर**

अभ्यास 3.8

1. उन दो संख्याओं को ज्ञात कीजिए, जिनका योगफल 27 व गुणनफल 182 है।

हल– माना दो संख्याएँ x तथा y है।

प्रश्नानुसार, $x+y=27$ ...(1)

तथा $xy=182$ ...(2)

समीकरण (1) से $y=27-x$ समीकरण (2) में रखने पर,

$x(27-x)=182$ या $27x-x^2=182$

या $x^2-27x+182=0$ या $x^2-13x-14x+182=0$

या $x(x-13)-14(x-13)=0$ या $(x-13)(x-14)=0$

अब, यदि $x-13=0$ तो $x=13$ समीकरण (1) में रखने पर,

$13+y=27$ या $y=27-13$ या $y=14$

तथा यदि $x-14=0$ तो $x=14$ समीकरण (1) में रखने पर,

$14+y=27$ या $y=27-14$ या $y=13$

अतः अभीष्ट संख्याएँ $=13, 14$ **उत्तर**

2. ऐसे दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों को ज्ञात कीजिए, जिनके वर्गों का योगफल 365 है।

हल– माना दो क्रमागत धन पूर्णांक x तथा $x+1$ हैं।

अतः प्रश्नानुसार,

$x^2+(x+1)^2=365$

या $x^2+x^2+2x+1=365$ या $2x^2+2x=365-1$

या $2x^2+2x=364$ या $x^2+x=182$

या $x^2+x-182=0$ या $x^2+14x-13x-182=0$

या $x(x+14)-13(x+14)=0$ या $(x+14)(x-13)=0$

अब, यदि $x+14=0$ तो $x=-14$ जो अमान्य है।

यदि $x-13=0$ तो $x=13$

तथा $x+1=13+1=14$

अतः अभीष्ट संख्याएँ $=13, 14$ **उत्तर**

3. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई उसकी आधार भुजा से 7 सेमी कम है। यदि उसका कर्ण 13 सेमी है, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल– माना समकोण त्रिभुज की आधार भुजा $=x$ सेमी

प्रश्नानुसार, समकोण त्रिभुज की ऊँचाई $=(x-7)$ सेमी

तथा समकोण त्रिभुज का कर्ण $=13$ सेमी

हम जानते हैं कि— समकोण त्रिभुज में

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{ऊँचाई})^2$$

$$13^2 = x^2 + (x-7)^2 \quad \text{या} \quad 169 = x^2 + x^2 - 14x + 49$$

या $169 - 49 = 2x^2 - 14x$ या $120 = 2x^2 - 14x$

या $60 = x^2 - 7x$ या $x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$

या $x(x-12) + 5(x-12) = 0$ या $(x-12)(x+5) = 0$

अब, यदि $x - 12 = 0$ तो $x = 12$

तथा यदि $x + 5 = 0$ तो $x = -5$ सेमी जो अमान्य है।

अतः समकोण त्रिभुज की ऊँचाई $= x - 7 = 12 - 7 = 5$ सेमी

अतः समकोण त्रिभुज की अन्य दो भुजाएँ = **5 सेमी व 12 सेमी हैं।** **उत्तर**

4. एक कुटीर उद्योग एक दिन में मिट्टी की वस्तुओं की निश्चित संख्या का उत्पादन करता है। एक विशेष दिन प्रेक्षण किया गया कि प्रत्येक वस्तु के उत्पादन का मूल्य (₹ में) उस दिन उत्पादित वस्तुओं की संख्या के दुगने से 3 अधिक था। यदि उस दिन उत्पादन का कुल मूल्य ₹ 90 था, तो उत्पादित वस्तुओं की संख्या तथा प्रत्येक वस्तु का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल– माना उत्पादित वस्तुओं की संख्या $= x$

तथा प्रत्येक वस्तु का मूल्य $= ₹\ y$

प्रश्नानुसार, $y = 2x + 3$ ...(1)

तथा उत्पादन का कुल मूल्य $xy = ₹\ 90$ ...(2)

समीकरण (1) से y का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x(2x+3) = 90 \quad \text{या} \quad 2x^2 + 3x - 90 = 0$$

या $2x^2 + 15x - 12x - 90 = 0$

या $x(2x+15) - 6(2x+15) = 0$

या $(2x+15)(x-6) = 0$

यदि $2x + 15 = 0$ तो $x = \dfrac{-15}{2}$ जो अमान्य है।

अब, यदि $x - 6 = 0$ तो $x = 6$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = 2 \times 6 + 3 = 12 + 3 = 15$$

अतः उत्पादित वस्तुओं की संख्या $= 6$

तथा प्रत्येक वस्तु का मूल्य $= ₹ 15$ **उत्तर**

5. एक आयताकार पार्क को इस तरह से बनाया गया है कि उसकी लम्बाई चौड़ाई से 3 मीटर अधिक है। इसका क्षेत्रफल 12 मीटर ऊँचाई वाले एक समद्विबाहु त्रिभुजाकार पार्क के क्षेत्रफल से 4 वर्ग मीटर अधिक है, जिसका आधार आयताकार पार्क की चौड़ाई के बराबर है। आयताकार पार्क की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना आयताकार पार्क की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः x व y मीटर हैं।

प्रश्नानुसार, $x = y + 3$ ...(1)

समद्विबाहु त्रिभुज का आधार = आयताकार पार्क की चौड़ाई

$= y$ मीटर

समद्विबाहु त्रिभुज की ऊँचाई = 12 मीटर

अतः समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times y \times 12 = 6y$ मीटर^2

पुनः प्रश्नानुसार,

आयताकार पार्क का क्षेत्रफल = समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल + 4

$$x \times y = 6y + 4 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (2) में समीकरण (1) से $x = y + 3$ रखने पर,

$(y+3)\,y = 6y + 4$ या $y^2 + 3y = 6y + 4$

या $y^2 + 3y - 6y - 4 = 0$ या $y^2 - 3y - 4 = 0$

या $y^2 - 4y + y - 4 = 0$ या $y(y-4) + 1(y-4) = 0$

या $(y-4)(y+1) = 0$

अब, यदि $y - 4 = 0$ तो $y = 4$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x = 4 + 3 = 7$ मीटर

अतः आयताकार मैदान की लम्बाई = **7 मीटर** तथा **चौड़ाई = 4 मीटर** **उत्तर**

6. एक मोटरबोट, जिसकी चाल शान्त जल में 18 किमी/घंटा है किसी बिन्दु से 24 किमी० धारा के अनुकूल जाने की अपेक्षा धारा के प्रतिकूल उसी बिन्दु तक आने में 1 घंटा अधिक समय लेती है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

हल– माना धारा की चाल x किमी/घंटा है

शान्त जल में मोटरबोट की चाल = 18 किमी/घंटा

अतः धारा के अनुकूल मोटरबोट की चाल = $(18 + x)$ किमी/घंटा

तथा धारा के प्रतिकूल मोटरबोट की चाल = $(18 - x)$ किमी/घंटा

प्रत्येक दशा में मोटरबोट द्वारा तय दूरी = 24 किमी

धारा के अनुकूल जाने में लगा समय $= \frac{\text{तय दूरी}}{\text{धारा के अनुकूल चाल}}$

$$T_1 = \frac{24}{18 + x}$$

तथा धारा के प्रतिकूल आने में लगा समय $= \frac{\text{तय दूरी}}{\text{धारा के प्रतिकूल चाल}}$

$$T_2 = \frac{24}{18 - x}$$

प्रश्नानुसार, $T_2 - T_1 = 1$ या $\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$

या $24\left(\frac{1}{18-x} - \frac{1}{18+x}\right) = 1$ या $24\left\{\frac{18+x-(18-x)}{(18+x)(18-x)}\right\} = 1$

या $24\left\{\frac{18+x-18+x}{18^2 - x^2}\right\} = 1$ या $24\left(\frac{2x}{324 - x^2}\right) = 1$

या $48x = 324 - x^2$

या $x^2+48x-324=0$ या $x^2+54x-6x-324=0$

या $x(x+54)-6(x+54)=0$

या $(x+54)(x-6)=0$

अब, यदि $x+54=0 \Rightarrow x=-54$ किमी/घंटा जो अमान्य है।

तथा यदि $x-6=0 \Rightarrow x=6$ किमी/घंटा उत्तर

7. एक संख्या तथा उसके व्युत्क्रम का योगफल $\frac{13}{6}$ है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना संख्या x है।

तब x का व्युत्क्रम $=\frac{1}{x}$

प्रश्नानुसार, $x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$ या $\frac{x^2+1}{x}=\frac{13}{6}$

या $6x^2+6=13x$ या $6x^2-13x+6=0$

या $6x^2-9x-4x+6=0$ या $(2x-3)(3x-2)=0$

अब, यदि $2x-3=0$ या $2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

तथा यदि $3x-2=0$ तो $x=\frac{2}{3}$

अतः अभीष्ट संख्या $=\frac{2}{3}$ **या** $\frac{3}{2}$ उत्तर

8. एक संख्या तथा उसके व्युत्क्रम का योगफल $2\frac{9}{10}$ है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना संख्या $=x$

तब x का व्युत्क्रम $=\frac{1}{x}$

प्रश्नानुसार, $x+\frac{1}{x}=2\frac{9}{10}$

या $\frac{x^2+1}{x}=\frac{29}{10}$ या $10x^2+10=29x$

या $10x^2-29x+10=0$ या $10x^2-25x-4x+10=0$

या $5x(2x-5)-2(2x-5)=0$ या $5x(2x-5)-2(2x-5)=0$

या $(2x-5)(5x-2)=0$

अब, यदि $2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

तथा यदि $5x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{5}$

अतः अभीष्ट संख्या $=\frac{2}{5}$ **या** $\frac{5}{2}$ उत्तर

9. एक भिन्न का हर उसके अंश से 3 अधिक है। यदि भिन्न तथा उसके व्युत्क्रम का योगफल $2\frac{9}{10}$ है तो भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल– माना भिन्न $=\frac{x}{y}$ तथा इसका व्युत्क्रम $=\frac{y}{x}$

प्रश्नानुसार, $y=x+3$ ...(1)

तथा $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{9}{10}$

या $\frac{x}{x+3}+\frac{x+3}{x}=\frac{29}{10}$ (समीकरण 1 से)

या $\frac{x^2+(x+3)^2}{(x+3)x}=\frac{29}{10}$ या $\frac{x^2+x^2+6x+9}{x^2+3x}=\frac{29}{10}$

या $\frac{2x^2+6x+9}{x^2+3x}=\frac{29}{10}$

या $20x^2+60x+90=29x^2+87x$

या $9x^2+27x-90=0$ या $x^2+3x-10=0$

या $x^2+5x-2x-10=0$ या $x(x+5)-2(x+5)=0$

या $(x+5)(x-2)=0$

अब, यदि $x+5=0$ तो $x=-5$ जो अमान्य है।

तथा यदि $x-2=0 \Rightarrow x=2$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y=2+3=5$$

अतः भिन्न $=\frac{x}{y}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$ **उत्तर**

10. एक भिन्न का हर उसके अंश से 1 अधिक है। भिन्न का 3 गुणा उसके व्युत्क्रम के दो गुने से 1 कम है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल– माना भिन्न $=\frac{x}{y}$

तब भिन्न का व्युत्क्रम $=\frac{y}{x}$

प्रश्नानुसार, $y=x+1$ ...(1)

तथा $3\times\frac{x}{y}=2\times\frac{y}{x}-1$ या $\frac{3x}{y}=\frac{2y}{x}-1$

या $\frac{3x}{y}=\frac{2y-x}{x}$

या $\frac{3x}{x+1}=\frac{2(x+1)-x}{x}$ (समीकरण (1) से)

या $3x^2=2(x+1)^2-(x+1)x$

या $3x^2=2(x^2+2x+1)-x^2-x$

या $3x^2=2x^2+4x+2-x^2-x$

या $3x^2=x^2+3x+2$ या $2x^2-3x-2=0$

या $2x^2-4x+x-2=0$ या $2x(x-2)+1(x-2)=0$

या $(x-2)(2x+1)=0$

अब, यदि $x-2=0$ तो $x=2$

तथा यदि $2x+1=0$ तो $x=-\frac{1}{2}$ जो अमान्य है।

अतः समीकरण (1) में $x=2$ रखने पर,

$y=2+1=3$

अतः अभीष्ट भिन्न $\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{2}{3}$ **उत्तर**

11. किसी पूर्णांक के व्युत्क्रम का $\frac{25}{12}$ गुणा उस पूर्णांक से क्रमशः एक कम तथा एक अधिक पूर्णांक के व्युत्क्रमों के योगफल के बराबर है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

हल– माना पूर्णांक $=x$ इसका व्युत्क्रम $=\frac{1}{x}$

पूर्णांक x से 1 अधिक पूर्णांक $=x+1$, इसका व्युत्क्रम $=\frac{1}{x+1}$

तथा 1 कम पूर्णांक $=x-1$, इसका व्युत्क्रम $=\frac{1}{x-1}$

प्रश्नानुसार, $\frac{25}{12}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$

या $\frac{25}{12x}=\frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)}$

या $\frac{25}{12x}=\frac{2x}{x^2-1}$ या $25x^2-25=24x^2$

या $x^2-25=0$ या $x^2-5^2=0$

या $(x+5)(x-5)=0$

अब, यदि $x+5=0$ तो $x=-5$

तथा यदि $x-5=0$ तो $x=5$

अतः अभीष्ट पूर्णांक $=5$ या -5 **उत्तर**

12. किसी भिन्न का अंश उसके हर से एक कम है। यदि भिन्न के अंश में 4 जोड़ा जाए तथा हर में से 2 घटाया जाए तो नई भिन्न एवं मूल भिन्न का योगफल $\frac{17}{4}$ हो जाता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल– माना भिन्न $=\frac{x}{y}$

प्रश्नानुसार, $x=y-1$ या $y=x+1$ ...(1)

तथा $\frac{x+4}{y-2}+\frac{x}{y}=\frac{17}{4}$

या $\frac{x+4}{x+1-2}+\frac{x}{x+1}=\frac{17}{4}$ (समी० (1) से $y=x+1$ रखने पर)

या $\frac{x+4}{(x-1)}+\frac{x}{(x+1)}=\frac{17}{4}$

या $\frac{(x+4)(x+1)+x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{17}{4}$

या $\frac{x^2+x+4x+4+x^2-x}{x^2-1}=\frac{17}{4}$

या $\frac{2x^2+4x+4}{x^2-1}=\frac{17}{4}$ या $8x^2+16x+16=17x^2-17$

या $9x^2-16x-33=0$ या $9x^2-27x+11x-33=0$

या $9x(x-3)+11(x-3)=0$ या $(x-3)(9x+11)=0$

अत: यदि $x-3=0 \Rightarrow x=3$

तथा यदि $9x+11=0 \Rightarrow x=-\frac{11}{9}$ जो अमान्य है।

समीकरण (1) में $x=3$ रखने पर,

$3=y-1 \Rightarrow y=3+1=4$ **उत्तर**

13. दो संख्याओं का योगफल 15 है। संख्याओं के व्युत्क्रमों का योगफल $\frac{3}{10}$ है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल– माना दो संख्याएँ $=x$ तथा y हैं।

अत: इनके व्युत्क्रम क्रमश: $\frac{1}{x}$ तथा $\frac{1}{y}$ होंगे।

प्रश्नानुसार, $x+y=15$ ...(1)

तथा $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{10}$ या $\frac{y+x}{xy}=\frac{3}{10}$

या $10(x+y)=3xy$

या $10\times 15=3x(15-x)$ (समीकरण (1) से)

या $150=45x-3x^2$

या $3x^2-45x+150=0$ या $x^2-15x+50=0$

या $x^2-10x-5x+50=0$ या $x(x-10)-5(x-10)=0$

या $(x-10)(x-5)=0$

अब, यदि $x-10=0 \Rightarrow x=10$

तथा यदि $x-5=0 \Rightarrow x=5$

$x=10$ समीकरण (1) में रखने पर,

$10+y=15$ या $y=15-10=5$

इसी प्रकार, $x=5$ रखने पर,

$y=15-5=10$

अत: अभीष्ट संख्याएँ $=$ **5, 10** हैं **उत्तर**

14. दो क्रमागत धनपूर्ण संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल 30 है।

हल—माना दो क्रमागत धनपूर्ण संख्याएँ x तथा $(x+1)$ हैं।

प्रश्नानुसार, $x\times(x+1)=30$

या $x^2+x=30$ या $x^2+x-30=0$

या $x^2+6x-5x-30=0$ या $x(x+6)-5(x+6)=0$

या $(x+6)(x-5)=0$

अब, यदि $x-5=0$ तो $x=5$ तथा $x+1=5+1=6$

अत: दो अभीष्ट क्रमागत धनपूर्ण संख्याएँ = **5, 6** **उत्तर**

15. 40 को ऐसे दो भागों में बाँटिए जिनका गुणनफल 375 है।

हल– माना दो संख्याएँ x तथा y इस प्रकार हैं कि—

$$x+y=40 \quad ...(1)$$

तथा $$xy=375 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) से $y=40-x$ समीकरण (2) में रखने पर,

$x(40-x)=375$ या $40x-x^2=375$

या $x^2-40x+375=0$ या $x^2-25x-15x+375=0$

या $x(x-25)-15(x-25)=0$ या $(x-25)(x-15)=0$

अब, यदि $x-25=0$ तो $x=25$

तथा $x-15=0$ तो $x=15$

$x=25$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$y=40-25=15$$

तथा $x=15$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$y=40-15=25$$

अत: अभीष्ट संख्याएँ = **15, 25** **उत्तर**

16. एक संख्या दो अंकों से बनी है। संख्या में इकाई का अंक दहाई के अंक से 4 अधिक है। संख्या अपने अंकों के गुणनफल से 14 अधिक है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना संख्या $=xy$

जहाँ y इकाई अंक तथा x दहाई अंक है। अत: संख्या का मान $=10x+y$

प्रश्नानुसार, $$y=x+4 \quad ...(1)$$

तथा $$10x+y=xy+14 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) से y का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$10x+x+4=x(x+4)+14$ या $11x+4=x^2+4x+14$

या $x^2-7x+10=0$ या $x^2-5x-2x+10=0$

या $x(x-5)-2(x-5)=0$ या $(x-5)(x-2)=0$

अब, यदि $x-5=0 \Rightarrow x=5$ तब $y=5+4=9$

तथा यदि $x-2=0 \Rightarrow x=2$ तब $y=2+4=6$

अत: अभीष्ट संख्याएँ = **26 या 59 हैं** **उत्तर**

17. एक संख्या में दो अंक हैं जिनका गुणनफल 12 है। जब इस संख्या में 36 जोड़ा जाता है तो अंकों के स्थान बदल जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना संख्या $=xy$ है, जहाँ x दहाई का अंक तथा y इकाई का अंक है।

अत: संख्या का मान $=10x+y$

प्रश्नानुसार, $$x\times y=12 \quad ...(1)$$

तथा $10x+y+36=10y+x$

या $10x-x+y-10y+36=0$ या $9x-9y+36=0$

या $x-y+4=0$

या $x=y-4$ समीकरण (1) में रखने पर,

$(y-4)\times y=12$

या $y^2-4y-12=0$ या $y^2-6y+2y-12=0$

या $y(y-6)+2(y-6)=0$ या $(y-6)(y+2)=0$

अब, यदि $y-6=0 \Rightarrow y=6$ तो $x=\frac{12}{6}=2$

तथा यदि $y+2=0 \Rightarrow y=-2$ जो अमान्य है।

अतः अभीष्ट संख्या $(xy)=\mathbf{26}$ **उत्तर**

18. दो अंकों की एक धनात्मक संख्या के अंकों का गुणनफल 18 है। संख्या में से 63 घटाने पर अंकों के स्थान बदल जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना दो अंकों की संख्या $=xy \Rightarrow 10x+y$

जहाँ y इकाई तथा x दहाई अंक है।

प्रश्नानुसार, $x\times y=18$ ...(1)

तथा $10x+y-63=10y+x$

या $10x-x+y-10y-63=0$

या $9x-9y-63=0$ या $x-y-7=0$ या $y=x-7$

$y=x-7$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x(x-7)=18$ या $x^2-7x=18$

या $x^2-7x-18=0$ या $x^2-9x+2x-18=0$

या $x(x-9)+2(x-9)=0$ या $(x-9)(x+2)=0$

अतः यदि $x-9=0 \Rightarrow x=9$ तो $y=2$

अतः अभीष्ट संख्या $=\mathbf{92}$ **उत्तर**

19. एक समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाएँ (सेमी में) $5x$ तथा $(3x-1)$ हैं। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 वर्ग सेमी हो, तो त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल– समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाएँ $=5x$ तथा $(3x-1)$

प्रश्नानुसार, त्रिभुज का क्षेत्रफल $=60$ वर्ग सेमी

या $\frac{(5x)\times(3x-1)}{2}=60$ या $15x^2-5x=120$

या $3x^2-x=24$ या $3x^2-x-24=0$

या $3x^2-9x+8x-24=0$

या $3x(x-3)+8(x-3)=0$ या $(x-3)(3x+8)=0$

अब, यदि $x-3=0 \Rightarrow x=3$

अतः $5x=5\times 3=15$ सेमी

तथा $3x-1=3\times 3-1=9-1=8$

अतः समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाएँ $=\mathbf{15}$ सेमी, **8** सेमी **उत्तर**

20. एक मनुष्य की उम्र अपने पुत्र की उम्र से तीन गुनी है। 6 वर्ष पहले दोनों की उम्र का गुणनफल 288 है। उनकी वर्तमान उम्र ज्ञात कीजिए।

हल– माना पुत्र की वर्तमान उम्र $= x$ वर्ष

तथा पिता की वर्तमान उम्र $= y$ वर्ष

प्रश्नानुसार, $y = 3x$ ...(1)

6 वर्ष पहले पुत्र की उम्र $= x-6$

तथा 6 वर्ष पहले पिता की उम्र $= y-6$

पुनः प्रश्नानुसार, $(x-6)(y-6) = 288$

या $xy-6x-6y+36 = 288$

या $x \times 3x + 36 - 6x - 6 \times 3x = 288$ (समीकरण (1) से)

या $3x^2 + 36 - 6x - 18x = 288$

या $3x^2 - 24x + 36 = 288$ या $x^2 - 8x + 12 = 96$

या $x^2 - 8x + 12 - 96 = 0$ या $x^2 - 8x - 84 = 0$

या $x^2 - 14x + 6x - 84 = 0$

या $x(x-14) + 6(x-14) = 0$ या $(x-14)(x+6) = 0$

अब, यदि $x-14 = 0 \Rightarrow x = 14$

अतः $y = 3 \times 14 = 42$

अतः पुत्र की वर्तमान उम्र $=$ **14 वर्ष**

तथा पिता की वर्तमान उम्र $=$ **42 वर्ष** **उत्तर**

21. किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण छोटी भुजा के दुगुने से 1 कम है। यदि तीसरी भुजा छोटी भुजा से 1 मीटर अधिक हो, तो त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल– माना समकोण त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा $= a$ मीटर

तथा समकोण त्रिभुज का कर्ण $= b$ मीटर

तीसरी भुजा $= c$ मीटर है।

प्रश्नानुसार, $b = 2a-1$ ...(1)

तथा $c = a+1$

हम जानते हैं, समकोण त्रिभुज में

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$b^2 = a^2 + c^2$ या $(2a-1)^2 = a^2 + (a+1)^2$

$4a^2 - 4a + 1 = a^2 + a^2 + 2a + 1$

या $4a^2 - 4a = 2a^2 + 2a$

या $2a^2 - 6a = 0$ या $2a(a-3) = 0$

अब, $a = 0$ या $a-3 = 0$ तो $a = 3$ मीटर

अतः $b = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$ मीटर

$c = 3 + 1 = 4$ मीटर

अतः समकोण त्रिभुज की भुजाएँ $=$ **3 मीटर, 4 मीटर व 5 मीटर** हैं। **उत्तर**

22. किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल 20 वर्ग सेमी है तथा उसकी ऊँचाई आधार से 3 सेमी अधिक है। आधार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना त्रिभुज के आधार की लम्बाई $=x$ सेमी है।

प्रश्नानुसार, त्रिभुज की ऊँचाई $=(x+3)$ सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल $=20$ वर्ग सेमी

या $\frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई $=20$ या $\frac{1}{2}x\times(x+3)=20$

या $x^2+3x=40$ या $x^2+3x-40=0$

या $x^2+8x-5x-40=0$ या $x(x+8)-5(x+8)=0$

या $(x+8)(x-5)=0$

अब, यदि $x+8=0 \Rightarrow x=-8$ जो अमान्य है।

यदि $x-5=0 \Rightarrow x=5$ **सेमी** **उत्तर**

23. 15 मीटर लम्बाई, 12 मीटर चौड़ाई के एक कमरे के चारों ओर एक 90 वर्ग मीटर क्षेत्रफल का बरामदा है। बरामदे की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना कमरे के चारों ओर बरामदे की चौड़ाई $=x$ मीटर

कमरे की लम्बाई $=15$ मीटर

तथा कमरे की चौड़ाई $=12$ मीटर

कमरे के चारों ओर बरामदे की लम्बाई $=2\times$ कमरे की ल० $+2\times$ कमरे की चौ०

$+4\times$ बरामदे की चौ०

$=2\times15+2\times12+4\times x$

$=30+24+4x=54+4x$

बरामदे का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई $=90$

या $(54+4x)\times x=90$ या $54x+4x^2=90$

या $4x^2+54x-90=0$ या $2x^2+27x-45=0$

या $2x^2+30x-3x-45=0$

या $2x(x+15)-3(x+15)=0$ या $(2x-3)(x+15)=0$

अब, यदि $2x-3=0$ तो $x=\frac{3}{2}=$ **1.5 मीटर** **उत्तर**

24. एक आयताकार पार्क की लम्बाई, उसकी चौड़ाई से 8 मीटर अधिक है। यदि पार्क का क्षेत्रफल 240 वर्ग मीटर है, तो पार्क की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना पार्क की लम्बाई $=x$ मीटर

अतः पार्क की लम्बाई $=(x+8)$ मीटर

पार्क का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई $=240$ वर्ग मीटर

या $(x+8)\times x=240$ या $x^2+8x-240=0$

या $x^2+20x-12x-240=0$

या $x(x+20)-12(x+20)=0$ या $(x+20)(x-12)=0$

अब, यदि $x+20=0 \Rightarrow x=-20$ जो अमान्य है।

तथा यदि $x-12=0 \Rightarrow x=12$

अतः पार्क की लम्बाई $=x+8=12+8=$ **20 मीटर** **उत्तर**

25. एक किसान 100 वर्ग मीटर आयताकार क्षेत्र में सब्जी की क्यारी बनाना चाहता है क्योंकि उसके पास केवल 30 मीटर लम्बा काँटेदार तार है। क्यारी के तीन ओर वह तार लगा देता है और चौथी ओर वह अपने घर की दीवार से घेर देता है। क्यारी की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना क्यारी की लम्बाई $= x$ मीटर

तथा क्यारी की चौड़ाई $= y$ मीटर

अतः क्यारी (आयताकार क्षेत्र) का क्षेत्रफल $= xy = 100$ वर्ग मीटर ...(1)

आयताकार क्षेत्र का तीन ओर से परिमाप $= x + 2y = 30$

या $x = 30 - 2y$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$(30-2y)\,y = 100 \quad \text{या} \quad 30y - 2y^2 = 100$$

या $2y^2 - 30y + 100 = 0$ या $y^2 - 15y + 50 = 0$

या $y^2 - 10y - 5y + 50 = 0$ या $y(y-10) - 5(y-10) = 0$

या $(y-10)(y-5) = 0$

अब, यदि $y - 10 = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow x = 10$ जो अमान्य है।

अतः $y - 5 = 0$ तो $y = 5$ मीटर $\Rightarrow x = 20$ मीटर

अतः क्यारी की लम्बाई = **20 मीटर** तथा चौड़ाई = **5 मीटर** **उत्तर**

26. एक रेलगाड़ी की सामान्य चाल में 5 किमी/घंटा वृद्धि कर देने पर वह 300 किमी की दूरी तय करने में 2 घंटे कम समय लेती है। उसकी सामान्य चाल ज्ञात कीजिए।

हल– माना रेलगाड़ी की चाल $= x$ किमी/घंटा

तय दूरी $= 300$ किमी

अतः 300 किमी दूरी तय करने में लगा समय $= \dfrac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

$$T_1 = \frac{300}{x}$$

अब रेलगाड़ी की चाल $= (x+5)$ किमी/घंटा

तथा 300 किमी की दूरी तय करने में लगा समय $(T_2) = \dfrac{300}{x+5}$ या $T_2 = \dfrac{300}{x+5}$

प्रश्नानुसार, $T_1 - T_2 = 2$

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+5} = 2 \quad \text{या} \quad 300\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5}\right) = 2$$

या $150\left[\dfrac{x+5-x}{x(x+5)}\right] = 1$ या $150\left[\dfrac{5}{x^2+5x}\right] = 1$

या $750 = x^2 + 5x$

या $x^2 + 5x - 750 = 0$

या $x^2 + 30x - 25x - 750 = 0$

या $x(x+30) - 25(x+30) = 0$ या $(x+30)(x-25) = 0$

अब, यदि $x + 30 = 0 \Rightarrow x = -30$ जो अमान्य है।

तथा यदि $x - 25 = 0 \Rightarrow x = \mathbf{25}$ **किमी/घंटा** **उत्तर**

27. शीना एक नाव को शान्त जल में 4 किमी/घण्टे की दर से चला सकती है। धारा की दिशा में 12 किमी जाने में तथा धारा के विपरीत 12 किमी लौटने में 8 घण्टे का समय लगता है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

हल– माना धारा की चाल $= x$ किमी/घण्टा

शान्त जल में नाव की चाल $= 4$ किमी/घण्टा

अतः धारा की दिशा में नाव की चाल $= (4+x)$ किमी/घण्टा

अब, धारा के दिशा में 12 किमी जाने में लगा समय $= \frac{12}{4+x} = T_1$

तथा धारा के विपरीत 12 किमी लौटने मे लगा समय $= \frac{12}{4-x} = T_2$

परन्तु प्रश्नानुसार, $T_1 + T_2 = 8$

या $\frac{12}{4+x} + \frac{12}{4-x} = 8$ या $12\left(\frac{1}{4+x} + \frac{1}{4-x}\right) = 8$

या $12\left(\frac{4-x+4+x}{4^2-x^2}\right) = 8$ या $\frac{12\times 8}{16-x^2} = 8$

या $\frac{12}{16-x^2} = 1$ या $12 = 16 - x^2$

या $x^2 = 16 - 12$

या $x^2 = 4$ या $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

अतः **$x = 2$ किमी/घंटा** **उत्तर**

28. एक दुकानदार एक वस्तु को ₹ 75 में बेचता है। वह मूल्य के बराबर प्रतिशत मुनाफा लेता है तो उसका मूल्य बताइए।

हल– माना वस्तु का मूल्य $= ₹ x$

अतः मुनाफा $= x\%$

अतः वस्तु का विक्रय मूल्य $= x + x$ का $x\%$

या $x + \frac{x\times x}{100} = 75$ या $\frac{100x + x^2}{100} = 75$

या $100x + x^2 = 7500$

या $x^2 + 100x - 7500 = 0$ या $x^2 + 150x - 50x - 7500 = 0$

या $x(x+150) - 50(x+150) = 0$ या $(x+150)(x-50) = 0$

अब, यदि $x + 150 = 0 \Rightarrow x = -150$ जो अमान्य है।

तथा यदि $x - 50 = 0 \Rightarrow x = 50$

अतः वस्तु का मूल्य $=$ **₹ 50** **उत्तर**

29. एक विमान अपने निर्धारित समय से 30 मिनट देर से चलता है और 1500 किमी की दूरी पर स्थित अपने गंतव्य स्थान पर समय पर पहुँचने के लिए वह अपनी सामान्य चाल में 250 किमी/घण्टा की वृद्धि कर देता है। विमान की सामान्य चाल ज्ञात कीजिए।

हल– माना विमान की सामान्य चाल $= x$ किमी/घण्टा, तय दूरी $= 1500$ किमी

अतः सामान्य चाल से 1500 किमी की दूरी तय करने मे लगा समय

$$T_1 = \frac{1500}{x} \text{ घण्टा}$$

अब, विमान की चाल $=(x+250)$ किमी/घण्टा

अतः 1500 किमी दूरी तय करने में लगा समय $T_2=\frac{1500}{x+250}$ घण्टा

प्रश्नानुसार, $T_1-T_2=\frac{1}{2}$ घण्टा

$$\frac{1500}{x}-\frac{1500}{x+250}=\frac{1}{2} \quad \text{या} \quad 1500\left\{\frac{x+250-x}{x(x+250)}\right\}=\frac{1}{2}$$

$$\text{या} \quad \frac{1500\times 250}{x^2+250x}=\frac{1}{2} \quad \text{या} \quad \frac{x^2+250x}{375000}=\frac{2}{1}$$

$$\text{या} \quad x^2+250x=750000$$

$$\text{या} \quad x^2+250x-750000=0$$

$$\text{या} \quad x^2+1000x-750x-750000=0$$

$$\text{या} \quad x(x+1000)-750(x+1000)=0$$

$$\text{या} \quad (x+1000)(x-750)=0$$

अब, यदि $x+1000=0 \Rightarrow x=-1000$ जो मान्य नहीं है।

तथा यदि $x-750=0 \Rightarrow x=750$

अतः विमान की चाल = **750 किमी/घण्टा** **उत्तर**

30. एक नाव को, जिसकी शान्त जल में चाल 15 किमी/घण्टा है, धारा की दिशा में 30 किमी जाने और फिर धारा की विपरीत दिशा में लौटने में कुल समय 4 घण्टे 30 मिनट लगता है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

हल– माना धारा की चाल $=x$ किमी/घण्टा

तथा शान्त जल में नाव की चाल $=15$ किमी/घण्टा

अतः धारा की दिशा में नाव की चाल $=(15+x)$ किमी/घण्टा

तथा धारा की विपरीत दिशा में नाव की चाल $=(15-x)$ किमी/घण्टा

एक दिशा में तय दूरी $=30$ किमी

धारा की दिशा में लगा समय $=\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}=\frac{30}{15+x}=T_1$

तथा धारा के विपरीत दिशा में लगा समय $=\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}=\frac{30}{15-x}=T_2$

प्रश्नानुसार, $T_1+T_2=4\frac{1}{2}$ घण्टा

$$\text{या} \quad \frac{30}{15+x}+\frac{30}{15-x}=\frac{9}{2} \quad \text{या} \quad 30\left(\frac{1}{15+x}+\frac{1}{15-x}\right)=\frac{9}{2}$$

$$\text{या} \quad 30\left(\frac{15-x+15+x}{15^2-x^2}\right)=\frac{9}{2} \quad \text{या} \quad \frac{30\times 30}{225-x^2}=\frac{9}{2}$$

$$\text{या} \quad \frac{10\times 10}{225-x^2}=\frac{1}{2} \quad \text{या} \quad 200=225-x^2$$

$$\text{या} \quad x^2+200-225=0 \quad \text{या} \quad x^2-25=0$$

या $x^2 = 25$ या $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

अतः $x = -5$ जो अमान्य है तथा $x = 5$ **किमी/घण्टा** **उत्तर**

31. एक व्यक्ति ने कुछ कपड़े ₹ 2,250 में खरीदे। यदि कपड़े का मूल्य ₹ 50 प्रति मीटर अधिक होता है तो वह 1.5 मीटर कम कपड़ा ही खरीद पाता। खरीदे गए कपड़े की माप व मूल्य प्रति मीटर ज्ञात कीजिए।

हल– माना कपड़े की माप $= x$ मीटर

तथा प्रति मीटर कपड़े का मूल्य = ₹ y

प्रश्नानुसार, $x \times y = 2250$ ...(1)

तथा $(x - 1.5) \times (y + 50) = 2250$

या $xy + 50x - 1.5y - 75.0 = 2250$

या $2250 + 50x - 1.5y - 75 = 2250$

या $50x - 1.5y = 75$ ...(2)

या $50x - 75 = 1.5y$

या $y = \dfrac{50x - 75}{1.5}$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{x(50x - 75)}{1.5} = 2250 \quad \text{या} \quad 50x^2 - 75x = 3375$$

या $2x^2 - 3x = 135$ या $2x^2 - 3x - 135 = 0$

या $2x^2 - 18x + 15x - 135 = 0$

या $2x(x - 9) + 15(x - 9) = 0$ या $(x - 9)(2x + 15) = 0$

अब, यदि $x - 9 = 0$ तो $x = 9$ **मीटर** समीकरण (1) में रखने पर,

$9 \times y = 2250$

या $y = \dfrac{2250}{9} = ₹250$ **प्रति मीटर** **उत्तर**

32. किसी व्यक्ति के पास कुछ रुपये थे। उसने आधे रुपये दान कर दिए। उसने 6 रुपये का जलपान कर लिया तथा 3 रुपये कहीं गिर गए। उसके पास कुल रुपये के वर्गमूल के चार गुना से 1 रुपया अधिक बचा। ज्ञात कीजिए कि उसके पास कितने रुपये थे?

हल– माना व्यक्ति के पास कुल x रुपये थे।

दान दिए गए $= \dfrac{x}{2}$ रुपये

जलपान में खर्च किए गए = 6 रुपये

कहीं गिर गए = 3 रुपए

शेष रुपये $= x - \left(\dfrac{x}{2} + 6 + 3\right)$

परन्तु प्रश्नानुसार, $x - \left(\dfrac{x}{2} + 6 + 3\right) = 4\sqrt{x} + 1$

या $x - \dfrac{x}{2} - 6 - 3 = 4\sqrt{x} + 1$

या $\dfrac{x}{2} - 9 - 1 = 4\sqrt{x}$ या $\dfrac{x}{2} - 10 = 4\sqrt{x}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\left(\frac{x}{2}-10\right)^2=(4\sqrt{x})^2$$

या $\frac{x^2}{4}+100-10x=16x$ या $\frac{x^2}{4}-10x-16x+100=0$

या $\frac{x^2}{4}-26x+100=0$ या $x^2-104x+400=0$

या $x^2-100x-4x+400=0$

या $x(x-100)-4(x-100)=0$

या $(x-100)(x-4)=0$

अब यदि $x-100=0 \Rightarrow x=100$

तथा $x-4=0 \Rightarrow x=4$ जो तथ्यों के अनुकूल न होने के कारण अमान्य है।

अतः **व्यक्ति के पास कुल 100 रुपये थे।** **उत्तर**

33. किसी दो अंकों की संख्या के अंकों का गुणनफल 12 है। संख्या में 36 जोड़ने पर संख्या के अंकों के स्थान बदल जाते हैं। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना संख्या xy है, जहाँ y इकाई का अंक तथा x दहाई का अंक है।

अतः संख्या का मान $=10x+y$

तथा अंकों के स्थान बदल जाने पर संख्या का मान $=10y+x$

प्रश्नानुसार, $x\times y=12$ ...(1)

तथा $10x+y+36=10y+x$

या $10x-x+y-10y+36=0$

या $9x-9y+36=0$ या $x-y+4=0$

या $y=x+4$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x\times(x+4)=12$ या $x^2+4x=12$

या $x^2+4x-12=0$ या $x^2+6x-2x-12=0$

या $x(x+6)-2(x+6)=0$ या $(x+6)(x-2)=0$

अब, यदि $x+6=0 \Rightarrow x=-6$ जो अमान्य है।

तथा यदि $x-2=0 \Rightarrow x=2$ समीकरण (1) में रखने पर,

$2y=12 \Rightarrow y=6$

अतः **अभीष्ट संख्या $(xy)=26$** है। **उत्तर**

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 69 व 70 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-2 वाणिज्यिक गणित
(Commercial Mathematics)

4

कराधान (Taxation)

अभ्यास 4.1

1. कर किसे कहते हैं?

उत्तर– सरकार द्वारा अपने बहुआयामी आर्थिक एवं आर्थिकेतर कार्यकलापों पर किए जाने वाले खर्चे के लिए नागरिकों के योगदान को कर कहते हैं।

2. कर कितने प्रकार के होते हैं?

उत्तर– कर सामान्य रूप से दो प्रकार के होते हैं—

1. प्रत्यक्ष कर—प्रत्यक्ष कर के अन्तर्गत आयकर, सम्पत्ति कर, उपहार कर आदि आते हैं।

2. अप्रत्यक्ष कर—अप्रत्यक्ष कर के अन्तर्गत बिक्री कर, उत्पाद शुल्क एवं सीमा शुल्क आदि आते हैं।

3. सम्पत्ति कर क्या है?

उत्तर– किसी व्यक्ति की सभी परिसम्पत्तियों अर्थात् सम्पत्ति एवं धन पर लगाया गया कर सम्पत्ति कर कहलाता है।

4. प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष कर को संक्षेप में समझाइए।

उत्तर– प्रत्यक्ष कर—सरकार द्वारा किसी व्यक्ति अथवा व्यक्ति-समूह पर लगाया गया ऐसा कर, जो उसे सीधा प्रभावित करता है, प्रत्यक्ष कर कहलाता है। जैसे—आयकर, सम्पत्ति कर एवं उपहार कर आदि प्रत्यक्ष कर हैं।

अप्रत्यक्ष कर—सरकार द्वारा किसी व्यक्ति अथवा व्यक्ति-समूह पर लगाया गया ऐसा कर जो उसे सीधा प्रभावित नहीं करता है, अप्रत्यक्ष कर कहलाता है। जैसे—बिक्रीकर, उत्पाद शुल्क, सीमा शुल्क आदि अप्रत्यक्ष कर हैं।

5. सीमा शुल्क क्या है?

उत्तर– विदेशों से आयातित वस्तुओं पर सरकार द्वारा लगाया गया कर, सीमा शुल्क कहलाता है।

6. वित्तीय वर्ष 2013-14 में *P* की कुल वार्षिक आय ₹ 5,96,600 थी। वह भविष्य निधि खाते में ₹ 15,000 प्रतिमाह जमा करता था तथा उसने ₹ 15,000 वार्षिक अपने जीवन बीमा पॉलिसी का प्रीमियम दिया था। यदि ₹ 2,00,000 तक कोई आयकर नहीं तथा ₹ 2,00,000 से अधिक आय पर 10% की दर से आयकर देय हो तथा आयकर में छूट सभी बचतों का 100% अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000 हो तो उसके देय आयकर की गणना कीजिए।

हल– *P* की कुल वार्षिक आय = ₹ 5,96,600

भविष्य निधि बचत = ₹ 15,000 × 12 = ₹ 1,80,000

जीवन बीमा बचत = ₹ 15,000

कुल बचत = ₹ (1,80,000 + 15,000)

= ₹ 1,95,000 > 1,00,000

∵ अधिकतम ₹ 1,00,000 तक बचत पर आयकर में छूट = 100%

∴ कर योग्य आय = 5,96,600 − 1,00,000 = ₹ 4,96,600

कर मुक्त सीमा = ₹ 2,00,000

कर की दर = 10%

अतः देय आयकर = (4,96,600 − 2,00,000) × 10%

$= \frac{2,96,600 \times 10}{100}$ = ₹ 29,660 उत्तर

7. वित्तीय वर्ष 2014-2015 में किसी अधिकारी की वार्षिक आय ₹ 6,25,000 थी। उन्होंने ₹ 50,000 अपनी जीवन बीमा पॉलिसी का वार्षिक प्रीमियम जमा किया तथा ₹ 15,000 प्रतिमाह भविष्य निधि में जमा किए। उस अधिकारी के देय आयकर की गणना कीजिए। आयकर की दरें निम्नवत हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 2,50,000 तक	कोई कर नहीं
(ii) ₹ 2,50,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 2,50,000 से अधिक राशि का 10%
(iii) ₹ 5,00,001 से ₹ 10,00,000 तक	₹ 25,000 + ₹ 5,00,000 से अधिक राशि का 20%

आयकर में छूट : समस्त बचत का 100% अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000।

हल– अधिकारी की कुल वार्षिक आय = ₹ 6,25,000

जीवन बीमा बचत = ₹ 50,000

भविष्य निधि बचत = ₹ 15,000 × 12 = ₹ 1,80,000

अतः कुल बचत = ₹ (50,000 + 1,80,000) = ₹ 2,30,000 > 1,00,000

∵ आयकर में छूट = कुल बचत का 100% अधिकतम सीमा = ₹ 1,00,000

∴ कर योग्य आय = ₹ (6,25,000 − 1,00,000) = ₹ 5,25,000

∵ कर योग्य आय 5,00,001 से 10,00,000 के मध्य है।

∴ देय आयकर = ₹ 25,000 + 5,00,000 से अधिक की राशि का 20%

= ₹ 25,000 + ₹ (5,25,000 − 5,00,000) × 20%

$= ₹\left(25,000 + 25,000 \times \frac{20}{100}\right)$

= ₹ (25,000 + 5,000) = ₹ 30,000 उत्तर

8. वित्तीय वर्ष 2013-2014 में वैभव की वार्षिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) ₹ 5,80,000 थी। उसने ₹ 45,000 अपने सामान्य भविष्य निधि खाते में जमा किया तथा ₹ 12,500 की अर्द्धवार्षिक प्रीमियम एल० आई० सी० में देता था। उसने ₹ 30,000 इन्फ्रास्ट्रक्चर में भी जमा किए। वैभव के वेतन से वित्तीय वर्ष के अन्तिम माह में भुगतान

किए जाने वाले आयकर की गणना कीजिए। यदि वह वर्ष के प्रथम 11 माह में ₹ 1,600 प्रतिमाह आयकर देता रहा हो। आयकर गणना हेतु निम्नलिखित दरों का प्रयोग कीजिए।

(a) आयकर की दरें निम्नवत हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 2,00,000 तक	कोई कर नहीं
(ii) ₹ 2,00,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 2,00,000 से अधिक आय राशि का 10%
(iii) ₹ 5,00,001 से ₹ 10,00,000 तक	₹ 30,000 + ₹ 5,00,000 से अधिक आय राशि का 20%
(iv) ₹ 10,00,001 से अधिक	₹ 1,30,000 + ₹ 10,00,000 से अधिक आय राशि का 30%

(b) छूट : ₹ 1,00,000 तक की बचत कर से मुक्त है।

(c) अधिकार : देय कर का 10% यदि कर योग्य आय ₹ 10,00,000 से अधिक है।

(d) शिक्षा उपकर : देय कर का 2%

हल– वैभव की वार्षिक आय = ₹ 5,80,000

सामान्य भविष्य निधि बचत = ₹ 45,000

एल० आई० सी० बचत = ₹ 2 × 12,500 = ₹ 25,000

इन्फ्रास्ट्रक्चर बचत = ₹ 30,000

अत: कुल बचत = (45,000 + 25,000 + 30,000) = ₹ 1,00,000

∴ आयकर में छूट = ₹ 1,00,000 तक की बचत पर 100% = ₹ 1,00,000

∵ कर योग्य आय = 5,80,000 – 1,00,000 = ₹ 4,80,000

∴ कर योग्य आय ₹ 2,00,001 से 5,00,000 के मध्य है।

∴ आयकर = 2,00,000 से अधिक राशि का 10%

$= (4,80,000 - 2,00,000) \times 10\%$

$= 2,80,000 \times 10\%$

$= \frac{2,80,000 \times 10}{100} = ₹\ 28,000$

शिक्षा उपकर = आयकर का 2%

$= \frac{28,000 \times 2}{100} = ₹\ 560$

अत: शुद्ध देयकर आयकर = ₹ (28,000 + 560) = ₹ 28,560

प्रथम 11 माह में ₹ 1,600 प्रतिमाह की दर से जमा आयकर = 11 × 1,600 = ₹ 17,600

अत: वर्ष के अन्तिम माह में भुगतान किए जाने वाला कर = ₹ (28,560 – 17,600)

= ₹ 10,960 **उत्तर**

9. एक वित्तीय वर्ष में *X* की वार्षिक आय ₹ 3,95,000 है। वह अपने सामान्य भविष्य निधि खाते में ₹ 4,000 प्रतिमाह जमा करता है। वह ₹ 60,000 का राष्ट्रीय बचत-पत्र भी खरीदता है। *X* द्वारा देय आयकर ज्ञात कीजिए, जबकि बचत पर छूट की अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000 है।

आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,50,000 तक	**शून्य**
(ii) ₹ 1,50,001 से ₹ 3,00,000 तक	**₹ 1,50,000 से ऊपर की धनराशि का 10%**

इसके अतिरिक्त आयकर का 3% शिक्षा अधिभार भी लगता है।

हल– X की कुल वार्षिक आय = ₹ 3,95,000

भविष्य निधि बचत = $12 \times 4,000$ = ₹ 48,000

राष्ट्रीय बचत पत्र = ₹ 60,000

अत: कुल बचत = ₹ (48,000 + 60,000) = ₹ 1,08,000 > ₹ 1,00,000

आयकर में छूट = ₹ 1,00,000

अत: कर योग्य आय = ₹ (3,95,000 – 1,00,000) = ₹ 2,95,000

आयकर की दी गई दरों के अनुसार,

$$\text{आयकर} = 1,50,000 \text{ से अधिक आय का } 10\%$$

$$= ₹ (2,95,000 - 1,50,000) \times \frac{10}{100}$$

$$= ₹ \left(1,45,000 \times \frac{10}{100} \right)$$

$$= ₹ \frac{1,45,000 \times 10}{100} = ₹ 14,500$$

तथा शिक्षा अधिभार = आयकर का 3% $= \frac{14,500 \times 3}{100} =$ ₹ 435

अत: शुद्ध देय आयकर = ₹ (14,500 + 435) = ₹ **14,935** **उत्तर**

10. एक वित्तीय वर्ष में सोनू की मासिक आय ₹ 32,000 थी। उन्होंने ₹ 25,000 अपनी जीवन बीमा पॉलिसी का प्रीमियम तथा ₹ 6,000 प्रतिमाह भविष्य निधि में जमा किया। सोनू के देय आयकर की गणना कीजिए, जबकि बचत पर छूट की अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000 है।

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,60,000 तक	**शून्य**
(ii) ₹ 1,60,001 से ₹ 3,00,000 तक	**₹ 1,60,000 से ऊपर की धनराशि का 10%**

इसके अतिरिक्त आयकर का 3% शिक्षा अधिभार भी लगता है।

हल– सोनू की वार्षिक आय = $12 \times 32,000$ = ₹ 3,84,000

जीवन बीमा बचत = ₹ 25,000

भविष्य निधि बचत = $12 \times 6,000$ = ₹ 72,000

अत: कुल बचत = ₹ (25,000 + 72,000) = ₹ 97,000

आयकर में छूट = ₹ 97,000

कर योग्य आय = ₹ (3,84,000 – 97,000) = ₹ 2,87,000

आयकर की दरों के अनुसार,

देय आयकर = 1,60,000 से ऊपर की धनराशि आय का 10%

= ₹ (2,87,000 − 1,60,000) × 10%

$= ₹\left(1,27,000 \times \frac{10}{100}\right) = ₹ 12,700$

शिक्षा उपकर = आयकर का 3% $= \frac{12,700 \times 3}{100} = ₹ 381$

अतः शुद्ध देय आयकर = ₹ 12,700 + 381 = ₹ **13,081** **उत्तर**

11. श्री *A* एक वरिष्ठ नागरिक है। एक वित्तीय वर्ष में उनकी कुल आय ₹ 8,50,000 थी। उस वर्ष उन्होंने ₹ 1,00,000 का एन० एस० सी० खरीदा और ₹ 70,000 प्रधानमंत्री राहत कोष में जमा कराए। ₹ 50,000 एक शैक्षिक संस्था को भी दान दिया, जिस पर उन्हें आयकर में 50% की छूट मिली। ज्ञात कीजिए कि कितना आयकर उन्हें जमा करना होगा, यदि आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,85,000 तक	**शून्य**
(ii) ₹ 1,85,001 से ₹ 2,25,000 तक	**₹ 1,85,000 से ऊपर की धनराशि का 20%**
(iii) ₹ 2,50,001 से ऊपर	**₹ 13,000 + ₹ 2,50,000 से ऊपर की धनराशि का 30%**

कुल आयकर पर 2% शिक्षा उपकर भी देय है।

हल– श्री *A* की कुल वार्षिक आय = ₹ 8,50,000

बचत : एन० एस० सी० = ₹ 1,00,000

प्रधानमंत्री राहत कोष = ₹ 70,000

अतः कुल बचत = ₹ 1,00,000 + ₹ 70,000 = ₹ 1,70,000

शैक्षिक संस्था को दिया गया दान = ₹ 50,000

दान पर छूट = दान का 50%

$= ₹\frac{50,000 \times 50}{100} = ₹ 25,000$

कुल छूट = ₹ (1,70,000 + 25,000) = ₹ 1,95,000

कर योग्य आय = ₹ (8,50,000 − 1,95,000) = ₹ 6,55,000

चूँकि कर योग्य आय 2,50,001 से ऊपर है।

अतः देय आयकर = ₹ 13,000 + (6,55,000 − 2,50,000) का 30%

$= ₹\left(13,000 + 4,05,000 \times \frac{30}{100}\right)$

= ₹ (13,000 + 1,21,500) = ₹ 1,34,500

शिक्षा उपकर = देय आयकर का 2%

$= ₹\frac{1,34,500 \times 2}{100} = ₹ 2,690$

अतः शुद्ध देय आयकर = ₹ (1,34,500 + 2,690) = ₹ **1,37,190** **उत्तर**

12. एक महाविद्यालय के प्राचार्य का एक वित्तीय वर्ष में ₹ 45,000 वेतन था। उन्होंने ₹ 7,000 का प्रतिमाह एक अंशदान भविष्य निधि में जमा किया तथा ₹ 9,225 वार्षिक जीवन बीमा प्रीमियम का भुगतान किया। उन्होंने ₹ 10,000 का राष्ट्रीय बचत-पत्र भी खरीदा। आयकर से छूट के लिए स्वीकार्य अधिकतम धनराशि ₹ 1,00,000 है।

आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,50,000 तक	शून्य
(ii) ₹ 1,50,001 से ₹ 2,50,000 तक	₹ 1,50,000 से अधिक धनराशि का 10%
(iii) ₹ 2,50,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 10,000 + ₹ 2,50,000 से अधिक धनराशि का 20%
(iv) ₹ 5,00,000 से ऊपर	₹ 60,000 + ₹ 5,00,000 से अधिक धनराशि का 30%

देय आयकर पर 2% शिक्षा उपकर भी लगता है। प्राचार्य के आयकर की कुल धनराशि की गणना कीजिए।

हल– प्राचार्य की कुल वार्षिक आय $= 12 \times 45{,}000 = ₹ 5{,}40{,}000$

बचत : भविष्य निधि $= 12 \times 7{,}000 = ₹ 84{,}000$

जीवन बीमा $= ₹ 9{,}225$

राष्ट्रीय बचत-पत्र $= ₹ 10{,}000$

कुल बचत $= ₹ (84{,}000 + 9{,}225 + 10{,}000)$

$= ₹ 1{,}03{,}225 > ₹ 1{,}00{,}000$

अतः आयकर में छूट $= ₹ 1{,}00{,}000$

कर योग्य आय $= 5{,}40{,}000 - 1{,}00{,}000 = ₹ 4{,}40{,}000$

जो कि ₹ 2,50,001 से 5,00,000 के मध्य है।

अतः देय आयकर $= ₹ 10{,}000 + ₹ (4{,}40{,}000 - 2{,}50{,}000)$ का 20%

$= ₹ 10{,}000 + ₹ \frac{1{,}90{,}000 \times 20}{100}$

$= ₹ 10{,}000 + ₹ 38{,}000 = ₹ 48{,}000$

शिक्षा उपकर = देय आयकर का 2%

$= ₹ \frac{48{,}000 \times 2}{100} = ₹ 960$

अतः शुद्ध देय आयकर $= ₹ 48{,}000 + ₹ 960 = ₹ 48{,}960$ **उत्तर**

13. एक व्यक्ति राजकीय अधिकारी है, जिसको वित्तीय वर्ष 2008-09 में कुल ₹ 4,30,500 वेतन भुगतान हुआ तथा उन्होंने विशिष्ट निवेशों से ₹ 50,000 ब्याज प्राप्त किए। उन्होंने इसी अवधि में निम्नलिखित मदों में धन निवेश किए—

जी०पी०एफ०	**₹ 30,000**
पी०पी०एफ०	**₹ 16,000**
पंचवर्षीय डाकघर सावधि जमा	**₹ 50,000**

उपर्युक्त के अतिरिक्त ₹ 20,000 राष्ट्रीय सुरक्षा कोष तथा ₹ 10,000 प्रधानमंत्री राष्ट्रीय कोष में अनुदान दिए। उनके द्वारा देय आयकर की गणना कीजिए। आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,50,000 तक	शून्य
(ii) ₹ 1,50,001 से ₹ 1,80,000 तक	₹ 1,50,000 से अधिक धनराशि का 10%
(iii) ₹ 1,80,001 से ₹ 2,25,000 तक	₹ 3,000 + ₹ 1,80,000 से ऊपर की धनराशि का 10%
(iv) ₹ 2,25,001 से ₹ 3,00,000 तक	₹ 7,500 + ₹ 2,25,000 से ऊपर की धनराशि का 10%
(iv) ₹ 3,00,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 15,000 + ₹ 3,00,000 से ऊपर की धनराशि का 20%

उपर्युक्त के अतिरिक्त निम्नलिखित कर देय है—

शिक्षा उपकर देयकर का 2%

माध्यमिक तथा उच्चतर शिक्षा के लिए उपकर देय कर का 1%

हल– राजकीय अधिकारी का वार्षिक वेतन = ₹ 4,30,500

विशिष्ट निवेशों से प्राप्त ब्याज = ₹ 50,000

अतः अधिकारी की वार्षिक आय = ₹ 4,30,500 + ₹ 50,000 = ₹ 4,80,500

बचत : जी०पी०एफ० = ₹ 30,000

पी०पी०एफ० = ₹ 16,000

पंचवर्षीय डाकघर सावधि जमा = ₹ 50,000

राष्ट्रीय सुरक्षा कोष = ₹ 20,000

तथा प्रधानमंत्री राहत कोष = ₹ 10,000

कुल बचत = ₹ 1,26,000

अतः आयकर में कुल छूट = ₹ 1,26,000

कर योग्य आय = ₹ (4,80,500 – 1,26,000) = ₹ 3,54,500

जो कि ₹ 3,00,001 से 5,00,000 के मध्य है।

अतः देय आयकर = ₹ 15,000 + ₹ (3,54,500 – 3,00,000) का 20%

$$= ₹\,15,000 + ₹\,\frac{54,500 \times 20}{100}$$

$$= ₹\,(15,000 + 10,900) = ₹\,25,900$$

शिक्षा उपकर = देय आयकर का 2%

$$= ₹\,\frac{25,900 \times 2}{100} = ₹\,518$$

तथा उच्च शिक्षा के लिए उपकर = आयकर का 1%

$$= ₹\,\frac{25,900 \times 1}{100} = ₹\,259$$

अतः शुद्ध देय आयकर = ₹ (25,900 + 518 + 259) = ₹ **26,677** **उत्तर**

14. किसी व्यक्ति की प्रतिमाह आय ₹ 45,000 है। उसने प्रधानमंत्री राहत कोष में ₹ 60,000 जमा किया, जिस पर आयकर में 100% की छूट है। किसी मन्दिर में ₹ 10,000 दान किया जिस पर आयकर में 50% की छूट है, भविष्य निधि खाते में ₹ 7,500 प्रतिमाह, ₹ 12,000 वार्षिक जीवन बीमा में तथा ₹ 30,000 का राष्ट्रीय बचत पत्र खरीदता है। उस वित्तीय वर्ष में उसके द्वारा दिया गया आयकर ज्ञात कीजिए।

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,60,000 तक	कर मुक्त
(ii) ₹ 1,60,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 1,60,000 से ऊपर की धनराशि का 10%
(iii) ₹ 5,00,001 से ₹ 8,00,000 तक	₹ 34,000 + ₹ 5,00,000 से ऊपर आय का 20%
(iv) ₹ 2,25,001 से ₹ 3,00,000 तक	₹ 7,500 + ₹ 2,25,000 से ऊपर की धनराशि का 10%
(iv) ₹ अतिरिक्त शिक्षा अधिभार	आयकर का 3%

हल– व्यक्ति की वार्षिक आय $= 12 \times 45,000 =$ ₹ 5,40,000

बचत : भविष्य निधि $= 12 \times 7,500 =$ ₹ 90,000

जीवन बीमा = ₹ 12,000

राष्ट्रीय बचत-पत्र = ₹ 30,000

कुल बचत = ₹ (90,000 + 12,000 + 30,000)

= ₹ 1,32,000 > ₹ 1,00,000

परन्तु बचत पर अधिकतम छूट = ₹ 1,00,000

प्रधानमंत्री राहत कोष में जमा राशि = ₹ 60,000, जिस पर 100% छूट है

मन्दिर में दान दिया = ₹ 10,000

दान पर छूट = दान का 50%

$= ₹ \left(10,000 \times \frac{50}{100}\right) =$ ₹ 5,000

अतः कुल छूट = ₹ (1,00,000 + 60,000 + 5,000)

= ₹ 1,65,000

अतः कर योग्य आय = ₹ (5,40,000 – 1,65,000) = ₹ 3,75,000

जो कि ₹ 1,60,001 से ₹ 5,00,000 के मध्य है।

अतः देय आयकर = ₹ (3,75,000 – 1,60,000) का 10%

$= ₹ 2,15,000 \times \frac{10}{100} =$ ₹ 21,500

अतिरिक्त शिक्षा अधिभार = देय आयकर का 3%

$= ₹ 21,500 \times \frac{3}{100} =$ ₹ 645

अतः शुद्ध आयकर = ₹ (21,500 + 645) = ₹ **22,145** **उत्तर**

15. वित्तीय वर्ष 2012-13 में *A* की सकल आय ₹ 4,80,000 थी। वह ₹ 7,000 प्रतिमाह अपने सामान्य भविष्य निधि खाते में जमा करता है। व ₹ 50,000 के राष्ट्रीय बचत-पत्र

खरीदता है। उसके द्वारा वित्तीय वर्ष के अन्त में दिए जाने वाले आयकर को ज्ञात कीजिए। आयकर में छूट समस्त बचतों का 100% जिसकी अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000 है।

आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,90,000 तक	शून्य
(ii) ₹ 1,90,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 1,90,000 से अधिक धनराशि का 10%

इसके अतिरिक्त आयकर का 3% शिक्षा उपकर लगाया गया है।

हल– A की सकल आय = ₹ 4,80,000

बचत : भविष्य निधि = 12× 7,000 = ₹ 84,000

राष्ट्रीय बचत-पत्र = ₹ 50,000

अत: कुल बचत = ₹ 84,000 + ₹ 50,000

= ₹ 1,34,000 > ₹ 1,00,000

अत: कुल छूट = ₹ 1,00,000

कर योग्य आय = ₹ 4,80,000 – 1,00,000 = ₹ 3,80,000

आयकर की दरों के अनुसार,

आयकर = ₹ (3,80,000 – 1,90,000) का 10%

$= ₹ 1,90,000 \times \frac{10}{100} = ₹ 19,000$

शिक्षा उपकर = आयकर का 3%

$= 19,000 \times \frac{3}{100} = ₹ 570$

शुद्ध देय आयकर = ₹ (19,000 + 570) = ₹ 19,570 उत्तर

16. रवि जैन की मासिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) ₹ 90,000 है। वह ₹ 72,000 अपने भविष्य निधि खाते में जमा करता है तथा ₹ 24,000 अर्द्धवार्षिक प्रीमियम एल०आई०सी० में देता है। यदि वह वर्ष के प्रथम 11 माह के लिए ₹ 10,000 प्रतिमाह आयकर देता है तो वित्तीय वर्ष के अन्तिम माह में उसके द्वारा भुगतान किए जाने वाले आयकर को ज्ञात कीजिए।

आयकर में छूट : समस्त बचतों का 100% जिसकी अधिकतम सीमा ₹ 1,00,000 है।

आयकर की दरें निम्नलिखित हैं—

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 2,00,000 तक	शून्य
(ii) ₹ 2,00,001 से ₹ 5,00,000 तक	₹ 2,00,000 से अधिक धनराशि का 10%
(iii) ₹ 5,00,001 से ₹ 8,00,000 तक	₹ 30,000 + ₹ 5,00,000 से अधिक धनराशि का 20%
(iv) ₹ 8,00,000 से अधिक	₹ 90,000 + ₹ 8,00,000 से अधिक धनराशि का 30%

इसके अतिरिक्त आयकर का 3% अधिभार भी लगता है।

हल– रवि जैन की वार्षिक आय = 12× 90,000 = ₹ 10,80,000

बचत : भविष्य निधि = ₹ 72,000

एल०आई०सी० = 2× 24,000 = ₹ 48,000

कुल बचत = ₹ 72,000 + 48,000

= ₹ 1,20,000 > 1,00,000

आयकर में छूट = ₹ 1,00,000

अत: कर योग्य आय = ₹ (10,80,000 – 1,00,000) = ₹ 9,80,000

जो कि ₹ 8,00,000 से अधिक है।

अत: आयकर = ₹ 90,000 + ₹ (9,80,000 – 8,00,000) का 30%

$= ₹\ 90,000 + ₹\frac{1,80,000 \times 30}{100}$

= ₹ (90,000 + 54,000) = ₹ 1,44,000

शिक्षा उपकर = आयकर का 3%

$= ₹\frac{1,44,000 \times 3}{100} = ₹\ 4,320$

अत: कुल आयकर = ₹ (1,44,000 + 4,320) = ₹ 1,48,320

11 माह तक चुकाया गया आयकर = 11× 10,000 = ₹ 1,10,000

अत: वर्ष के अन्तिम माह में रवि जैन द्वारा भुगतान किया जाने वाला आयकर

= ₹ (1,48,320 – 1,10,000) = ₹ **38,320** **उत्तर**

17. किसी वित्तीय वर्ष में किसी कर्मचारी की सकल वार्षिक आय (मकान किराया भत्ता छोड़कर) ₹ 4,65,000 है। वह प्रतिमाह ₹ 4,500 अपने भविष्य निधि खाते तथा ₹ 25,000 वार्षिक जीवन बीमा प्रीमियम जमा करता है। वह ₹ 30,000 के राष्ट्रीय बचत बचत-पत्र खरीदता है। प्रधानमंत्री राहत कोष (जो 100% कर मुक्त है) में ₹ 18,000 तथा चैरिटेबल ट्रस्ट में ₹ 12,000 (जिसका 50% कर मुक्त है) दान करता है। उसके द्वारा वर्ष के अन्त में देय आयकर ज्ञात कीजिए। (बचतें ₹ 1,00,000 तक कर मुक्त है) आयकर की दरें निम्नवत् हैं।

कर योग्य आय	आयकर
(i) ₹ 1,60,000 तक	**शून्य**
(ii) ₹ 1,60,001 से ₹ 5,00,000 तक	**₹ 1,60,000 से अधिक धनराशि का 10%**
(iii) शिक्षा उपकर	**देयकर का 3%**

हल– कर्मचारी की सकल वार्षिक आय = ₹ 4,65,000

बचत : भविष्य निधि = 12× 45,00 = ₹ 54,000

जीवन बीमा = ₹ 25,000

राष्ट्रीय बचत-पत्र = ₹ 30,000

अत: कुल बचत = ₹ 54,000 + 25,000 + 30,000

= ₹ 1,09,000 > 1,00,000

अत: कुल बचत पर छूट = ₹ 1,00,000

प्रधानमंत्री राहत कोष में जमा राशि = ₹ 18,000 (जो 100% कर मुक्त है)

चैरिटेबल ट्रस्ट में दान = ₹ 12,000

दान पर छूट = ₹ 12,000 का 50%

$= ₹ \frac{12,000 \times 50}{100} = ₹ 6,000$

अतः कुल कर मुक्त धनराशि = ₹ (1,00,000 + 18,000 + 6,000)

= ₹ 1,24,000

अतः कर योग्य आय = ₹ (4,65,000 – 1,24,000) = ₹ 3,41,000

अब आयकर की दरों के अनुसार,

आयकर = ₹ (3,41,000 – 1,60,000) का 10%

$= ₹ 1,81,000 \times \frac{10}{100} = ₹ 18,100$

शिक्षा उपकर = आयकर का 3%

$= ₹ \frac{18,100 \times 3}{100} = ₹ 543$

अतः शुद्ध देय आयकर = ₹ 18,100 + 543 = ₹ **18,643** उत्तर

18. वित्तीय वर्ष 2009-10 में (गृह किराया भत्ता छोड़कर) किसी व्यक्ति की वार्षिक आय ₹ 2.85,400 है। वह ₹ 36,000 भविष्य निधि में, ₹ 8,000 जीवन बीमा निगम में और ₹ 10,000 राष्ट्रीय बचत योजना में लगाता है। उसको वार्षिक देय आयकर पर 3% शिक्षा कर भी देना पड़ेगा। यदि वह ₹ 600 प्रतिमाह आयकर 11 माह तक जमा करता है, तो ज्ञात कीजिए कि अन्तिम माह में उसे कितना आयकर जमा करना होगा। आयकर गणना करने के पहले ज्ञातव्य है कि निम्नलिखित योजनाओं में लगाई गई धनराशि अधिकतम ₹ 1,00,000 कर मुक्त है। (i) भविष्य निधि, (ii) जीवन बीमा राशि, (iii) राष्ट्रीय बचत पत्र में नियोजित राशि।

आयकर की दरें निम्नवत् हैं—

कर योग्य आय	**आयकर**
(i) ₹ 1,50,000 तक	**शून्य**
(ii) ₹ 1,50,001 से ₹ 3,00,000 तक	**₹ 1,50,000 से अधिक धनराशि का 10%**

हल– व्यक्ति की वार्षिक आय = ₹ 2,85,400

बचत : भविष्य निधि = ₹ 36,000

जीवन बीमा = ₹ 8,000

राष्ट्रीय बचत योजना = ₹ 10,000

अतः कुल बचत = ₹ (36,000 + 8,000 + 10,000) = ₹ 54,000

बचतों पर अधिकतम छूट = ₹ 1,00,000

अतः कुल छूट = ₹ 54,000

कर योग्य आय = ₹ (2,85,400 – 54,000) = ₹ 2,31,400

आयकर की दरों के अनुसार,

आयकर = ₹ (2,31,400 – 1,50,000) का 10%

$$= 81{,}400 \times \frac{10}{100} = ₹\ 8{,}140$$

शिक्षा कर = आयकर का 3%

$$= \frac{8{,}140 \times 3}{100} = ₹\ 244.2 = ₹\ 244$$

अतः शुद्ध देय आयकर $= ₹\ (8{,}140 + 244) = ₹\ 8{,}384$

₹ 600 प्रतिमाह की दर से 11 माह में जमा आयकर $= 600 \times 11 = ₹\ 6{,}600$

अतः वर्ष के अन्तिम माह में व्यक्ति द्वारा देय आयकर

$= ₹\ 8{,}384 - 6600 = ₹\ \mathbf{1{,}784}$ **उत्तर**

अभ्यास 4.2

1. रामू ने एक मोटर साइकिल ₹ 49,500 में खरीदी (बिक्रीकर सहित) यदि बिक्रीकर की दर 10% हो, तो मोटर साइकिल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

मोटर साइकिल का विक्रय मूल्य = ₹ 49,500

तथा बिक्री कर की दर = 10%

माना मोटर साइकिल का मूल्य = x

$$\text{बिक्री कर की राशि} = \frac{\text{मूल्य} \times \text{बिक्रीकर की दर}}{100}$$

$$= \frac{x \times 10}{100} = \frac{x}{10}$$

विक्रय मूल्य = मूल्य + बिक्रीकर

$$49{,}500 = x + \frac{x}{10} \quad \text{या} \quad 49{,}500 = \frac{10x + x}{10}$$

या $$49{,}500 = \frac{11x}{10}$$

या $$x = \frac{49{,}500 \times 10}{11}$$

$= 4500 \times 10 = ₹\ \mathbf{45{,}000}$ **उत्तर**

2. यदि किसी वस्तु का अंकित मूल्य ₹ 120 है तथा उसकी बिक्रीकर की दर 12.5% है, तो वस्तु का विक्रय मूल्य परिकलित कीजिए।

हल– दिया है—

वस्तु का अंकित मूल्य = ₹ 120

बिक्रीकर की दर = 12.5%

$$\text{बिक्रीकर} = \frac{\text{अंकित मूल्य} \times \text{बिक्रीकर की दर}}{100}$$

$$= \frac{120 \times 12.5}{100} = \frac{1500}{100} = ₹\ 15$$

विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य + बिक्रीकर

$= ₹\ (120 + 15) = ₹\ \mathbf{135}$ **उत्तर**

3. एक रेडियो का मूल्य ₹ 1308 है तथा उस पर बिक्रीकर की दर 9% है। ग्राहक ने दुकानदार से रेडियो का मूल्य इतना कम करने के लिए कहा जिससे उसे ₹ 1308 (बिक्रीकर सहित) ही देने पड़े तो रेडियो के मूल्य में आवश्यक कमी गणना कीजिए।

हल– माना रेडियो के मूल्य में कमी करने पर मूल्य = ₹ x

$$\text{बिक्रीकर} = \frac{\text{मूल्य} \times \text{बिक्रीकर की दर}}{100}$$

$$= \frac{x \times 9}{100} = ₹ \frac{9x}{100}$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} + \text{बिक्रीकर}$$

$$1308 = x + \frac{9x}{100} \quad \text{या} \quad 1308 = \frac{100x + 9x}{100}$$

या $$1308 = \frac{109x}{100}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1308 \times 100}{109} = 12 \times 100 = ₹\ 1200$$

अत: रेडियो के मूल्य में कमी = ₹ (1308 – 1200) = ₹ **108** **उत्तर**

4. एक टी०वी० का बिक्रीकर सहित मूल्य ₹ 13,440 है। यदि उसका अंकित मूल्य ₹ 12,000 है, तो बिक्रीकर की दर ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

टी०वी० का विक्रय मूल्य = ₹ 13,440

टी०वी० का अंकित मूल्य = ₹ 12,000

अत: $$\text{बिक्रीकर} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{अंकित मूल्य}$$

$$= 13,440 - 12,000 = ₹\ 1,440$$

$$\text{बिक्री कर की दर} = \frac{\text{बिक्रीकर} \times 100\%}{\text{अंकित मूल्य}}$$

$$= \frac{1,440 \times 100}{12,000} = \mathbf{12\%}$$ **उत्तर**

5. एक वस्तु का अंकित मूल्य ₹ 16,000 है, जिस पर 12.5% की छूट मिलती है। यदि बिक्रीकर की दर 8% हो, तो वस्तु को खरीदने के लिए देय कुल धनराशि की गणना कीजिए।

हल– दिया है—

वस्तु का अंकित मूल्य = ₹ 16,000

अंकित मूल्य पर छूट की दर = 12.5% तथा बिक्रीकर की दर = 8%

अत: छूट = 16,000 का 12.5%

$$= \frac{16,000 \times 12.5}{100} = ₹\ 2,000$$

अत: वस्तु का विक्रय मूल्य = 16,000 – 2,000 = ₹ 14,000

$$\text{बिक्रीकर} = \frac{\text{विक्रय मूल्य} \times \text{बिक्रीकर की दर}}{100}$$

$$= \frac{14,000 \times 8}{100} = ₹\ 1,120$$

अत: टी०वी० खरीदने के लिए देय राशि = 14,000 + 1,120 = ₹ **15,120** **उत्तर**

6. मोहन ने एक ग्राइंड मिक्सर खरीदा, जिसका अंकित मूल्य ₹ 2,568 है। यदि मोहन को 7% बिक्रीकर सहित ₹ 2,568 ही देने पड़े, तो ग्राइंड मिक्सर का मूल्य कितना कम करना होगा?

हल– माना मिक्सर का मूल्य कम करने पर मूल्य = ₹ x

दिया है— बिक्रीकर की दर = 7%

तथा बिक्रीकर सहित (विक्रय) मूल्य = ₹ 2,568

$$\text{बिक्रीकर} = x \text{ का } 7\% = \frac{x \times 7}{100} = ₹\frac{7x}{100}$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{मूल्य} + \text{बिक्रीकर}$$

या $$2{,}568 = x + \frac{7x}{100}$$

या $$2{,}568 = \frac{107x}{100} \Rightarrow x = \frac{2{,}568 \times 100}{107} = ₹ 2{,}400$$

अत: ग्राइंड मिक्सर के मूल्य में कमी = 2,568 – 2,400 = **₹ 168** **उत्तर**

7. एक व्यक्ति किसी वाशिंग मीशन को बिक्रीकर सहित ₹ 6,510 में खरीदता है। यदि बिक्रीकर की दर 5% हो, तो वाशिंग मशीन का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल– माना वाशिंग मशीन का अंकित मूल्य = ₹ x है।

दिया है— बिक्री कर की दर = 5%

तथा बिक्रीकर सहित वाशिंग मशीन का मूल्य = ₹ 6,510

$$\text{बिक्रीकर} = x \text{ का } 5\% = \frac{x \times 5}{100} = ₹\frac{5x}{100}$$

$$\text{अंकित मूल्य} + \text{बिक्री कर} = \text{बिक्रीकर सहित मूल्य}$$

या $$x + \frac{x}{20} = 6{,}510 \quad \text{या} \quad \frac{20x + x}{20} = 6{,}510$$

या $$\frac{21x}{20} = 6{,}510$$

या $$x = \frac{6{,}510 \times 20}{21} = 310 \times 20 = ₹ 6{,}200$$ **उत्तर**

8. रहमान ₹ 5,500 कीमत की वस्तु को 5% छूट में खरीदता है। 5% की दर से बिक्रीकर देने पर रहमान को वस्तु के कितने रुपये देने पड़ेंगे।

हल– दिया है— वस्तु का अंकित मूल्य = ₹ 5,500

छूट की दर = 5%

अत: वस्तु पर छूट = 5,500 का 5%

$$= \frac{5{,}500 \times 5}{100} = ₹ 275$$

छूट के बाद वस्तु का विक्रय मूल्य = 5,500 – 275 = ₹ 5,225

अब, विक्रय मूल्य पर बिक्रीकर की दर = 5%

अत: बिक्रीकर = 5,225 का 5%

$$= \frac{5{,}225 \times 5}{100} = ₹ 26125$$

अत: वस्तु को खरीदने के लिए देय राशि = 5,225 + 26125 = **₹ 5,486.25** **उत्तर**

9. 8% व्यापार कर सहित एक वस्तु का विक्रय मूल्य ₹ 810 है। वस्तु का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल– माना वस्तु का अंकित मूल्य = ₹ x

बिक्रीकर की दर = 8%

अतः बिक्रीकर = x का 8% = $\frac{x \times 8}{100} = ₹ \frac{2x}{25}$

वस्तु का अंकित मूल्य + बिक्रीकर = विक्रय मूल्य

या $x + \frac{2x}{25} = 810$ या $\frac{27x}{25} = 810$

या $x = \frac{810 \times 25}{27} = 30 \times 25 = ₹ 750$ **उत्तर**

10. एक बाइक ₹ 40,500 में किसी शोरूम में उपलब्ध है। यदि उसका वास्तविक मूल्य ₹ 36,000 है, तो बिक्रीकर की दर ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

वास्तविक (अंकित) मूल्य = ₹ 36,000

विक्रय मूल्य = ₹ 40,500

अतः बिक्रीकर = 40,500 − 36,000 = ₹ 4,500

बिक्रीकर की दर = $\frac{\text{बिक्रीकर} \times 100\%}{\text{अंकित मूल्य}}$

$= \frac{4,500 \times 100}{36,000}\% = 12.5\%$ **उत्तर**

11. राहुल ने बाजार से ₹ 540 के जूते, ₹ 300 की पुस्तकें व ₹ 160 की कॉपियाँ खरीदीं। उसे जूते, पुस्तकें और कापियों पर मूल्य के अतिरिक्त क्रमशः 10%, शून्य और 5% बिक्री कर भी देना पड़ा। कुल देय धनराशि की गणना कीजिए।

हल– दिया है— जूतों का अंकित मूल्य = ₹ 540

जूतों पर बिक्रीकर की दर = 10%

अतः जूतों पर बिक्रीकर = 540 का 10% = $\frac{540 \times 10}{100} = ₹ 54$

अतः जूतों के लिए देय राशि = ₹ 540 + 54 = ₹ 594

पुस्तकों का अंकित मूल्य = ₹ 300

पुस्तकों पर बिक्रीकर की दर = शून्य

पुस्तकों के लिए देय राशि = ₹ 300

कॉपियों का अंकित मूल्य = ₹ 160 तथा बिक्रीकर की दर = 5%

अतः कॉपियों पर बिक्रीकर = 160 का 5% = $\frac{160 \times 5}{100} = ₹ 8$

अतः कॉपियों के लिए देय राशि = ₹ 160 + 8 = ₹ 168

अतः राहुल द्वारा देय कुल राशि = ₹ (594 + 300 + 168) = **₹ 1062** **उत्तर**

12. रवि ने बाजार से निम्नलिखित वस्तुएँ खरीदी—

(i) ₹ 300 की एक बरसाती, बिक्रीकर की दर 10%

(ii) ₹ 460 के जूते, बिक्रीकर की दर 9%

(iii) ₹ 450 के खाद्य पदार्थ, बिक्रीकर की दर 5%

(iv) ₹ 800 के कपड़े, बिक्रीकर की दर 1%

देय धनराशि की गणना कीजिए।

हल– (i) बरसाती का अंकित मूल्य = ₹ 300 तथा बिक्रीकर की दर = 10%

अतः बरसाती पर बिक्रीकर = 300 का 10% $= \frac{300 \times 10}{100} =$ ₹ 30

बरसाती का विक्रय मूल्य = ₹ (300 + 30) = **₹ 330**

(ii) जूतों का अंकित मूल्य = ₹ 460 तथा बिक्रीकर की दर = 9%

अतः जूतों पर बिक्रीकर = 460 का 9% $= \frac{460 \times 9}{100} =$ ₹ 41.40

जूतों का विक्रय मूल्य = ₹ (460 + 41.40) = **₹ 501.40**

(iii) खाद्य पदार्थों का अंकित मूल्य = ₹ 450 तथा बिक्रीकर की दर = 5%

अतः खाद्य पदार्थों पर बिक्रीकर = 450 का 5% $= \frac{450 \times 5}{100} =$ ₹ 22.50

जूतों का विक्रय मूल्य = ₹ (450 + 22.50) = **₹ 472.5**

(iv) कपड़ों का अंकित मूल्य = ₹ 800 तथा बिक्रीकर की दर = 1%

अतः कपड़ों पर बिक्रीकर = 800 का 1% $= \frac{800 \times 1}{100} =$ ₹ 8

जूतों का विक्रय मूल्य = ₹ (800 + 8) = **₹ 808**

अतः रवि द्वारा देय कुल धनराशि = ₹ (330 + 501.40 + 472.5 + 808)

= **₹ 2,111.9** उत्तर

13. सरिता ने ₹ 11,600 अंकित मूल्य का कोई सामान खरीदा। अंकित मूल्य पर उसे 5% की छूट मिलती है। यदि छूट मिलने के उपरान्त 5% की दर से बिक्रीकर लिया गया हो, तो कुल कितने रुपये देने होंगे।

हल– सरिता द्वारा खरीदे गए सामान का अंकित मूल्य = ₹ 11,600

अंकित मूल्य पर छूट की दर = 5%

अतः छूट की राशि = 11,600 का 5% $= \frac{11,600 \times 5}{100} =$ ₹ 580

छूट मिलने के बाद सामान का मूल्य = ₹ (11,600 – 580) = ₹ 11,020

अब, इस मूल्य पर बिक्रीकर की दर = 5%

अतः बिक्रीकर की राशि = 11,020 का 5% $= \frac{11,020 \times 5}{100} =$ ₹ 551

अतः सरिता द्वारा देय राशि = ₹ (11,020 + 551) = **₹ 11,571** उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट– बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 90 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-3 सांख्यिकी (Statistics)

5

केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें
(Measures of Central Tendency)

अभ्यास 5.1

1. 8, 13, 2x, 7 और 20 का समान्तर माध्य 16 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए गए पद $= 8, 13, 2x, 7$ और 20 तथा समान्तर माध्य $= 16$

अत: $\Sigma x = 8+13+2x+7+20 = 48+2x$

तथा पदों की संख्या $(n) = 5$

सूत्र— समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma x}{n}$ से

$$16 = \frac{48+2x}{5} \quad \text{या} \quad 80 = 48+2x$$

या $2x = 80-48$

या $2x = 32 \Rightarrow x = \mathbf{16}$ **उत्तर**

2. निम्नलिखित का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

72, 74, 76, 73,70, 78, 75, 79, 76, 69

हल– दिए हुए पद $= 72, 74, 76, 73,70, 78, 75, 79, 76, 69$

$$\Sigma x = 72+74+76+73+70+78+75+79+76+69 = 742$$

पदों की संख्या $(n) = 10$

अत: समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{742}{10} = \mathbf{74.2}$ **उत्तर**

3. दस संख्याओं का समान्तर माध्य 16 है। यदि उनमें से एक संख्या को 10 कम कर दिया जाए, तो नया समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— पदों की संख्या $(n) = 10$

समान्तर माध्य $= 16$

हम जानते हैं— समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma x}{n}$

या $\Sigma x = n \times$ समान्तर माध्य

$= 10 \times 16 = 160$

एक संख्या को 10 कम करने पर,

पदों का कुल योग $\Sigma x = 160 - 10 = 150$

अतः $$\text{नया समान्तर माध्य} = \frac{\text{पदों का योग } (\Sigma x)}{\text{पदों की संख्या } (n)} = \frac{150}{10} = \mathbf{15}$$ **उत्तर**

4. 13 अंकों का समान्तर माध्य 68 है। प्रथम सात अंकों का समान्तर माध्य 63 है और अन्तिम 7 अंकों का समान्तर माध्य 70 है। सातवाँ अंक ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— अंकों की संख्या $(n) = 13$

तथा समान्तर माध्य $= 68$

अतः पदों का योग $(\Sigma x) =$ पदों की संख्या $\times$ समान्तर माध्य

$= 13 \times 68 = 884$

प्रथम सात अंकों का समान्तर माध्य $= 63$

अतः प्रथम सात अंकों का योग $= 7 \times 63 = 441$

अंतिम सात अंकों का समान्तर माध्य $= 70$

अतः अन्तिम सात अंकों का योग $= 7 \times 70 = 490$

चूँकि सातवाँ अंक प्रथम सात एवं अन्तिम सात दोनों समूहों में सम्मिलित है।

अतः सातवाँ अंक = प्रथम सात अंकों का योग + अन्तिम सात अंकों का योग

-13 अंकों का योग

$= 441 + 490 - 884$

$= 931 - 884 = \mathbf{47}$ **उत्तर**

5. 40 संख्याओं का समान्तर माध्य 65 है। यदि प्रत्येक संख्या में 5 की वृद्धि कर दी जाए, तो नई संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— अंकों की संख्या $(n) = 40$

तथा समान्तर माध्य $= 65$

अतः संख्याओं का योग $(\Sigma x) = n \times$ समान्तर माध्य

$= 40 \times 65 = 2600$

प्रत्येक संख्या में 5 की वृद्धि करने पर, नई संख्या का योग

$(\Sigma x) = 2500 + 40 \times 5$

$= 2600 + 200 = 2800$

अतः नई संख्याओं का समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{2800}{40} = \mathbf{70}$ **उत्तर**

6. यदि n संख्याओं $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ का समान्तर माध्य m है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संख्या में a जोड़ने पर समान्तर माध्य $(m + a)$ होगा।

हल– दिया है— पदों की संख्या $= n$

तथा समान्तर माध्य $= m$

अतः पदों का योग $\Sigma x =$ पदों की संख्या $\times$ समान्तर माध्य

$= n \times m = nm$

प्रत्येक संख्या में a जोड़ने पर नई संख्याओं का योग

$(\Sigma x) = nm + na = n(m + a)$

नई संख्याओं का समान्तर माध्य $= \dfrac{\text{नई संख्याओं का योग}}{\text{पदों (संख्याओं) की संख्या}}$

$$= \frac{n(m+a)}{n} = m + a$$ इति सिद्धम्

7. यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ का माध्य $\overline{X}$ हो, तो $mx_1, mx_2, mx_3, \ldots\ldots, mx_n$ का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल— हम जानते हैं कि यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ का समान्तर माध्य $\overline{X}$ हो, तो

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{n}$$

अब, $mx_1, mx_2, mx_3, \ldots\ldots, mx_n$ का समान्तर माध्य

$$= \frac{mx_1 + mx_2 + mx_3 + \ldots\ldots + mx_n}{n}$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n)}{n} = m\overline{X}$$ उत्तर

8. 10 पदों का समान्तर माध्य 24 तथा अंतिम 8 पदों का समान्तर माध्य 20 है। प्रथम दो पदों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— पदों की संख्या $(n) = 10$

तथा समान्तर माध्य $= 24$

अत: पदों का योग (Σx) = पदों की संख्या × समान्तर माध्य

$= 10 \times 24 = 240$

तथा अन्तिम 8 पदों का समान्तर माध्य $= 20$

अत: अन्तिम 8 पदों का योग $= 8 \times 20 = 160$

प्रथम दो पदों का योग = 10 पदों का योग − अंतिम 8 पदों का योग

$= 240 - 160 = 80$

अत: प्रथम दो पदों का समान्तर माध्य $= \dfrac{80}{2} = \mathbf{40}$ उत्तर

9. निम्नलिखित आंकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

चर (x)	10	20	30	40	50
बारम्बारता (f)	6	8	9	5	2

हल–

चर (x)	बारम्बारता (f)	fx
10	6	60
20	8	160
30	9	270
40	5	200
50	2	100
योग	$\Sigma f = 30$	$\Sigma fx = 790$

सूत्र— समान्तर माध्य $=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

अत: समान्तर माध्य $=\frac{790}{30}=26.33$ उत्तर

10. समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

x	10	30	50	75	89
f	7	8	10	15	10

हल–

x	f	fx
10	7	70
30	8	240
50	10	500
75	15	1125
89	10	890
योग	$\Sigma f=50$	$\Sigma fx=2825$

सूत्र— समान्तर माध्य $=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

अत: समान्तर माध्य $=\frac{2825}{50}=56.50$ उत्तर

11. निम्नलिखित सारणी का समान्तर माध्य लघु विधि द्वारा ज्ञात कीजिए—

x	31	32	33	34	35
f	6	14	16	9	5

हल– लघु विधि द्वारा समान्तर माध्य की गणना—माना कल्पित माध्य, $A=33$

x	f	कल्पित माध्य से विचलन $d=x-A$	fd
31	6	$31-33=-2$	$6\times(-2)=-12$
32	14	$32-33=-1$	$14\times(-1)=-14$
$33=(A)$	16	$33-33=0$	$16\times0=0$
34	9	$34-33=1$	$9\times1=9$
35	5	$35-33=2$	$5\times2=10$
योग	$\Sigma f=50$		$\Sigma fd=-7$

सूत्र— समान्तर माध्य $=A+\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

अत: समान्तर माध्य $=33+\frac{-7}{50}=33-0.14=32.86$ उत्तर

12. निम्नलिखित सारणी में एक कक्षा में 50 छात्रों के भार दिए गए हैं—

भार (किग्रा में)	45	46	47	48
छात्रों की संख्या	15	10	20	5

छात्रों के भारों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल–

भार (किग्रा में) x	छात्रों की संख्या f	fx
45	15	675
46	10	460
47	20	940
48	5	240
योग	$\Sigma f = 50$	$\Sigma fx = 2315$

सूत्र— $\text{समान्तर माध्य} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

अतः $\text{समान्तर माध्य} = \dfrac{2315}{50} = 46.30$ किग्रा उत्तर

13. यदि निम्नलिखित सारणी का समान्तर माध्य 15 है, तो P का मान ज्ञात कीजिए।

x	5	10	15	20	25
f	6	P	6	10	5

हल–

x	f	fx
5	6	$5 \times 6 = 30$
10	P	$10 \times P = 10P$
15	6	$15 \times 6 = 90$
20	10	$20 \times 10 = 200$
25	5	$25 \times 5 = 125$
योग	$\Sigma f = 27 + P$	$\Sigma fx = 10P + 445$

सूत्र— $\text{समान्तर माध्य} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$ या $15 = \dfrac{10P + 445}{27 + P}$

या $405 + 15P = 10P + 445$

या $15P - 10P = 445 - 405$ या $5P = 40$

या $P = \dfrac{40}{5} = 8$ उत्तर

14. निम्नलिखित सारणी का समान्तर माध्य लघु विधि से ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	84–90	90–96	96–102	102–108	108–114
बारम्बारता	8	12	15	10	5

हल– लघु विधि द्वारा समान्तर माध्य की गणना—

वर्ग अन्तराल	मध्यमान x	बारम्बारता f	कल्पित माध्य से विचलन $d = x - A$	fd
84 – 90	87	8	$87 - 99 = -12$	$8 \times (-12) = -96$
90 – 96	93	12	$93 - 99 = -6$	$12 \times (-6) = -72$
96 – 102	$99 = (A)$	15	$99 - 99 = 0$	$15 \times 0 = 0$
102 – 108	105	10	$105 - 99 = 6$	$10 \times 6 = 60$
108 – 114	111	5	$111 - 99 = 12$	$5 \times 12 = 60$
योग		$\Sigma f = 50$		$\Sigma fd = -48$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$$

अतः $$\text{समान्तर माध्य} = 99 + \frac{-48}{50} = 99 - \frac{48}{50}$$

$$= 99 - 0.96 = \mathbf{98.04}$$ उत्तर

15. निम्नलिखित आँकड़ों का पद विचलन विधि द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	50 – 70	70 – 90	90 – 110	110 – 130	130 – 150	150 – 170
बारम्बारता	18	12	13	27	8	22

हल– माना कल्पित माध्य $= 100$ तथा $h = 20$

वर्ग अन्तराल	मध्यमान x	बारम्बारता f	कल्पित माध्य से विचलन $d = x - A$	$u = \frac{x - A}{h}$	$f \times u$
50 – 70	60	18	$60 - 100 = -40$	-2	-36
70 – 90	80	12	$80 - 100 = -20$	-1	-12
90 – 110	$100 = (A)$	13	$100 - 100 = 0$	0	0
110 – 130	120	27	$120 - 100 = 20$	1	27
130 – 150	140	8	$140 - 100 = 40$	2	16
150 – 170	160	22	$160 - 100 = 60$	3	66
योग		$\Sigma fi = 100$			$\Sigma fiui = 61$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = A + h\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}$$

अतः $$\text{समान्तर माध्य} = 100 + 20 \times \frac{61}{100}$$

$$= 100 + 20 \times 0.61 = 100 + 12.20$$

$$= \mathbf{112.20}$$ उत्तर

16. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी का समान्तर $113\frac{23}{29}$ है। इसमें अज्ञात राशि (X) का मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0–40	40–80	80–120	120–160	160–200
बारम्बारता	X	20	35	30	23

हल– माना कल्पित माध्य $(A) = 100$ तथा $h = 40$

वर्ग	मध्यमान x	बारम्बारता f	$d = x - A$	$u = \frac{x-A}{h}$	$f \times u$
0–40	20	X	$20 - 100 = -80$	-2	$-2X$
40–80	60	20	$60 - 100 = -40$	-1	-20
80–120	$100 = (A)$	35	$100 - 100 = 0$	0	0
120–160	140	30	$140 - 100 = 40$	1	30
160–200	180	23	$180 - 100 = 80$	2	46
योग		$\Sigma f_i = X + 108$			$\Sigma f_i u_i = 56 - 2X$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = A + h\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$$

या $$113\frac{23}{29} = 100 + 40 \times \frac{56 - 2X}{X + 108}$$

या $$\frac{3300}{29} - 100 = 40 \times \frac{56 - 2X}{X + 108}$$

या $$\frac{3300 - 2900}{29} = 40 \times \frac{56 - 2X}{X + 108}$$

या $$\frac{400}{29} = 40 \times \frac{56 - 2X}{X + 108}$$

या $$\frac{400}{29 \times 40} = \frac{56 - 2X}{X + 108} \quad \text{या} \quad \frac{10}{29} = \frac{56 - 2X}{X + 108}$$

या $$10X + 1080 = 1624 - 58X$$

या $$10X + 58X = 1624 - 1080$$

या $$68X = 544 \quad \text{या} \quad X = \frac{544}{68} = 8$$ उत्तर

17. अग्रलिखित सारणी एक मोहल्ले के बच्चों का दैनिक जेब खर्च प्रदर्शित करती है। यदि समान्तर माध्य जेब खर्च ₹ 18 है तो बारम्बारता f ज्ञात कीजिए—

दैनिक जेब खर्च (₹ में)	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
बारम्बारता	7	6	9	13	f	5	4

हल– समान्तर माध्य = ₹ 18

दैनिक जेब खर्च (₹ में)	मध्यमान (x)	बारम्बारता (f)	Σfx
11 – 13	12	7	84
13 – 15	14	6	84
15 – 17	16	9	144
17 – 19	18	13	234
19 – 21	20	f	$20f$
21 – 23	22	5	110
23 – 25	24	4	96
योग		$\Sigma f = 44 + f$	$\Sigma fx = 20f + 752$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$18 = \frac{20f + 752}{44 + f}$$

या $$792 + 18f = 20f + 752$$

या $$792 - 752 = 20f - 18f$$

या $$40 = 2f \Rightarrow f = \frac{40}{2} = \mathbf{20}$$ उत्तर

18. यदि निम्नलिखित आँकड़ों का समान्तर माध्य 21.5 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए—

वर्ग अन्तराल	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
बारम्बारता	6	4	3	k	2

हल– दिया है—समान्तर माध्य = 21.5

वर्ग अन्तराल	मध्यमान (x)	बारम्बारता (f)	$f \times x$
0 – 10	5	6	30
10 – 20	15	4	60
20 – 30	25	3	75
30 – 40	35	k	$35k$
40 – 50	45	2	90
योग		$\Sigma f = k + 15$	$\Sigma fx = 35k + 255$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$21.5 = \frac{35k + 255}{k + 15}$$

या $$21.5k + 322.5 = 35k + 255$$

या $$322.5 - 255 = 35k - 21.5k$$

$$67.5 = 13.5k \quad \text{या} \quad k = \frac{67.5}{13.5} = \mathbf{5}$$ उत्तर

19. एक उप बस्ती के 70 घरों में पानी उपयोग का खर्च (₹ में) निम्नलिखित में दिया गया है। प्रति घर माध्य खर्च (₹ में) ज्ञात कीजिए—

पानी पर खर्च (₹ में)	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70
घरों की संख्या	7	5	7	8	9	11	7	5	4	4	3

हल– समान्तर माध्य = ₹ 18

पानी पर खर्च (₹ में)	मध्यमान (x)	घरों की संख्या (f)	fx
15 – 20	17.5	7	122.50
20 – 25	22.5	5	112.50
25 – 30	27.5	7	192.50
30 – 35	32.5	8	260.00
35 – 40	37.5	9	337.50
40 – 45	42.5	11	467.50
45 – 50	47.5	7	332.50
50 – 55	52.5	5	262.50
55 – 60	57.5	4	230.00
60 – 65	62.5	4	250.00
65 – 70	67.5	3	202.50
योग		$\Sigma f = 70$	$\Sigma fx = 2770.00$

सूत्र— $\text{समान्तर माध्य} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

अत: $\text{समान्तर माध्य} = \dfrac{2770}{70} = ₹\,39.57$ **उत्तर**

अभ्यास 5.2

1. 30 मानों का माध्य 150 था। जाँच करने पर यह पाया गया कि माध्य का अभिकलन करने के दौरान मान 165 के स्थान पर गलती से 135 लिख दिया गया है। सही माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है : पदों की संख्या = 30

समान्तर माध्य = 150

अत: पदों का योग = पदों की संख्या × समान्तर माध्य

$= 30 \times 150 = 4500$

किन्तु पदों के इस योग में गलती से 165 के स्थान पर 135 लिख दिया गया।

अत: पदों का सही योग $= 4500 + (165 - 135)$

$= 4500 + 30 = 4530$

अत: $\text{सही माध्य} = \dfrac{\text{पदों का सही योग}}{\text{पदों की संख्या}} = \dfrac{4530}{30} = 151$ **उत्तर**

2. n मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ के 50 से विचलनों का जोड़ -10 है। और इन मानों के 46 से विचलनों का जोड़ 70 है। माध्य और n के मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

n मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ के 50 से विचलनों का योग $= -10$

अर्थात् $(x_1 - 50) + (x_2 - 50) + (x_3 - 50) + \ldots + (x_n - 50) = -10$

या $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - (50 + 50 + 50 + \ldots + n \text{ पदों तक}) = -10$

या $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - 50n = -10$

या $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -10 + 50n$ ...(1)

तथा $(x_1 - 46) + (x_2 - 46) + (x_3 - 46) + \ldots + (x_n - 46) = 70$

या $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - 46n = 70$

या $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 70 + 46n$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$$-10 + 50n = 70 + 46n$$

या $$50n - 46n = 70 + 10$$

या $$4n = 80 \Rightarrow n = \mathbf{20}$$

समीकरण (1) में n का मान रखने पर,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -10 + 50 \times 20$$

या $$\Sigma x = -10 + 1000 = 990$$

अतः $$\text{माध्य} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{990}{20} = \mathbf{49.5}$$ **उत्तर**

3. एक कार रखने वाला व्यक्ति लगातार तीन वर्षों तक पहले वर्ष ₹ 7.50 प्रति लीटर, दूसरे वर्ष ₹ 8.00 प्रति लीटर और तीसरे वर्ष ₹ 8.50 प्रति लीटर की दर से पेट्रोल खरीदता है। यदि वह प्रत्येक वर्ष ₹ 4,000 का पेट्रोल खरीदता है, तो पेट्रोल प्रति लीटर औसत दर ज्ञात कीजिए।

हल— दिया है— तीन वर्षों में प्रथम वर्ष पेट्रोल का मूल्य = ₹ 7.50 प्रति लीटर

दूसरे वर्ष पेट्रोल का मूल्य = ₹ 8.00 प्रति लीटर

तीसरे वर्ष पेट्रोल का मूल्य = ₹ 8.50 प्रति लीटर

प्रत्येक वर्ष खरीदे गए तेल का मूल्य = ₹ 4,000

अतः प्रथम वर्ष खरीदे गए तेल की मात्रा $= \frac{4000}{7.5} = 533.33$ लीटर

दूसरे वर्ष खरीदे गए तेल की मात्रा $= \frac{4000}{8} = 500$ लीटर

तथा तीसरे वर्ष खरीदे गए तेल की मात्रा $= \frac{4000}{8.5} = 470.58$ लीटर

तीनों वर्षों में खरीदे गए पेट्रोल की मात्रा $= 533.33 + 500 + 470.58$

$= 1503.91$ लीटर

तीनों वर्षों में खरीदे गए तेल कुल मूल्य $= 3 \times 4000 =$ ₹ 12,000

अतः तीनों वर्षों में पेट्रोल प्रति लीटर औसत दर $= \frac{12,000}{1503.91} =$ **₹ 7.98 लीटर** **उत्तर**

4. एक कक्षा में 25 छात्रों का औसत भार 40 किग्रा तथा दूसरी कक्षा में 30 छात्रों का औसत भार 42 किग्रा है। दोनों कक्षाओं को मिलाकर छात्रों का औसत भार ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

एक कक्षा में छात्रों की संख्या $n_1 = 25$ तथा उनका औसत भार $W_1 = 40$ किग्रा

तथा दूसरी कक्षा में छात्रों की संख्या $n_2 = 30$ तथा उनका औसत भार $W_2 = 42$ किग्रा

दोनों कक्षाओं के छात्रों का औसत भार $= \dfrac{n_1 W_1 + n_2 W_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{25 \times 40 + 30 \times 42}{25 + 30} = \frac{1000 + 1260}{55}$$

$$= \frac{2260}{55} = \mathbf{41.09 \text{ किग्रा}}$$ **उत्तर**

5. एक कक्षा के 150 छात्रों का माध्य भार 60 किग्रा है। यदि लड़कों का माध्य भार 70 किग्रा है और लड़कियों को मिलाकर भार 55 किग्रा हो तो कक्षा में लड़कों और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल— माना कक्षा में लड़कों और लड़कियों की संख्या क्रमशः n_1 व n_2 है।

अतः प्रश्नानुसार, $n_1 + n_2 = 150$ ...(1)

लड़कों का माध्य भार $(W_1) = 70$ किग्रा

तथा लड़कियों का माध्य भार $(W_2) = 50$ किग्रा

कक्षा के सभी छात्रों का माध्य भार $= W = 60$

अतः कक्षा के सभी छात्रों का माध्य भार $= \dfrac{W_1 n_1 + W_2 n_2}{n_1 + n_2}$ सूत्र से

या $$60 = \frac{70n_1 + 55n_2}{150}$$

या $$9000 = 70n_1 + 55n_2$$

या $$1800 = 14n_1 + 11n_2$$

या $$14n_1 + 11n_2 = 1800$$ ...(2)

समीकरण (1) में 11 की गुणा करने पर,

$$11n_1 + 11n_2 = 1650$$ ...(3)

समीकरण (2) में से समीकरण (3) घटाने पर,

$$3n_2 = 150 \quad \text{या} \quad n_2 = \frac{150}{3} = 50$$

अब n_2 का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$n_1 + 50 = 150$$

या $$n_1 = 150 - 50 = 100$$

अतः कक्षा में लड़कों की संख्या $= \mathbf{100}$

तथा कक्षा में लड़कियों की संख्या $= \mathbf{50}$ **उत्तर**

6. करीम ने गणित में त्रैमासिक परीक्षा में 64 अंक, अर्द्धवार्षिक परीक्षा में 75 अंक तथा वार्षिक परीक्षा में 82 अंक प्राप्त किए। त्रैमासिक परीक्षा का भार 1, अर्द्धवार्षिक परीक्षा का भार 2 तथा वार्षिक परीक्षा का भार 3 है। करीम के प्राप्तांक का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $x_1 = 64$ अंक, $x_2 = 75$ अंक, $x_3 = 82$ अंक

$W_1 = 1, \quad W_2 = 2, \quad W_3 = 3$

अतः भारित माध्य अंक $x_W = \dfrac{W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3}{W_1 + W_2 + W_3}$ सूत्र से

$$= \frac{1\times 64 + 2\times 75 + 3\times 82}{1+2+3}$$

$$= \frac{64+150+246}{6} = \frac{460}{6} = 76.67 \text{ अंक}$$ उत्तर

7. एक विद्यार्थी ने अंग्रेजी की दो मासिक परीक्षाओं में 70 एवं 90 अंक प्राप्त किए जबकि छमाही एवं सालाना परीक्षाओं में क्रमशः 60 एवं 80 अंक प्राप्त किए। मासिक परीक्षाओं के भार समान हैं जबकि छमाही और सालाना परीक्षाओं के भार प्रत्येक मासिक परीक्षा के क्रमशः दो गुने एवं 4 गुने हैं। विद्यार्थी द्वारा अंग्रेजी में प्राप्त अंकों का भारित समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $x_1 = 70$ अंक, $x_2 = 90$ अंक, $x_3 = 60$ अंक तथा $x_4 = 80$ अंक

तथा $W_1 = W_2 = n$ (माना) अतः $W_3 = 2n$, $W_4 = 4n$

विद्यार्थी द्वारा अंग्रेजी में प्राप्त अंकों का भारित समान्तर माध्य

$$\bar{X}_W = \frac{x_1W_1 + x_2W_2 + x_3W_3 + x_4W_4}{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}$$

$$= \frac{70\times n + 90\times n + 60\times 2n + 80\times 4n}{n+n+2n+4n}$$

$$= \frac{70n + 90n + 120n + 320n}{8n} = \frac{600n}{8n} = 75 \text{ अंक}$$ उत्तर

8. एक विद्यालय की दसवीं कक्षा के रसायन के 4 सेक्शनों में क्रमशः 40, 35, 45, 42 छात्र हैं। इन 4 सेक्शनों के रसायन में प्राप्त मध्य अंक क्रमशः 50, 60, 55 और 45 हैं। चारों सेक्शनों को एक साथ मिलाकर प्रति छात्र द्वारा प्राप्त औसत अंक ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $n_1 = 40, n_2 = 35, n_3 = 45, n_4 = 42$

तथा $x_1 = 50, x_2 = 60, x_3 = 55, x_4 = 45$

चारों सेक्शनों के प्रति छात्र द्वारा प्राप्त औसत अंक

$$= \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + x_4n_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$$

$$= \frac{50\times 40 + 60\times 35 + 55\times 45 + 42\times 45}{40+35+45+42}$$

$$= \frac{2000+2100+2475+1890}{162} = \frac{8465}{162} = 52.3$$ उत्तर

9. एक कारखाने के 100 मजदूरों की दैनिक आय का समान्तर माध्य ₹ 38 है। यदि प्रातः पाली के 60 मजदूरों की दैनिक आय का समान्तर माध्य ₹ 40 हो, तो सायं की पाली के 40 मजदूरों की दैनिक आय का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— मजदूरों की कुल संख्या $(n) = 100$

मजदूरों की दैनिक आय का समान्तर माध्य $(\bar{x}) = ₹ 38$

अतः 100 मजदूरों की कुल दैनिक आय $= 100\times 38 = ₹ 3800$

∵ पाली के 60 मजदूरों की दैनिक आय का समान्तर माध्य = ₹ 40

∴ 60 मजदूरों की कुल दैनिक आय $= 60 \times 40 = ₹\ 2400$

अतः शेष 40 मजदूरों की कुल दैनिक आय $= 3800 - 2400 = ₹\ 1400$

∴ 40 मजदूरों की दैनिक आय का माध्य $= \frac{1400}{40} = ₹\ 35$ **उत्तर**

अभ्यास 5.3

1. निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए—

(i) 6, 9, 11, 14, 18, 22, 28, 31, 34, 43

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

6, 9, 11, 14, 18, 22, 28, 31, 34, 43

पदों की संख्या $(n) = 10$ (जो कि सम है।)

अतः माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$ (सूत्र से)

$= \frac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{5\text{वाँ पद} + (5+1)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{18+22}{2} = \frac{40}{2} = 20$ **उत्तर**

(ii) 6, 7, 6, 9, 10, 8, 12, 13

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

6, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13

पदों की संख्या $(n) = 8$ (जो कि सम है)

अतः माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$ (सूत्र से)

$= \frac{\frac{8}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{4\text{वाँ पद} + (4+1)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{4\text{वाँ पद} + 5\text{वाँ पद}}{2} = \frac{8+9}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$ **उत्तर**

(iii) 2, 5, 11, 8, 41, 31, 55, 80

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

2, 5, 8, 11, 31, 41, 55, 80

पदों की संख्या $(n) = 8$ (सम)

अतः माध्यिका $= \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{\frac{8}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{4\text{ वाँ पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{11+31}{2} = \dfrac{42}{2} = \mathbf{21}$ **उत्तर**

(iv) 5, 7, 15, 17, 9, 19, 11, 17

हल– दिए गए आँकड़ो को आरोही क्रम में रखने पर,

5, 7, 9, 11, 15, 17, 17, 19

पदों की संख्या $(n) = 8$ (सम)

अतः माध्यिका $= \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{\frac{8}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{4\text{ वाँ पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{11+15}{2} = \dfrac{26}{2} = \mathbf{13}$ **उत्तर**

(v) 8, 7, 10, 6, 9, 12, 13

हल– दिए गए आँकड़ो को आरोही क्रम में रखने पर,

6, 7, 8, 9, 10, 12, 13

पदों की संख्या $(n) = 7$ (विषम)

अतः माध्यिका $= \dfrac{n+1}{2}$ वें पद का मान (सूत्र से)

$= \dfrac{7+1}{2}$ वाँ पद

$= \dfrac{8}{2}$ वाँ पद $= 4$ वाँ पद $= \mathbf{9}$ **उत्तर**

(vi) 5, 8, 7, 6, 11, 13, 12, 15

हल– दिए गए आँकड़ो को आरोही क्रम में रखने पर,

5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15

पदों की संख्या $(n) = 8$ (सम)

अतः
$$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{\frac{8}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{4\text{ वाँ पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{8+11}{2} = \frac{19}{2} = \mathbf{9.5}$$ उत्तर

(vii) 39, 14, 18, 7, 17, 34, 45, 12, 32, 14

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

7, 12, 14, 14, 17, 18, 32, 34, 39, 45

पदों की संख्या $(n) = 10$ (सम)

अतः
$$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{17+18}{2} = \frac{35}{2} = \mathbf{17.5}$$ उत्तर

(viii) 3, 13, 0, 9, 5, 18, 7, 4

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

0, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 18

पदों की संख्या $(n) = 8$ (सम)

अतः
$$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{\frac{8}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{8}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{4\text{ वाँ पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}$$
$$= \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = \mathbf{6}$$ उत्तर

(ix) 12, 30, 14, 18, 25, 28, 22, 20, 25

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

12, 14, 18, 20, 22, 25, 25, 28, 30

पदों की संख्या $(n) = 9$ (विषम)

अतः माध्यिका $= \frac{n+1}{2}$ वाँ पद

$= \frac{9+1}{2}$ वाँ पद $= \frac{10}{2}$ वाँ पद

$= 5$ वाँ पद $= 22$ **उत्तर**

(x) 2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर—

2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8

पदों की संख्या $(n) = 6$ (सम)

अतः माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2}\text{ वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{ वाँ पद}}{2}$

$= \frac{\frac{6}{2}\text{ वाँ पद} + \left(\frac{6}{2}+1\right)\text{ वाँ पद}}{2}$

$= \frac{3\text{ वाँ पद} + 4\text{ वाँ पद}}{2}$

$= \frac{2.5+2.6}{2} = \frac{5.1}{2} = \mathbf{2.55}$ **उत्तर**

2. प्रथम दस प्राकृत संख्याओं की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल– हम जानते हैं कि— प्रथम दस प्राकृत संख्याएँ निम्न हैं—

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

जो कि स्वयं आरोही क्रम मे हैं।

पदों की संख्या $(n) = 10$ (सम)

अतः माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2}\text{ वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{ वाँ पद}}{2}$

$= \frac{\frac{10}{2}\text{ वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{ वाँ पद}}{2}$

$= \frac{5\text{ वाँ पद} + 6\text{ वाँ पद}}{2}$

$= \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = \mathbf{5.50}$ **उत्तर**

3. प्रथम दस अभाज्य पूर्णांकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल– प्रथम दस अभाज्य पूर्णांक निम्न हैं—

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 जो स्वयं आरोही क्रम है।

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 10$ (सम)

अतः $\text{माध्यिका} = \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2} = \dfrac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{11+13}{2} = \dfrac{24}{2} = \mathbf{12}$ **उत्तर**

4. निम्नलिखित आँकड़ें आरोही क्रम में व्यवस्थित हैं—
8, 11, 13, 15, $(x+1)$, $(x+3)$, 30, 40, 43, 45
यदि इन आँकड़ों की माध्यिका 22 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए—

हल— दिए गए आँकड़े— 8, 11, 13, 15, $(x+1)$, $(x+3)$, 30, 40, 43, 45

यहाँ, पदों की संख्या $(n)=10$, माध्यिका $=22$

अतः $\text{माध्यिका} = \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

या $22 = \dfrac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

या $22 = \dfrac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$

या $22 = \dfrac{(x+1)+(x+3)}{2} = \dfrac{x+1+x+3}{2}$

या $22 = \dfrac{2x+4}{2}$ या $22 = x+2$

या $x = 22-2 = \mathbf{20}$ **उत्तर**

5. निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका 7 है, x का मान ज्ञात कीजिए—
2, 3, 5, $(6+x)$, 9, 10, 15

हल– दिए गए आँकड़े— 2, 3, 5, $(6+x)$, 9, 10, 15

यहाँ, पदों की संख्या $(n)=7$, माध्यिका $=7$

अतः $\text{माध्यिका} = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)\text{वाँ पद}$ (सूत्र से)

या $7 = \left(\dfrac{7+1}{2}\right)\text{वाँ पद}$

या $7 = \dfrac{8}{2}\text{वाँ पद}$ या $7 = 4\text{ वाँ पद}$

या $7 = 6+x$

या $x = 7-6 = \mathbf{1}$ **उत्तर**

6. निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका 24 है, P का मान ज्ञात कीजिए—
11, 12, 14, 18, $P+2$, $P+4$, 30, 32, 35, 41

हल– दिए गए आँकड़े—

$11, 12, 14, 18, P+2, 30, 32, 35, 41$

तथा इनकी माध्यिका $= 24$

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 10$ (सम)

अतः $\text{माध्यिका} = \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

या $24 = \dfrac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

या $24 = \dfrac{5\text{वाँ पद} + 6\text{वाँ पद}}{2}$

या $24 = \dfrac{(P+2)+(P+4)}{2}$ या $24 = \dfrac{P+2+P+4}{2}$

या $48 = 2P+6$ या $2P = 48-6$

या $2P = 42$ या $P = \mathbf{21}$ **उत्तर**

7. एक परीक्षा में 25 छात्रों ने निम्नलिखित अंक प्राप्त किए—
35, 38, 37, 24, 33, 48, 32, 33, 50, 21, 47, 55, 27, 38, 45, 26, 33, 48, 44, 30, 52, 49, 40, 42, 44

हल– 25 छात्रों द्वारा प्राप्त अंकों को आरोही क्रम में रखने पर,

21, 24, 26, 27, 30, 32, 33, 33, 33, 35, 37, 38, 38, 40, 42, 44, 44, 45, 47, 48, 48, 49, 50, 52, 55

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 25$ (विषम)

अतः $\text{माध्यिका} = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)\text{वाँ पद} = \left(\dfrac{25+1}{2}\right)\text{वाँ पद}$

$= \dfrac{26}{2}\text{वाँ पद} = 13\text{वाँ पद} = \mathbf{38}$ **उत्तर**

8. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

x	15	21	17	19	23
f	8	6	15	7	12

हल– दी गई सारणी को आरोही क्रम संचयी बारम्बारता सारणी—

चर x	बारम्बारता f	संचयी बारम्बारता
15	8	8
17	15	23
19	7	30
21	6	36
23	12	48
योग	$n = 48$	

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 48$ (सम)

अतः माध्यिका $= \dfrac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{\frac{48}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{48}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{24\text{वाँ पद} + (24+1)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{24\text{वाँ पद} + 25\text{वाँ पद}}{2}$

$= \dfrac{19+19}{2}$ (∵25वाँ व 25वाँ पद दोनों ही संचयी बारम्बारता 30 वाले समूह में हैं।)

$= \dfrac{38}{2} = 19$ **उत्तर**

9. एक कक्षा में कुछ छात्रों के गणित के प्राप्तांक निम्नलिखित हैं—

प्राप्तांक	10	20	30	40	50
छात्र संख्या	3	9	15	7	1

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

प्राप्तांक (x)	छात्र संख्या (f)	संचयी बारम्बारता
10	3	3
20	9	12
30	15	27
40	7	34
50	1	35
जोग	$n = 45$	

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 35$ (विषम)

अतः माध्यिका $= \left(\dfrac{n+1}{2}\right)\text{वाँ पद} = \dfrac{35+1}{2}\text{ वाँ पद}$

$= \dfrac{36}{2}\text{वाँ पद} = 18\text{ वाँ पद}$ (∵18वाँ पद संचयी बारम्बारता 27 वाले समूह में आता है।)

$= 30$ **उत्तर**

10. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक	40	18	50	100	80	160
छात्रों की संख्या	12	8	32	14	16	4

हल– दी गई सारणी की आरोही क्रम संचयी बारम्बारता सारणी—

प्राप्तांक x	छात्रों की संख्या f	संचयी बारम्बारता
18	8	8
40	12	20
50	32	52
80	16	68
100	14	82
160	4	86
योग	$n=86$	

यहाँ, पदों की संख्या $(n)=86$ (सम)

अतः
$$\text{माध्यिका}=\frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद}+\left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$=\frac{\frac{86}{2}\text{वाँ पद}+\left(\frac{86}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$
$$=\frac{43\text{वाँ पद}+44\text{वाँ पद}}{2}$$
$$=\frac{50+50}{2}=\frac{100}{2}=50$$ उत्तर

11. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी की माध्यिका ज्ञात कीजिए—

पद	3	5	6	8	12	20	25	38
बारम्बारता	2	7	3	5	8	6	5	5

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

पद x	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
3	2	2
5	7	9
6	3	12
8	5	17
12	8	25
20	6	31
25	5	36
28	5	41
योग	$n=41$	

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 41$ (विषम)

अतः माध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद $= \frac{41+1}{2}$ वाँ पद

$= \frac{42}{2}$ वाँ पद $= 21$ वाँ पद $= 12$ **उत्तर**

12. निम्नलिखित सारणी में कुछ छात्रों की आयु वर्षों में दी गई है। माध्यिका ज्ञात कीजिए—

आयु (वर्षों में)	10	11	12	13	14	15
छात्रों की संख्या	6	8	10	7	3	2

हल– दी गई बारम्बारता सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

आयु वर्षों में	छात्रों की संख्या	संचयी बारम्बारता
10	6	6
11	8	14
12	10	24
13	7	31
14	3	34
15	2	36
योग	$n = 36$	

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 36$ (सम)

अतः माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{\frac{36}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{36}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{18\text{वाँ पद} + 19\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{12+12}{2}$

$= \frac{24}{2} = 12$ **वर्ष** **उत्तर**

13. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

वर्ग अन्तराल	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
बारम्बारता	4	5	16	19	7	5

हल– दी गई सारणी को संचयी बारम्बारता सारणी—

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (c)
20 – 30	4	4
30 – 40	5	9
40 – 50	16	$25 = c$
$l_1 = 50 - 60 = l_2$	$19 = f$	44
60 – 70	7	51
70 – 80	5	56
योग	$n = 56$	

यहाँ, $n = 56$ (सम) तब $\frac{n}{2} = \frac{56}{2} = 28$

∵ 28 संचयी बारम्बारता 44 के अन्तर्गत आती है। अतः $50 - 60$ वर्ग, माध्यिका वर्ग है।

$f = 19,\ c = 25,\ l_1 = 50,\ l_2 = 60$

सूत्र : $$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

$$= 50 + \frac{60 - 50}{19}(28 - 25)$$

$$= 50 + \frac{10}{19} \times 3 = 50 + \frac{30}{19}$$

$$= 50 + 1.58 = \mathbf{51.58}$$ उत्तर

14. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

वर्ग अन्तराल	5–25	25–45	45–65	65–85	85–105	105–125	125–145
बारम्बारता	4	5	12	20	14	6	4

हल– दी गई सारणी को संचयी बारम्बारता सारणी—

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (c)
5 – 25	4	4
25 – 45	5	9
45 – 65	12	$21 = c$
$l_1 = 65 - 85 = l_2$	$20 = f$	41
85 – 105	14	55
105 – 125	6	61
125 – 145	4	65
योग	$n = 65$	

यहाँ, $n = 65$ (विषम) अतः $\frac{n}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

∵ 32.5 संचयी बारम्बारता 41 के अन्तर्गत आती है। अत: वर्ग 65 – 85, माध्यिका वर्ग है।

इसलिए $l_1 = 65,\ l_2 = 85,\ f = 20,\ c = 21$

सूत्र : $\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$

$= 65 + \frac{85-65}{20}(32.5 - 21) = 65 + \frac{20}{20} \times (11.5)$

$= 65 + 11.5 = \mathbf{76.5}$ **उत्तर**

15. निम्नलिखित सारणी में कुछ व्यक्तियों का आयकर दिया गया है। उनकी माध्यिका ज्ञात कीजिए—

आयकर (₹ में)	10 – 25	25 – 40	40 – 55	55 – 70	70 – 85	85 – 100
व्यक्तियों की संख्या	6	20	44	26	3	1

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

आयकर (₹ में)	व्यक्तियों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (c)
10 – 25	6	6
25 – 40	20	$26 = c$
$l_1 = 40 - 55 = l_2$	$44 = f$	70
55 – 70	26	96
70 – 85	3	99
85 – 100	1	100
योग	$n = 100$	

यहाँ, $n = 100$ (सम) अत: $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$

∵ 50 संचयी बारम्बारता 70 के अन्तर्गत आती है। अत: वर्ग 40 – 55 माध्यिका वर्ग है।

इसलिए $l_1 = 40,\ l_2 = 55,\ f = 44,\ c = 26$

सूत्र : $\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) = 40 + \frac{55-40}{44}(50 - 26)$

$= 40 + \frac{15}{44} \times 24 = 40 + \frac{360}{44}$

$= 40 + 8.18 = ₹\ \mathbf{48.18}$ **उत्तर**

अभ्यास 5.4

1. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए—

(i) 9, 5, 7, 9, 6, 9, 10, 6, 9, 4, 8, 11

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर—

4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 11

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद का मान 9 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **9** **उत्तर**

(ii) 25, 15, 23, 39, 27, 25, 23, 25, 20

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

15, 20, 23, 23, 25, 25, 25, 27, 39

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद का मान 25 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **25** **उत्तर**

(iii) 23, 14, 10, 12, 11, 12, 23, 20,18, 12, 10, 12, 23

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

10, 10, 11, 12, 12, 12, 12, 14, 18, 20, 23, 23, 23

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद का मान 12 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **12** **उत्तर**

(iv) 13, 14, 10, 12, 11, 12, 13, 20, 18, 12, 10, 12

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

10, 10, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 18, 20

दिए गए आँकड़ो में सबसे अधिक बार आने वाले पद का मान 12 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **12** **उत्तर**

(v) 5, 7, 9, 8, 7, 9, 7, 7, 3, 5, 2

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

2, 3, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9

दिए गए आँकड़ो में सबसे अधिक बार आने वाले पद का मान 7 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **7** **उत्तर**

(vi) 2, 4, 6, 3, 4, 3, 4, 4, 7, 2

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 6, 7

दिए गए आँकड़ो में सबसे अधिक बार आने वाले पद = 4

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **4** **उत्तर**

(vii) 1, 3, 5, 5, 5, 4, 6

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम = 1, 3, 4, 5, 5, 5, 6

दिए गए आँकड़ो में सबसे अधिक बार आने वाले पद = 5 है।

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **5** **उत्तर**

(viii) 10, 11, 9, 13, 23, 10, 11, 19, 10, 14, 25, 10, 16

हल– दिए गए आँकड़ो को आरोही क्रम में रखने पर,

9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 13, 14, 16, 19, 23, 25

दिए गए आँकड़ो में सबसे अधिक बारम्बारता वाला पद = 10

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **10** **उत्तर**

(ix) 22, 23, 02, 5, 25, 23, 25, 5, 16, 23, 26

हल– दिए गए आँकड़ो को आरोही क्रम में रखने पर,

02, 5, 5, 16, 22, 23, 23, 23, 25, 25, 26

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बारम्बारता वाला पद = 23

अत: दिए गए आँकड़ो का बहुलक = **23** **उत्तर**

(x) 15, 21, 8, 12, 15, 9, 15, 12, 8, 15, 9

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

8, 8, 9, 9, 12, 12, 15, 15, 15, 15, 21

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बारम्बारता वाला पद = 15

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = **15** **उत्तर**

2. निम्नलिखित सारणी का बहुलक ज्ञात कीजिए—

पद	18	22	26	30	34	38
बारम्बारता	3	5	11	3	9	2

हल– दी गई सारणी से स्पष्ट है कि 26 की बारम्बारता सबसे अधिक है।

अत: दी गई सारणी का बहुलक = **26** **उत्तर**

3. निम्नलिखित प्राप्तांकों की बारम्बारता सारणी बनाकर बहुलक ज्ञात कीजिए—

4, 7, 9, 3, 4, 5, 3, 6, 7, 6, 8, 6, 7, 6, 5, 6, 8, 6, 5, 4

हल– दिए गए आँकड़ों को सारणी के रूप में निम्नवत् प्रस्तुत किया जा सकता है—

पद का नाम	टैली चिन्ह	बारम्बारता
3	||	2
4	|||	3
5	|||	3
6	𝍸 |	6
7	|||	3
8	||	2
9	|	1

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि 6 की बारम्बारता सबसे अधिक है। अत: दिए हुए आँकड़ों का बहुलक = **6** **उत्तर**

4. निम्नलिखित सारणी का बहुलक ज्ञात कीजिए—

पद	5	7	3	4	6	2	1
बारम्बारता	12	6	14	16	10	8	11

हल– दी गई सारणी से स्पष्ट है कि 4 की बारम्बारता सबसे अधिक **16** है।

अत: सारणी का बहुलक = **4** **उत्तर**

5. निम्नलिखित सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
छात्रों की संख्या	1	3	7	9	13	14	18	18	10	8

हल– दी गई सारणी से स्पष्ट है कि सबसे अधिक बारम्बारता 18 वाले दो पद 47 व 48 हैं।

अत: सारणी का बहुलक = **47 व 48** **उत्तर**

6. यदि किसी वितरण के लिए माध्य, माध्यिका और बहुलक एक-दूसरे के निकट हैं और $A = 25.68$, $M = 25.73$ हो, तो M_0 ज्ञात कीजिए।

जहाँ A = माध्य, M = माध्यिका तथा M_0 = बहुलक

हल– दिया है— माध्य $(A)=25.68$, माध्यिका $(M)=25.73$ तथा बहुलक $(M_0)=?$

हम जानते है कि— बहुलक $=3\times$ माध्यिका $-2\times$ समान्तर माध्य

$=3\times25.73-2\times25.68$

$=77.19-51.36=\mathbf{25.83}$ **उत्तर**

7. किसी बारम्बारता सारणी का समान्तर माध्य 25.5 व बहुलक 27 है, तो माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल— दिया है— समान्तर माध्य $=25.5$, बहुलक $=27$, माध्यिका $=?$

बहुलक $=3\times$ माध्यिका $-2\times$ समान्तर माध्य

अतः $\text{माध्यिका}=\dfrac{\text{बहुलक}+2\times\text{समान्तर माध्य}}{3}$

$=\dfrac{27+2\times25.5}{3}=\dfrac{27+51}{3}$

$=\dfrac{78}{3}=\mathbf{26}$ **उत्तर**

8. यदि किसी बारम्बारता सारणी का समान्तर माध्य 24.34 व माध्यिका 26 है, तो बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— समान्तर माध्य $=24.34$, माध्यिका $=26$, बहुलक $=?$

बहुलक $=3\times$ माध्यिका $-2\times$ समान्तर माध्य

$=3\times26-2\times24.34$

$=78-48.68=\mathbf{29.32}$ **उत्तर**

विविध प्रश्नावली

1. 2, 4, 6, 8 व x का समान्तर माध्य 5 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिए गए आँकड़े $=2, 4, 6, 8$ व x, यहाँ पदों की संख्या $(n)=5$

तथा समान्तर माध्य $=5$

सूत्र: $\text{समान्तर माध्य}=\dfrac{\text{पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}}$

या $5=\dfrac{2+4+6+8+x}{5}$

या $5=\dfrac{20+x}{5}$ या $25=20+x$

या $x=25-20=\mathbf{5}$ **उत्तर**

2. 11 से 20 तक की संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– दी गई संख्याएँ $=11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

पदों की संख्या $(n)=10$

पदों का योगफल $=(11+12+\ldots\ldots+20)=155=\Sigma(x)$

समान्तर माध्य $=\dfrac{\Sigma x}{n}=\dfrac{155}{10}=\mathbf{15.5}$ **उत्तर**

3. निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए—

10, 06, 08, 04, 06, 03, 06, 07, 08, 02, 05

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

02, 03, 04, 05, 06, 06, 06, 07, 08, 08, 10

यहाँ पदों की संख्या $(n) = \frac{11+1}{2}$ वाँ पद $= \frac{12}{2}$ वाँ पद $= 6$ वाँ पद

$= \mathbf{06}$ **उत्तर**

4. प्राप्तांक 12, 15, 18, 20, 24, 25, 30, 36, 22, 26, 36, 36 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल– दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर,

12, 15, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 30, 36, 36, 36

दिए गए आँकड़ों में सबसे अधिक बारम्बारता वाला पद $= 36$

अतः दिए गए आँकड़ों का बहुलक **36** है। **उत्तर**

5. 1 से 10 तक की सम संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल– 1 से 10 तक की सम संख्याएँ निम्न हैं— 2, 4, 6, 8, 10

यहाँ पदों की संख्या $(n) = 5$

तथा पदों का योग $(\Sigma x) = 2+4+6+8+10 = 30$

अतः समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{30}{5} = \mathbf{6}$ **उत्तर**

6. आठ संख्याओं का समान्तर माध्य 12 है। नवीं संख्या अपठनीय है। यदि सभी नौ संख्याओं का समान्तर माध्य 13 है। तो अपठनीय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— 8 संख्याओं का समान्तर माध्य $= 12$

अतः 8 संख्याओं का योग = पदों की संख्या × समान्तर माध्य

$= 8 \times 12 = 96$

तथा 9 संख्याओं का समान्तर माध्य $= 13$

अतः 9 संख्याओं का योग $= 9 \times 13 = 117$

अतः नौवीं संख्या $= 117 - 96 = \mathbf{21}$ **उत्तर**

7. एक विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा 'पर्यावरण जागरूकता' के रूप में एक सर्वेक्षण का संचालन किया गया, जिसमें उन्होंने आस-पास के 20 घरों में लगाए गए पौधों की संख्या के आँकड़े इकट्ठा किए। प्रति घर पौधों की संख्या का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

पौधों की संख्या	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12	12 – 14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

हल–

पौधों की संख्या	मध्यमान x	वर्षों की संख्या f	कल्पित माध्य द्वारा विचलन $d = x - A$	$f \times d$
0–2	1	1	1–7 = –6	–6
2–4	3	2	3–7 = –4	–8
4–6	5	1	5–7 = –2	–2
6–8	7 = (A)	5	7–7 = 0	0
8–10	9	6	9–7 = 2	12
10–12	11	2	11–7 = 4	8
12–14	13	3	13–7 = 6	18
योग		$\Sigma f = 20$		$\Sigma fd = 22$

सूत्र— समान्तर माध्य $= A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

$= 7 + \frac{22}{20} = 7 + 1.1 =$ **8.1 पौधे** उत्तर

8. एक फैक्टरी के 50 मजदूरों के दैनिक वेतन का वितरण निम्नलिखित है—

दैनिक वेतन (₹ में)	100 – 120	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200
मजदूरों की संख्या	12	14	8	6	10

उपयुक्त विधि का प्रयोग करके फैक्टरी के मजदूरों का औसत दैनिक वेतन ज्ञात कीजिए।

हल–

दैनिक वेतन (₹ में)	मध्यमान (x)	मजदूरों की संख्या (f)	$d = x - A$	$f \times u$
100–120	110	12	110–150 = –40	–480
120–140	130	14	130–150 = –20	–280
140–160	150 = (A)	8	150–150 = 0	0
160–180	170	6	170–150 = 20	120
180–200	190	10	190–150 = 40	400
योग		$\Sigma f = 50$		$\Sigma fd = -240$

सूत्र— समान्तर माध्य $= A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

$= 150 + \frac{-240}{50} = 150 - \frac{240}{50}$

$= 150 - 4.80 =$ **₹145.20** उत्तर

9. एक डॉक्टर ने एक अस्पताल में 30 महिलाओं का परीक्षण किया और प्रति मिनट हृदय की धड़कनों की संख्या निम्नलिखित सारणी के रूप में निरूपित की। उपयुक्त विधि का प्रयोग करके उन महिलाओं की औसत प्रति मिनट हृदय-धड़कन ज्ञात कीजिए—

प्रति मिनट हृदय धड़कनों की संख्या	65–68	68–71	71–74	74–77	77–80	80–83	83–86
महिलाओं की संख्या	2	4	3	8	7	4	2

हल– माना कल्पित माध्य $A = 75.5$ तथा $h = 3$

प्रति मिनट हृदय धड़कनों की संख्या	मध्यमान x	महिलाओं की संख्या f	$d = x - A$	$u = \frac{d}{h}$	$f \times u$
65–68	66.5	2	66.5 – 75.5 = –9	–3	–6
68–71	69.5	4	69.5 – 75.5 = –6	–2	–8
71–74	72.5	3	72.5 – 75.5 = –3	–1	–3
74–77	75.5 = (A)	8	75.5 – 75.5 = 0	0	0
77–80	78.5	7	78.5 – 75.5 = 3	1	7
80–83	81.5	4	81.5 – 75.5 = 6	2	8
83–86	84.5	2	84.5 – 75.5 = 9	3	6
योग		$\Sigma fi = 30$			$\Sigma fiui = 61$

सूत्र— $$\text{समान्तर माध्य} = A + h\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}$$

$$= 75.5 + 3 \times \frac{4}{30} = 75.5 + \frac{12}{30}$$

$$= 75.5 + \frac{4}{10} = 75.5 + 0.4 = \mathbf{75.9}$$ उत्तर

10. किसी बाजार में, एक फल विक्रेता कुछ बॉक्सों में आम बेच रहता था। इन बॉक्सों में आमों की संख्या अलग-अलग थी। बॉक्सों की संख्या के अनुसार आमों की संख्या का वितरण निम्नलिखित था—

आमों की संख्या	50–52	53–55	56–58	59–61	62–64
बॉक्सों की संख्या	15	110	135	115	25

बॉक्सों में आमों की संख्या का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल–

आमों की संख्या	मध्यमान (x)	बॉक्सों की संख्या (f)	$d = x - A$	$f \times d$
50–52	51	15	51 – 57 = –6	–90
53–55	54	110	54 – 57 = –3	–330
56–58	57 = (A)	135	57 – 57 = 0	0
59–61	60	115	60 – 57 = 3	345
62–64	63	25	63 – 57 = 6	150
योग		$\Sigma f = 400$		$\Sigma fd = 75$

सूत्र— $\text{समान्तर माध्य} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} = 57 + \frac{75}{400}$

$= 57 + 0.19 = \mathbf{57.19}$ उत्तर

11. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी एक मोहल्ले के 68 बिजली उपभोक्ताओं का मासिक व्यय बताती है। माध्यिका व समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

मासिक व्यय (यूनिट में)	65–85	85–105	105–125	125–145	145–165	165–185	185–205
उपभोक्ताओं की संख्या	4	5	13	20	14	8	4

हल– माना कल्पित माध्य $A = 135$ तथा $h = 20$

मासिक व्यय (यूनिट में)	मध्यमान (x)	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (c)	$u = \frac{x - A}{h}$	$f \times u$
65 – 85	75	4	4	$\frac{75-135}{20} = -3$	–12
85 – 105	95	5	9	$\frac{95-135}{20} = -2$	–10
105 – 125	115	13	$22 = c$	$\frac{115-135}{20} = -1$	–13
125 – 145	$135 = A$	$20 = f$	42	$\frac{135-135}{20} = 0$	0
145 – 165	155	14	56	$\frac{155-135}{20} = 1$	14
165 – 185	175	8	64	$\frac{175-135}{20} = 2$	16
185 – 205	195	4	68	$\frac{195-135}{20} = 3$	12
योग		$n = 68$			$\Sigma fiui = 17$

यहाँ $n = \Sigma fi = 68$ तब $\frac{n}{2} = \frac{68}{2} = 34$

∵ 34 संचयी बारम्बारता 42 के अन्तर्गत आती है। इसलिए 125–145 माध्यिका वर्ग है। अत:

$l_1 = 125,\ l_2 = 145,\ f = 20,\ c = 22$

सूत्र— $\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$

$= 125 + \frac{145 - 125}{20}\left(\frac{68}{2} - 22\right)$

$= 125 + \frac{20}{20}(34 - 22) = 125 + 1 \times 12$

$= 125 + 12 = \mathbf{137}$ यूनिट उत्तर

तथा **सूत्र**— समान्तर माध्य $= A + h\dfrac{\Sigma fiui}{\Sigma fi} = 135 + 20 \times \dfrac{7}{68} = 135 + \dfrac{140}{68}$

$= 135 + 2.05 = \mathbf{137.05}$ **उत्तर**

12. यदि नीचे दी गई बारम्बारता सारणी की माध्यिका 28.5 है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए—

वर्ग अन्तराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	योग
बारम्बारता	5	x	20	15	y	5	60

हल– दी गई बारम्बारता सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (c)
0 – 10	5	5
10 – 20	x	$x + 5$
20 – 30	20	$x + 25$
30 – 40	15	$x + 40$
40 – 50	y	$x + y + 40$
50 – 60	5	$x + y + 45$
योग	$n = 60$	

सारणी से स्पष्ट है कि—

$$x + y + 45 = 60 \quad \text{या} \quad x + y = 60 - 45$$

या $$x + y = 15 \qquad \ldots(1)$$

यहाँ $n = 60$ अतः $\dfrac{n}{2} = \dfrac{60}{2} = 30$

∵ 30 संचयी बारम्बारता $x + 40$ के अन्तर्गत आती है। अतः वर्ग 20–30 माध्यिका वर्ग है।

∴ $l_1 = 20,\ l_2 = 30,\ f = 20,\ c = x + 5$

सूत्र— $$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

$$28.5 = 20 + \frac{30 - 20}{20}\{(30 - (x + 5)\}$$

या $$28.5 = 20 + \frac{10}{20}\{30 - x - 5\}$$

या $$28.5 = 20 + \frac{1}{2}(25 - x)$$

या $$57.0 = 40 + (25 - x)$$

$$57 = 40 + 25 - x$$

या $$57 = 65 - x$$

या $$x = 65 - 57$$

$$x = \mathbf{8}$$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$8 + y = 15 \Rightarrow y = 15 - 8 = \mathbf{7}$ **उत्तर**

13. एक जीवन बीमा एजेंट ने 100 पॉलिसी धारकों की आयु के वितरण के लिए निम्नलिखित आँकड़ें प्राप्त किए। माध्यिका आयु की गणना कीजिए। यदि पॉलिसियाँ 18 वर्ष से अधिक परन्तु 60 वर्ष से कम वाले व्यक्तियों को दी गई हों—

आयु (वर्षों में)	20 से नीचे	25 से नीचे	30 से नीचे	35 से नीचे	40 से नीचे	45 से नीचे	50 से नीचे	55 से नीचे	60 से नीचे
पॉलिसी धारकों की संख्या	2	6	24	45	78	89	92	98	100

हल– दी गई सारणी को संचयी बारम्बारता सारणी—

आयु (वर्षों में)	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
15 – 20	2	2
20 – 25	4	6
25 – 30	18	24
30 – 35	21	45
35 – 40	33	78
40 – 45	11	89
45 – 50	3	92
50 – 55	6	98
55 – 60	2	100
योग	$n = 100$	

यहाँ, $n = 100$ तब $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$

∵ संख्या 50 संचयी बारम्बारता 78 के अन्तर्गत आती है। अतः वर्ग 35–40 माध्यिका वर्ग है।

∴ $l_1 = 35,\ l_2 = 40,\ f = 33,\ c = 45$

सूत्र : $$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

$$= 35 + \frac{40 - 35}{33}(50 - 45)$$

$$= 35 + \frac{5 \times 5}{33}$$

$$= 35 + 0.76 = \mathbf{35.76 \text{ वर्ष}}$$ उत्तर

14. एक पौधे की 40 पत्तियों की लम्बाइयाँ निकटतम मिलीमीटर में मापी गईं और निम्नलिखित सारणी में आँकड़ों को प्राप्त किया गया—

लम्बाई (मिमी में)	118–126	127–135	136–144	145–153	154–162	163–171	172–180
पत्तियों की संख्या	3	5	9	12	5	4	2

पत्तियों की लम्बाइयों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

हल– दी गई सारणी को संचयी बारम्बारता सारणी—

लम्बाई (मिमी में)	पत्तियों की संख्या	संचयी बारम्बारता
118 – 126	3	3
127 – 135	5	8
136 – 144	9	$17 = c$
145 – 153	$12 = f$	29
154 – 162	5	34
163 – 171	4	38
172 – 180	2	40
योग	$n = 40$	

यहाँ, $n = 40 \implies \frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$

∵ संख्या 20 संचयी बारम्बारता 29 के अन्तर्गत आती है। अतः माध्यिका वर्ग 145-153 है।

∴ $l_1 = 145,\ l_2 = 153,\ f = 12,\ c = 17$

सूत्र—

$$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

$$= 145 + \frac{153 - 145}{12}(20 - 17)$$

$$= 145 + \frac{8}{12} \times 3$$

$$= 145 + 2 = \mathbf{147 \text{ मिमी}}$$ **उत्तर**

15. निम्नलिखित सारणी में 400 निऑन लैंपों के जीवन-काल का विवरण दिया गया है—

जीवनकाल (घण्टों में)	लैंपों की संख्या
1500–2000	14
2000–2500	56
2500–3000	60
3000–3500	86
3500–4000	74
4000–4500	62
4500–5000	48

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

जीवनकाल (घण्टों में)	लैंपों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (c)
1500–2000	14	14
2000–2500	56	70
2500–3000	60	130
3000–3500	86	216
3500–4000	74	290
4000–4500	62	352
4500–5000	48	400
योग	$n = 400$	

यहाँ, $n = 400 \implies \frac{n}{2} = \frac{400}{2} = 200$

∵ संख्या 200 संचयी बारम्बारता 216 के अन्तर्गत आती है। अतः वर्ग 3000–3500 माध्यिका वर्ग है।

$\therefore \quad l_1 = 3000,\ l_2 = 3500,\ f = 86,\ c = 130$

सूत्र : $\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) = 3000 + \frac{3500 - 3000}{86}(200 - 130)$

$$= 3000 + \frac{500}{86} \times 70 = 3000 + \frac{35000}{86}$$

$$= 3000 + 406.98 = \mathbf{3406.98}$$ **उत्तर**

16. निम्नलिखित सारणी में एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों का भार दिया गया है। विद्यार्थियों का माध्यिका भार ज्ञात कीजिए।

भार (किग्रा में)	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	8	6	6	3	2

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

भार (किग्रा में)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (c)
40–45	2	2
45–50	3	5
50–55	8	13
55–60	6	19
60–65	6	25
65–70	3	28
70–75	2	30
योग	$n = 30$	

यहाँ, $n = 30 \implies \frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$

∵ 15 संचयी बारम्बारता 19 के अन्तर्गत आती है। अतः वर्ग 55–60 माध्यिका वर्ग है।

$l_1 = 55,\ l_2 = 60,\ f = 6,\ c = 13$

सूत्र— $\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$

$= 55 + \frac{60-55}{13}(15-13) = 55 + \frac{5}{13} \times 2 = 55 + \frac{10}{13}$

$= 55 + 0.76 = \mathbf{55.76}$ किग्रा **उत्तर**

17. निम्नलिखित सारणी का बहुलक एवं माध्यिका ज्ञात कीजिए।

पद	5	15	25	35	45
बारम्बारता	2	5	8	6	3

हल– दी गई सारणी की संचयी बारम्बारता सारणी—

पद	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
5	2	2
15	5	7
25	8	15
35	6	21
45	3	24
योग	$n = 24$	

दी गई सारणी से स्पष्ट है कि पद 25 की बारम्बारता सबसे अधिक है। अतः सारणी का बहुलक $= \mathbf{25}$ **उत्तर**

यहाँ $n = 24$ (सम) अतः $\frac{n}{2} = \frac{24}{2} = 12$ तथा $\frac{n}{2} + 1 = 12 + 1 = 13$

अतः $\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{\frac{24}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{24}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2} = \frac{12\text{वाँ पद} + 13\text{वाँ पद}}{2}$

$= \frac{25+25}{2} = \frac{50}{2} = \mathbf{25}$ **उत्तर**

18. निम्नलिखित सारणी का बहुलक ज्ञात कीजिए।

पद	10	20	30	40	50
बारम्बारता	5	8	20	6	3

हल– दी गई सारणी से स्पष्ट है कि पद 30 की बारम्बारता सबसे अधिक है। अतः सारणी का बहुलक $= 30$ है। **उत्तर**

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 112 व 113 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-4 त्रिकोणमिति (Trigonometry)

6

त्रिकोणमितीय अनुपात तथा सर्वसमिकाएँ
(Trigonometric Ratios and Identities)

अभ्यास 6.1

1. निम्नलिखित त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\sin(-1125^\circ)$

हल– $\sin(-1125^\circ) = -\sin 1125^\circ = -\sin(3\times 360^\circ + 45^\circ)$

$= -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ उत्तर

(ii) $\sin 1920^\circ$

हल– $\sin 1920^\circ = \sin(5\times 360^\circ + 120^\circ)$

$= \sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ)$

$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

(iii) $\cos 1950^\circ$

हल– $\cos 1950^\circ = \cos 1950^\circ$

$= \cos(5\times 360^\circ + 150^\circ)$

$= \cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ)$

$= -\sin 60^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

(iv) $\tan(-570^\circ)$

हल– $\tan(-570^\circ) = -\tan(570^\circ)$

$= -\tan(1\times 360^\circ + 210^\circ)$

$= -\tan 210^\circ = -\tan(180^\circ + 30^\circ)$

$= -\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ उत्तर

(v) $\tan 750^\circ$

हल– $\tan 750^\circ = \tan(2\times 360^\circ + 30^\circ)$

$$= \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ उत्तर

(vi) $\tan 60^\circ$

हल– $\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ उत्तर

2. $\sin 382\frac{1}{2}^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\sin\left(382\frac{1}{2}^\circ\right) = \sin\frac{765^\circ}{2}$

$$= \sin\left(1\times 360^\circ + \frac{45^\circ}{2}\right) = \sin\frac{45^\circ}{2}$$

या $$= \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} \qquad \left[\because \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$ उत्तर

3. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$

हल– $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - 72^\circ)}{\cos 72^\circ} = \frac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1$ उत्तर

(ii) $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$

हल– $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ} = \frac{\tan(90^\circ - 64^\circ)}{\cot 64^\circ} = \frac{\cot 64^\circ}{\cot 64^\circ} = 1$ उत्तर

(iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$

हल– $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ = \cos 48^\circ - \sin(90^\circ - 48^\circ)$

$$= \cos 48^\circ - \cos 48^\circ = 0$$ उत्तर

(iv) $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$

हल— $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ = \operatorname{cosec} 31^\circ - \sec(90^\circ - 31^\circ)$

$$= \operatorname{cosec} 31^\circ - \operatorname{cosec} 31^\circ = 0$$ उत्तर

4. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\cos 1020^\circ$

हल– $\cos 1020^\circ = \cos(3\times 360^\circ - 60^\circ)$

$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ उत्तर

(ii) $\cot 1470^\circ$

हल– $\cot 1470^\circ = \cot(4\times 360^\circ + 30^\circ)$

$= \cot 30^\circ = \sqrt{3}$ उत्तर

(iii) $\tan\frac{5\pi}{3}$

हल– $\tan\frac{5\pi}{3} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{3} = -\tan\frac{180^\circ}{3}$

$= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ उत्तर

(iv) $\operatorname{cosec} 1350^\circ$

हल– $\operatorname{cosec} 1350^\circ = \operatorname{cosec}(4\times 360^\circ - 90^\circ)$

$= -\operatorname{cosec} 90^\circ = -1$ उत्तर

(v) $\tan\frac{11\pi}{3}$

हल– $\tan\frac{11\pi}{3} = \tan\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{3} = -\tan\frac{180^\circ}{3}$

$= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ उत्तर

(vi) $\sin 780^\circ$

हल– $\sin 780^\circ = \sin(2\times 360^\circ + 60^\circ)$

$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

5. निम्नलिखित को रेडियन में परिवर्तित कीजिए—

(i) 90° **(ii) 45°** **(iii) 30°**

(iv) 120° **(v) 210°** **(vi) 135°**

हल–(i) $90^\circ = \frac{90^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$ रेडियन उत्तर

(ii) $45^\circ = \frac{45^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$ रेडियन उत्तर

(iii) $30^\circ = \frac{30^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$ रेडियन उत्तर

(iv) $120^\circ = \frac{120^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$ रेडियन उत्तर

(v) $210^\circ = \frac{210^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}$ रेडियन उत्तर

(vi) $135^\circ = \frac{135^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$ रेडियन उत्तर

6. निम्नलिखित को अंशों में परिवर्तित कीजिए—

(i) $\frac{\pi}{3}$ **रेडियन** **(ii)** $\frac{\pi}{6}$ **रेडियन**

(iii) $\frac{2\pi}{3}$ **रेडियन** **(iv)** $\frac{3\pi}{4}$ **रेडियन**

हल– (i) $\frac{\pi}{3}$ रेडियन $= \frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$ उत्तर

(ii) $\frac{\pi}{6}$ रेडियन $= \frac{\pi \times 180^\circ}{6 \times \pi} = 30^\circ$ उत्तर

(iii) $\frac{2\pi}{3}$ रेडियन $= \frac{2\pi \times 180^\circ}{3 \times \pi} = 120^\circ$ उत्तर

(iv) $\frac{3\pi}{4}$ रेडियन $= \frac{3\pi \times 180^\circ}{4 \times \pi} = 135^\circ$ उत्तर

7. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

हल– $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$ उत्तर

(ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

हल– $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

$$= 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2 \times 1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$ उत्तर

(iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

हल– $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(2-2\sqrt{3})}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})(2-2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{2}\{(2)^2-2\sqrt{3})^2\}}=\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{2}(4-12)}=\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{2}\times(-8)}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3})}{-8\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{\mathbf{8}}$$ उत्तर

(iv) $\dfrac{\sin 30^\circ+\tan 45^\circ-\operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ+\cos 60^\circ+\cot 45^\circ}$

हल– $\dfrac{\sin 30^\circ+\tan 45^\circ-\operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ+\cos 60^\circ+\cot 45^\circ}=\dfrac{\frac{1}{2}+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+1}$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4}$$

$$=\frac{(3\sqrt{3}-4)^2}{(3\sqrt{3}+4)(3\sqrt{3}-4)}$$

$$=\frac{(3\sqrt{3})^2+4^2-2\times4\times3\sqrt{3}}{(3\sqrt{3})^2-4^2}$$

$$=\frac{27+16-24\sqrt{3}}{27-16}=\frac{\mathbf{43-24\sqrt{3}}}{\mathbf{11}}$$ उत्तर

(v) $\dfrac{5\cos^2 60^\circ+4\sec^2 30^\circ-\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ}$

हल– $\dfrac{5\cos^2 60^\circ+4\sec^2 30^\circ-\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ}=\dfrac{5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$=\frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{1+3}{4}}$$

$$=\frac{\frac{79-12}{12}}{\frac{4}{4}}=\frac{\mathbf{67}}{\mathbf{12}}$$ उत्तर

8. यदि $\tan(A+B)=\sqrt{3}$ और $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; जहाँ $0^\circ < A+B \le 90^\circ$, $A > B$, तो A व B का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

$$\tan(A+B)=\sqrt{3}$$

या $\tan(A+B)=\tan 60^\circ$

या $A+B=60^\circ$ ...(1)

तथा $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

या $\tan(A-B)=\tan 30^\circ$

या $A-B=30^\circ$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$2A=90^\circ$$

या $A=\frac{90^\circ}{2}=45^\circ$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$45^\circ+B=60^\circ$$

या $B=60^\circ-45^\circ=15^\circ$

अतः $A=45^\circ$ तथा $B=15^\circ$ **उत्तर**

9. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य और असत्य लिखिए। अपने उत्तर का सत्यापन भी कीजिए।

(i) $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$

हल– माना $A=30^\circ$ तथा $B=60^\circ$

तब L.H.S. $\sin(A+B)=\sin(30^\circ+60^\circ)=\sin 90^\circ=1$

R.H.S. $=\sin A+\sin B$

$=\sin 30^\circ+\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

अतः $A=30^\circ$ तथा $B=60^\circ$ के लिए

$\sin(A+B) \neq \sin A+\sin B$

इस प्रकार, दिया हुआ कथन $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$ **असत्य** है। **उत्तर**

(ii) $\sin\theta$ का मान, θ के मान के अनुसार बढ़ता है।

हल– माना $\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

अतः $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90^\circ=1$

चूँकि $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$

अतः $\sin\theta$ का मान, θ के मान के अनुसार बढ़ता है। दिया गया कथन **सत्य** है। **उत्तर**

(iii) $\cos\theta$ का मान, θ के मान के अनुसार बढ़ता है।

हल– माना $\theta = 30°, 45°, 60°, 90°$

तब $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 60° = \frac{1}{2}, \cos 90° = 0$

चूँकि, $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} > 0$

इस प्रकार, $\cos\theta$ का मान, θ के मान के अनुसार घटता है। अत: दिया हुआ कथन **असत्य** है। **उत्तर**

(iv) θ के सभी मानों के लिए, $\sin\theta = \cos\theta$

हल– माना $\theta = 30°, 45°, 60°, 90°$

अब $\sin 30° = \frac{1}{2}$ तथा $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अत: $\sin 30° \neq \cos 30°$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

अत: $\sin 45° = \cos 45°$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\cos 60° = \frac{1}{2}$

अत: $\sin 60° \neq \cos 60°$

$\sin 90° = 1$ तथा $\cos 90° = 0$

अत: $\sin 90° \neq \cos 90°$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दिया गया कथन θ के सभी मानों के लिए, $\sin\theta = \cos\theta$ **असत्य** है। **उत्तर**

(v) $A = 0°$ तो $\cot A$ का मान परिभाषित नहीं है।

हल– यदि $A = 0°$

तो $\cot A = \infty$ (परिभाषित नहीं)

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दिया गया कथन $A = 0°$ के लिए $\cot A$ का मान परिभाषित नहीं है।

अत: यह कथन **सत्य** है। **उत्तर**

10. सिद्ध कीजिए—

(i) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67° = 1$

हल– L.H.S. $= \tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67°$

$= \tan(90° - 42°)\tan(90° - 67°)\tan 42° \tan 67°$

$= \cot 42° \cot 67° \tan 42° \tan 67°$

$= \cot 42° \times \tan 42° \cot 67° \tan 67°$

$= 1 \times 1$ $[\because \tan\theta.\cot\theta = 1]$

$= 1 =$ R.H.S.

(ii) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0$

हल– L.H.S. $= \cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52°$

$= \cos(90° - 52°)\cos(90° - 38°) - \sin 38° \sin 52°$

$= \sin 52° \sin 38° - \sin 38° \sin 52°$

$$= \sin 38^\circ \sin 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ$$
$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

11. यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

$$\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$$
या $$\cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$$
या $$90^\circ - 2A = A - 18^\circ$$
या $$90^\circ + 18^\circ = A + 2A$$
या $$108^\circ = 3A \Rightarrow A = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$$ उत्तर

12. यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि— $A + B = 90^\circ$

हल– दिया है—

$$\tan A = \cot B \quad \text{या} \quad \tan A = \tan(90^\circ - B)$$
या $$A = 90^\circ - B$$
या $$A + B = 90^\circ$$ इति सिद्धम्

13. यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, जहाँ $4A$ न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

$$\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$$
या $$\operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$$
या $$90^\circ - 4A = A - 20^\circ$$
या $$90^\circ + 20^\circ = A + 4A$$
या $$110^\circ = 5A$$
या $$A = \frac{110^\circ}{5} = 22^\circ$$ उत्तर

14. यदि A, B एवं C, त्रिभुज ABC के अन्तःकोण हैं, तो सिद्ध कीजिए—

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

हल– दिया है—

A, B और C त्रिभुज ABC के अन्तःकोण हैं।

अतः $$A + B + C = 180^\circ$$
या $$B + C = 180^\circ - A$$
या $$\frac{B+C}{2} = \frac{180^\circ - A}{2}$$
या $$\frac{B+C}{2} = \left(\frac{180^\circ}{2} - \frac{A}{2}\right)$$
या $$\frac{B+C}{2} = \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

दोनों पक्षों का sin लेने पर,

$$\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)$$

या $$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$$ इति सिद्धम्

15. $\sin 67^\circ+\cos 75^\circ$ को 0° व 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल– $\sin 67^\circ+\cos 75^\circ=\sin(90^\circ-23^\circ)+\cos(90^\circ-15^\circ)$

$=\cos 23^\circ+\sin 15^\circ$ उत्तर

16. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\cos 510^\circ-\sin(-780^\circ)=0$

हल— L.H.S. $=\cos 510^\circ-\sin(-780^\circ)$

$=\cos 510^\circ+\sin 780^\circ$

$=\cos(360^\circ+150^\circ)+\sin(2\times 360^\circ+60^\circ)$

$=\cos 150^\circ+\sin 60^\circ$

$=\cos(90^\circ+60^\circ)+\sin 60^\circ$

$=-\sin 60^\circ+\sin 60^\circ$

$=0=$ R.H.S.

(ii) $\cot A+\tan(180^\circ-A)+\tan(90^\circ+A)+\tan(360^\circ+A)=0$

हल— L.H.S. $=\cot A+\tan(180^\circ-A)+\tan(90^\circ+A)+\tan(360^\circ+A)$

$=\cot A-\tan A-\cot A+\tan A$

$=0=$ R.H.S.

(iii) $\sin 150^\circ\cdot\cos 120^\circ+\cos 330^\circ\cdot\sin 660^\circ=-1$

हल— L.H.S. $=\sin 150^\circ\cos 120^\circ+\cos 330^\circ\cdot\sin 660^\circ$

$=\sin(90^\circ+60^\circ)\cdot\cos(90^\circ+30^\circ)$

$+\cos(360^\circ-30^\circ)\cdot\sin(2\times 360^\circ-60^\circ)$

$=\cos 60^\circ\cdot(-\sin 30^\circ)+\cos 30^\circ\cdot(-\sin 60^\circ)$

$=-\cos 60^\circ\cdot\sin 30^\circ-\cos 30^\circ\times\sin 60^\circ$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{-1-3}{4}=\frac{-4}{4}=-1=\text{R.H.S.}$$

(iv) $\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0$

हल– L.H.S. $=\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}$

$$=\cos\left(\pi-\frac{7\pi}{8}\right)+\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{8}\right)+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}$$

$$=-\cos\frac{7\pi}{8}-\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}$$

$=0=$ R.H.S.

(v) $\sin 54^\circ \sec 54^\circ \cdot \cot 54^\circ = 1$

हल– L.H.S. $= \sin 54^\circ \sec 54^\circ \cot 54^\circ$

$$= \sin 54^\circ \times \frac{1}{\cos 54^\circ} \times \cot 54^\circ$$

$$= \frac{\sin 54^\circ}{\cos 54^\circ} \times \cot 54^\circ = \tan 54^\circ \times \cot 54^\circ$$

$$= 1 \qquad [\because \tan\theta \times \cot\theta = 1]$$

$$= \text{R.H.S}$$

17. सिद्ध कीजिए—

$\text{cosec}\,(270^\circ - A) \cdot \text{cosec}\,(270^\circ + A) + \cot(270^\circ - A) \times \cot(270^\circ + A) = 1$

हल—L.H.S. $= \text{cosec}\,(270^\circ - A) \cdot \text{cosec}\,(270^\circ + A) + \cot(270^\circ - A) \cdot \cot(270^\circ + A)$

$$= -\sec A \cdot (-\sec A) + \tan A \cdot (-\tan A)$$

$$= \sec^2 A - \tan^2 A$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

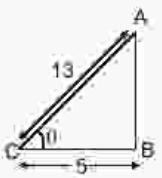
$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} \qquad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

18. यदि $\sec\theta = \frac{13}{5}$, तो $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल – दिया है—

$$\sec\theta = \frac{13}{5} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{BC}$$



अतः $\text{लम्ब} = \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{आधार}^2}$

या $AB = \sqrt{13^2 - 5^2}$

$$= \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

अतः $\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$

अतः $$\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = \frac{2\times\frac{12}{13} - 3\times\frac{5}{13}}{4\times\frac{12}{13} - 9\times\frac{5}{13}} = \frac{\frac{24}{13} - \frac{15}{13}}{\frac{48}{13} - \frac{45}{13}}$$

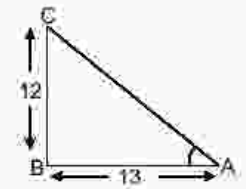
$$= \frac{\frac{24-15}{13}}{\frac{48-45}{13}} = \frac{\frac{9}{13}}{\frac{3}{13}}$$

$$= \frac{9\times 13}{3\times 13} = 3$$

उत्तर

19. यदि $\tan A = \frac{12}{13}$, तो $\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—



$$\tan A = \frac{12}{13} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{कर्ण } (AC) = \sqrt{\text{आधार}^2 + \text{लम्ब}^2}$$

$$= \sqrt{13^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{169 + 144} = \sqrt{313}$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{\sqrt{313}} \quad \text{तथा} \quad \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{\sqrt{313}}$$

अतः $$\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{2\times\frac{12}{\sqrt{313}}\times\frac{13}{\sqrt{313}}}{\left(\frac{13}{\sqrt{313}}\right)^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{313}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{312}{313}}{\frac{169}{313} - \frac{144}{313}} = \frac{\frac{312}{313}}{\frac{169-144}{313}} = \frac{\frac{312}{313}}{\frac{25}{313}}$$

$$= \frac{312\times 313}{313\times 25} = \frac{312}{25}$$ उत्तर

20. $\frac{2\sin 81^\circ}{\cos 9^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $$\frac{2\sin 81^\circ}{\cos 9^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 81^\circ}{\cos(90^\circ - 81^\circ)} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot(90^\circ - 40^\circ)}$$

$$= \frac{2\sin 81^\circ}{\sin 81^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\tan 40^\circ} = 2 - 1 = 1$$ उत्तर

21. $\frac{5\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ} + \frac{2\cos 31^\circ}{\sin 59^\circ} - \frac{6\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $$\frac{5\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ} + \frac{2\cos 31^\circ}{\sin 59^\circ} - \frac{6\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{5\sin 17^\circ}{\cos(90^\circ - 17^\circ)} + \frac{2\cos 31^\circ}{\sin(90^\circ - 31^\circ)} - \frac{6\sin 80^\circ}{\cos(90^\circ - 80^\circ)}$$

$$= \frac{5\sin 17^\circ}{\sin 17^\circ} + \frac{2\cos 31^\circ}{\cos 31^\circ} - \frac{6\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= 5 + 2 - 6 = 7 - 6 = 1$$ उत्तर

22. $\tan 35^\circ \tan 40^\circ \tan 45^\circ \tan 50^\circ \tan 55^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\tan 35^\circ \tan 40^\circ \tan 45^\circ \tan 50^\circ \tan 55^\circ$

$$= \tan(90^\circ - 55^\circ)\tan(90^\circ - 50^\circ)\times 1\times \tan 50^\circ \tan 55^\circ$$

$= \cot 55^\circ \cdot \cot 50^\circ \cdot \tan 50^\circ \tan 55^\circ$
$= \cot 55^\circ \cdot \tan 55 \cot 50^\circ \tan 50^\circ \quad [\because \tan\theta.\cot\theta = 1]$
$= 1 \times 1 = 1$ उत्तर

अभ्यास 6.2

सिद्ध कीजिए—

1. $\dfrac{1}{\sec A + \tan A} = \sec A - \tan A$

हल— $\text{L.H.S.} = \dfrac{1}{\sec A + \tan A}$

$= \dfrac{1 \times (\sec A - \tan A)}{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)}$

$= \dfrac{\sec A - \tan A}{\sec^2 A - \tan^2 A}$

$= \dfrac{\sec A - \tan A}{1} \quad [\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$

$= \sec A - \tan A = \text{R.H.S.}$

2. $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$

हल— $\text{L.H.S.} = \sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta$

$= \dfrac{1}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta} = \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$

$= \dfrac{1}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \times \dfrac{1}{\sin^2\theta} = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$

$= \text{R.H.S.}$

3. $\dfrac{1 + \tan^2\theta}{\text{cosec}^2\theta} = \tan^2\theta$

हल— $\text{L.H.S.} = \dfrac{1 + \tan^2\theta}{\text{cosec}^2\theta}$

$= \dfrac{1 + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}} = \dfrac{\dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}} = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \tan^2\theta = \text{R.H.S.}$

4. $\frac{1}{\sec\theta-1}-\frac{1}{\sec\theta+1}=2\cot^2\theta$

हल– $\text{L.H.S.}=\frac{1}{\sec\theta-1}-\frac{1}{\sec\theta+1}$

$=\frac{\sec\theta+1-(\sec\theta-1)}{(\sec\theta+1)(\sec\theta-1)}=\frac{\sec\theta+1-\sec\theta+1}{\sec^2\theta-1}$

$=\frac{2}{\tan^2\theta}$ $[\because \sec^2\theta-1=\tan^2\theta]$

$=2\cot^2\theta=\text{R.H.S.}$

5. $(1-\cos^2\theta)\,\text{cosec}^2\theta=1$

हल– $\text{L.H.S.}=(1-\cos^2\theta)\,\text{cosec}^2\theta$

$=\sin^2\theta\cdot\text{cosec}^2\theta$

$=1=\text{R.H.S.}$

6. $\cos^2\theta\,\text{cosec}\,\theta+\sin\theta=\text{cosec}\,\theta$

हल– $\text{L.H.S.}=\cos^2\theta.\text{cosec}\,\theta+\sin\theta$

$=\cos^2\theta\times\frac{1}{\sin\theta}+\sin\theta$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$

$=\text{cosec}\,\theta=\text{R.H.S.}$

7. निम्नलिखित को उपयुक्त त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए–

(i) $(1+\tan^2 A)\cos^2 A=1$

हल– $\text{L.H.S.}=(1+\tan^2 A)\cos^2 A$

$=\sec^2 A\cdot\cos^2 A$ $[\because 1+\tan^2 A=\sec^2 A]$

$=\frac{1}{\cos^2 A}\times\cos^2 A$

$=1=\text{R.H.S.}$

(ii) $\sin^2\theta+\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\tan^2\theta}+\frac{1}{1+\cot^2\theta}=1$

हल– $\text{L.H.S.}=\sin^2\theta+\frac{1}{1+\tan^2\theta}$

$=\sin^2\theta+\frac{1}{\sec^2 A}$ $[\because \sec^2 A=1+\tan^2 A]$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=1$

$=\text{R.H.S.}$

तथा L.H.S. $\frac{1}{1+\tan^2\theta}+\frac{1}{1+\cot^2\theta}=\frac{1}{\sec^2\theta}+\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}$

$\left[\because \quad 1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\right]$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$=1=$ R.H.S.

(iii) $(\operatorname{cosec}^2\theta-1)\tan^2\theta=1$

हल– L.H.S. $=(\operatorname{cosec}^2\theta-1)\tan^2\theta$

$=\cot^2\theta\times\tan^2\theta \qquad [\because \operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta]$

$=1 \qquad [\because \tan\theta\times\cot\theta=1]$

$=$ R.H.S.

(iv) $(\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\cos A$

हल– L.H.S. $=(\sin A-\cos A)^2$

$=\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A$

$=1-2\sin A\cos A$

$=$ R.H.S.

(v) $\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A}+\frac{\cos A}{\sec A}=1$

हल– L.H.S. $=\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A}+\frac{\cos A}{\sec A}$

$=\sin A\times\frac{1}{\operatorname{cosec} A}+\cos A\times\frac{1}{\sec A}$

$=\sin A\times\sin A+\cos A\times\cos A$

$=\sin^2 A+\cos^2 A$

$=1=$ R.H.S.

(vi) $\frac{1}{1-\cos A}+\frac{1}{1+\cos A}=2\operatorname{cosec}^2 A$

हल– L.H.S. $=\frac{1}{(1-\cos A)}+\frac{1}{(1+\cos A)}$

$=\frac{1+\cos A+1-\cos A}{(1-\cos A)(1+\cos A)}$

$=\frac{2}{1-\cos^2 A}=\frac{2}{\sin^2 A}$

$=2\operatorname{cosec}^2 A=$ R.H.S.

(vii) $\cos^4 A+\sin^2 A\cos^2 A=\cos^2 A$

हल– L.H.S. $=\cos^4 A+\sin^2 A\cos^2 A$

$=\cos^2 A(\cos^2 A+\sin^2 A)=\cos^2 A\times 1$

$=\cos^2 A=$ R.H.S.

(viii) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\text{R.H.S.}$$

(ix) $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=2\operatorname{cosec} A$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$=\frac{\sin^2 A+1+\cos^2 A+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$=\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$=\frac{2}{\sin A}=2\operatorname{cosec} A=\text{R.H.S.}$$

(x) $\tan^2\phi-\sin^2\phi=\tan^2\phi\sin^2\phi$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\tan^2\phi-\sin^2\phi$$

$$=\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}-\sin^2\phi=\sin^2\phi\left(\frac{1}{\cos^2\phi}-1\right)$$

$$=\sin^2\phi\left[\frac{1-\cos^2\phi}{\cos^2\phi}\right]$$

$$=\sin^2\phi\cdot\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}=\sin^2\phi\cdot\tan^2\phi$$

$$=\tan^2\phi\cdot\sin^2\phi=\text{R.H.S.}$$

(xi) $\tan^2\phi+\cot^2\phi+2=\sec^2\phi\operatorname{cosec}^2\phi$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\tan^2\phi+\cot^2\phi+2$$

$$=\tan^2\phi+\cot^2\phi+2\tan\phi\times\cot\phi \quad [\because \tan\phi\cot\phi=1]$$

$$= (\tan\phi + \cot\phi)^2 = \left(\frac{\sin\phi}{\cos\phi} + \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin^2\phi + \cos\phi}{\cos\phi \sin\phi}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\phi \sin\phi}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\phi} \times \frac{1}{\sin\phi}\right)^2 = (\sec\phi \cdot \operatorname{cosec}\phi)^2$$

$$= \sec^2\phi \operatorname{cosec}^2\phi = \text{R.H.S.}$$

(xii) $\sin\theta(1 + \tan\theta) + \cos\theta(1 + \cot\theta) = \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta$

हल–

$$\text{L.H.S.} = \sin\theta(1 + \tan\theta) + \cos\theta(1 + \cot\theta)$$

$$= \sin\theta\left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) + \cos\theta\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \sin\theta\left[\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}\right] + \cos\theta\left[\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right]$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\left[\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$$

$$= \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta = \text{R.H.S.}$$

(xiii) $\dfrac{1}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta} = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

हल–

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta \sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta \sin^2\theta}$$

$$= \sec^2\theta \cdot \operatorname{cosec}^2\theta = \text{R.H.S.}$$

(xiv) $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

हल–

$$\text{L.H.S.} = \sec^4\theta - \sec^2\theta$$

$$= \sec^2\theta(\sec^2\theta - 1) = (1 + \tan^2\theta)\tan^2\theta$$

$$[\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta]$$

$$= \tan^2\theta + \tan^4\theta$$

$$= \tan^4\theta + \tan^2\theta = \text{R.H.S.}$$

(xv) $(\text{cosec}^2\theta-1)(\sec^2\theta-1)=1$

हल– L.H.S. $=(\text{cosec}^2\theta-1)(\sec^2\theta-1)$

$$=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$$

$$=\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$=1=$ R.H.S.

8. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $(1+\cot\theta-\text{cosec}\,\theta)(1+\tan\theta+\sec\theta)=2$

(ii) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=2\sec\theta$

(iii) $\dfrac{\sec A-\tan A}{\sec A+\tan A}=1-2\sec A\tan A+2\tan^2 A$

(iv) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta-1}+\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta+1}=2\,\text{cosec}\,\theta$

(v) $\sin^2\theta+\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}=1$

(vi) $\dfrac{1}{\sec A+\tan A}=\sec A-\tan A$

(vii) $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta.\,\text{cosec}\,\theta$

(viii) $\cos^2\theta+\cos^2\theta\cot^2\theta=\cot^2\theta$

(ix) $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$

(x) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\sec^2\theta\,\text{cosec}^2-2$

हल– (i) $(1+\cot\theta-\text{cosec}\,\theta)(1+\tan\theta+\sec\theta)=2$

L.H.S. $=(1+\cot\theta-\text{cosec}\,\theta)(1+\tan\theta+\sec\theta)$

$$=\left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$=\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1^2}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2=\text{R.H.S.}$$

(ii) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=2\sec\theta$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{1+\sin^2\theta - 2\sin\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{1+\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{1+1-2\sin\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)} = \frac{2-2\sin\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{2(1-\sin\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)} = \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta = \text{R.H.S.}$$

(iii) $\dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A} = 1 - 2\sec A\tan A + 2\tan^2 A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}$$

$$= \frac{(\sec A - \tan A)(\sec A - \tan A)}{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)}$$

$$= \frac{(\sec A - \tan A)^2}{\sec^2 A - \tan^2 A}$$

$$= \frac{\sec^2 A + \tan^2 A - 2\sec A\tan A}{1}$$

$$= 1 + \tan^2 A + \tan^2 A - 2\sec A\tan A$$

$$= 1 + 2\tan^2 A - 2\sec A\tan A$$

$$= 1 - 2\sec A\tan + 2\tan^2 A = \text{R.H.S.}$$

(iv) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} + \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} = 2\operatorname{cosec}\theta$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} + \frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta\left(\frac{1}{\sec\theta - 1} + \frac{1}{\sec\theta + 1}\right)$$

$$= \tan\theta\left[\frac{\sec\theta + 1 + \sec\theta - 1}{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)}\right]$$

$$= \tan\theta\left[\frac{2\sec\theta}{\sec^2\theta - 1}\right] = \tan\theta \times \frac{2\sec\theta}{\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2\sec\theta}{\tan\theta} = \frac{2\sec\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{2\sec\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2}{\sin\theta} \qquad [\because \sec\theta \cdot \cos\theta = 1]$$

$$= 2\operatorname{cosec}\theta = \text{R.H.S.}$$

(v) $\sin^2\theta + \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} + \dfrac{1}{1+\cot^2\theta} = 1$

$$\text{L.H.S.} = \sin^2\theta + \frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \sin^2\theta + \frac{1}{\sec^2\theta} \qquad [\because 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta]$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

तथा $\dfrac{1}{1+\tan^2\theta} + \dfrac{1}{1+\cot^2\theta} = \dfrac{1}{\sec^2\theta} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

(vi) $\dfrac{1}{\sec A + \tan A} = \sec A - \tan A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{\sec A + \tan A}$$

$$= \frac{1 \times (\sec A - \tan A)}{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)}$$

$$= \frac{(\sec A - \tan A)}{\sec^2 A - \tan^2 A}$$

$$= \frac{(\sec A - \tan A)}{1} \qquad [\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$$

$$= \frac{\sec A - \tan A}{1}$$

$$= \sec A - \tan A = \text{R.H.S.}$$

(vii) $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta$

$$\text{L.H.S.} = \tan\theta + \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta} = \sec\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta$$

$$= \text{R.H.S.}$$

(viii) $\cos^2\theta + \cos^2\theta \cot^2\theta = \cot^2\theta$

$$\text{L.H.S.} = \cos^2\theta + \cos^2\theta \cot^2\theta$$

$$=\cos^2\theta(1+\cot^2\theta)$$

$$=\cos^2\theta\cdot\operatorname{cosec}^2\theta=\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\cot^2\theta=\text{R.H.S.}$$

(ix) $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$

$$\text{L.H.S.}=\tan^2\theta-\sin^2\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$$

$$=\sin^2\theta\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)=\sin^2\theta\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\sin^2\theta$$

$$=\tan^2\theta\sin^2\theta=\text{R.H.S.}$$

(x) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta-2$

$$\text{L.H.S.}=\tan^2\theta+\cot^2\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(1)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}-\frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}\times\frac{1}{\cos^2\theta}-2$$

$$=\operatorname{cosec}^2\theta\cdot\sec^2\theta-2$$

$$=\sec^2\theta\cdot\operatorname{cosec}^2\theta-2=\text{R.H.S.}$$

9. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$ **(ii)** $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta$

(iii) $\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A$

(iv) $\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}=2\sec\theta$

(v) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$

हल– (i) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$

$$\text{L.H.S.}=\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\sec\theta-\tan\theta=\text{R.H.S.}$$

(ii) $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta$

$$\text{L.H.S.}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta=\text{R.H.S.}$$

(iii) $\frac{1}{1-\sin A}+\frac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{1-\sin A}+\frac{1}{1+\sin A}$$

$$=\frac{1+\sin A+1-\sin A}{(1-\sin A)(1+\sin A)}=\frac{2}{1-\sin^2 A}$$

$$=\frac{2}{\cos^2 A}=2\sec^2 A=\text{R.H.S.}$$

(iv) $\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}=2\sec\theta$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{(\sec\theta-\tan\theta)}+\frac{1}{(\sec\theta+\tan\theta)}$$

$$=\frac{\sec\theta+\tan\theta+\sec\theta-\tan\theta}{(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}$$

$$=\frac{2\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\sec\theta}{1}=2\sec\theta=\text{R.H.S.}$$

(v) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$

$$\text{L.H.S.}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$$

$$=\text{R.H.S.}$$

10. यदि $\tan\theta+\sin\theta=p$ तथा $\tan\theta-\sin\theta=q$ तो सिद्ध कीजिए—

$$p^2-q^2=4\sqrt{pq}$$

हल– दिया है—

$$p=\tan\theta+\sin\theta$$

या $$p^2=(\tan\theta+\sin\theta)^2$$

$$=\tan^2\theta+\sin^2\theta+2\tan\theta\sin\theta$$

तथा $$q=\tan\theta-\sin\theta$$

या $$q^2=(\tan\theta-\sin\theta)^2$$

$$=\tan^2\theta+\sin^2\theta-2\tan\theta\sin\theta$$

$$\text{L.H.S.}=p^2-q^2$$

$$=\tan^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\tan\theta-(\tan^2\theta+\sin^2\theta-2\tan\theta\sin\theta)$$

$$=\tan^2\theta+\sin^2\theta+2\tan\theta\sin\theta-\tan^2\theta-\sin^2\theta+2\tan\theta\sin\theta$$

$$=4\tan\theta\sin\theta=4\sqrt{\tan^2\theta\sin^2\theta}$$

$$=4\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times(1-\cos^2\theta)}=4\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)}$$

$$=4\sqrt{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta\right)}$$

$$=4\sqrt{\tan^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$=4\sqrt{(\tan\theta+\sin\theta)(\tan\theta-\sin\theta)}$$

$$=4\sqrt{pq}$$

$$=\text{R.H.S.}$$

11. यदि $\sec A+\tan A=a$ है तो सिद्ध कीजिए— $\frac{a^2-1}{a^2+1}=\sin A$

हल– दिया है—

$$\sec A+\tan A=a$$

या $(\sec A+\tan A)^2=a^2$

या $\sec^2 A+\tan^2 A+2\tan A\sec A=a^2$

अत: $a^2-1=\sec^2 A+\tan^2 A+2\tan A\sec A-1$

$=\sec^2 A-1+\tan^2 A+2\tan A\sec A$

$=\tan^2 A+\tan^2 A+2\tan A\sec A$

$[\sec^2 A-1=\tan^2 A]$

$=2\tan^2 A+2\tan A\sec A$

$=2\tan A(\tan A+\sec A)$

तथा $a^2+1=\sec^2 A+\tan^2 A+2\tan A\sec A+1$

$=\sec^2 A+1+\tan^2 A+2\tan A\sec A$

$=\sec^2 A+\sec^2 A+2\tan A\sec A$

$[\because \sec^2 A=1+\tan^2 A]$

$=2\sec^2 A+2\tan A\sec A$

$=2\sec A(\sec A+\tan A)$

$=2\sec A(\tan A+\sec A)$

L.H.S. $=\frac{a^2-1}{a^2+1}$

$=\frac{2\tan A(\tan A+\sec A)}{2\sec A(\tan A+\sec A)}$

$=\frac{\tan A}{\sec A}=\frac{1}{\sec A}\times\tan A=\cos A\times\frac{\sin A}{\cos A}=\sin A$

$=$R.H.S.

12. यदि $x=a\cos\theta-b\sin\theta$ तथा $y=a\sin\theta+b\cos\theta$ तब सिद्ध कीजिए—

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

हल– दिया है—

$$x=a\cos\theta-b\sin\theta$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$x^2=(a\cos\theta-b\sin\theta)^2$$

या $x^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-2ab\cos\theta\cdot\sin\theta$ ...(1)

तथा $y=a\sin\theta+b\cos\theta$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$y^2=(a\sin\theta+b\cos\theta)^2$$

या $y^2=a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$x^2+y^2 = a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-2ab\cos\theta\sin\theta+ a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta$$

या $x^2+y^2 = a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta$

या $x^2+y^2 = a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

या $x^2+y^2 = a^2\times1+b^2\times1$

या $x^2+y^2 = a^2+b^2$ **इति सिद्धम**

13. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=3$ **(ii)** $\dfrac{\cos\theta}{\text{cosec}\,\theta+1}+\dfrac{\cos\theta}{\text{cosec}\,\theta-1}=2$

(iii) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=4$

हल– (i) दी गई समीकरण,

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=3$$

या $\sin^2\theta = 3-3\sin^2\theta$

या $\sin^2\theta+3\sin^2\theta = 3$

या $4\sin^2\theta = 3$

या $\sin^2\theta = \dfrac{3}{4}$

या $\sin\theta = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

अब, यदि $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

या $\sin\theta = \sin 60^\circ$ तथा $\sin\theta = \sin 120^\circ$

या $\theta = \mathbf{60^\circ}$ या $\theta = \mathbf{120^\circ}$ **उत्तर**

(ii) दी गई समीकरण,

$$\frac{\cos\theta}{\text{cosec}\,\theta+1}+\frac{\cos\theta}{\text{cosec}\,\theta-1}=2$$

या $\cos\theta\left(\dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta+1}+\dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta-1}\right)=2$

या $\cos\theta\left\{\dfrac{\text{cosec}\,\theta-1+\text{cosec}\,\theta+1}{(\text{cosec}\,\theta+1)(\text{cosec}\,\theta-1)}\right\}=2$

या $\cos\theta\left\{\dfrac{2\text{cosec}\,\theta}{\text{cosec}^2\theta-1^2}\right\}=2$

या $\cos\theta\left(\dfrac{2\text{cosec}\,\theta}{\text{cosec}^2\theta-1}\right)=2$

या $\cos\theta\left(\frac{2\operatorname{cosec}\theta}{\cot^2\theta}\right)=2$ $(\because \cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1)$

या $\frac{2\cos\theta\times\operatorname{cosec}\theta}{\cot^2\theta}=2$

या $\frac{\cos\theta\times\frac{1}{\sin\theta}}{\cot^2\theta}=1$ या $\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cot^2\theta}=1$

या $\frac{\cot\theta}{\cot^2\theta}=1$ या $\frac{1}{\cot\theta}=1$

या $\cot\theta=1$

या $\cot\theta=\cot 45^\circ$

या $\theta=\mathbf{45^\circ}$ **उत्तर**

(iii) दी गई समीकरण,

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=4$

या $\sin\theta\left(\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}\right)=4$

या $\sin\theta\left\{\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\right\}=4$

या $\sin\theta\left\{\frac{2}{1^2-\cos^2\theta}\right\}=4$

या $\sin\theta\left(\frac{2}{1-\cos^2\theta}\right)=4$

या $\frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=4$ या $\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=4$

या $\frac{2}{\sin\theta}=4$ या $\frac{\sin\theta}{2}=\frac{1}{4}$

या $\sin\theta=\frac{2}{4}$ या $\sin\theta=\frac{1}{2}$

या $\sin\theta=\sin 30^\circ$

या $\theta=\mathbf{30^\circ}$ **उत्तर**

14. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

(iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

(v) $\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}=\operatorname{cosec}A+\cot A$ ($\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$ सर्वसमिका का प्रयोग कीजिए।)

(vi) $\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}=\tan\theta$

(vii) $(\sin A+\operatorname{cosec}A)^2+(\cos A+\sec A)^2=7+\tan^2 A+\cot^2 A$

(viii) $(\operatorname{cosec}A-\sin A)(\sec A-\cos A)=\frac{1}{\tan A+\cot A}$

(ix) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2=\tan^2 A$

हल– (i) सिद्ध करना है—

$$(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\text{L.H.S.}=(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है—

$$\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A$$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{\cos^2 A+(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{1+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}=\frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{2}{\cos A}=2\sec A=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है—

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\frac{1}{\cot\theta}}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\frac{1}{\cot\theta}}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta(1-\cot\theta)} + \frac{\cot\theta}{\frac{\cot\theta-1}{\cot\theta}}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta(1-\cot\theta)} + \frac{\cot^2\theta}{(\cot\theta-1)}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta(1-\cot\theta)} - \frac{\cot^2\theta}{(1-\cot\theta)}$$

$$= \frac{1-\cot^3\theta}{\cot\theta(1-\cot\theta)} = \frac{1^3-\cot^3\theta}{\cot\theta(1-\cot\theta)}$$

$$= \frac{(1-\cot\theta)(1+\cot^2\theta+\cot\theta)}{\cot\theta(1-\cot\theta)}$$

$$= \frac{1+\cot^2\theta+\cot\theta}{\cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta} + \frac{\cot^2\theta}{\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{\cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\cot\theta} + \cot\theta + 1 = \tan\theta + \cot\theta + 1$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1 = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta} + 1$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\cdot\sin\theta} + 1 = 1 + \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= 1 + \sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है—

$$\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$= \frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} = \frac{\cos A(1+\cos A)}{\cos A}$$

$$= (1+\cos A)$$

या $$= \frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{(1-\cos A)}$$

$$= \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = \text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है—

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \frac{\cos A - (\sin A - 1)}{\cos A + (\sin A - 1)}$$

$$= \frac{\{\cos A - (\sin A - 1)\}\{\cos A - (\sin A - 1)\}}{\{\cos A + (\sin A - 1)\}\{\cos A - (\sin A - 1)\}}$$

$$= \frac{\{\cos A - (\sin A - 1)\}^2}{\{\cos^2 A - (\sin A - 1)^2\}}$$

$$= \frac{\cos^2 A + (\sin A - 1)^2 - 2\cos A(\sin A - 1)}{\{\cos^2 A - (\sin^2 A + 1 - 2\sin A)\}}$$

$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A + 1 - 2\sin A - 2\sin A\cos A + 2\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A - 1 + 2\sin A}$$

$$= \frac{1 + 1 - 2\sin A - 2\sin A\cos A + 2\cos A}{1 - \sin^2 A - \sin^2 A - 1 + 2\sin A}$$

$$= \frac{2 - 2\sin A - 2\sin A\cos A + 2\cos A}{-2\sin^2 A + 2\sin A}$$

$$= \frac{2 - 2\sin A + 2\cos A - 2\sin A\cos A}{2\sin A - 2\sin^2 A}$$

$$= \frac{2(1-\sin A) + 2\cos A(1-\sin A)}{2\sin A(1-\sin A)}$$

$$= \frac{2(1-\sin A)(1+\cos A)}{2\sin A(1-\sin A)} = \frac{1+\cos A}{\sin A}$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \operatorname{cosec} A + \cot A = \text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{\{1 - 2(1-\cos^2\theta)\}}{(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \tan\theta \cdot \frac{\{1-2+2\cos^2\theta\}}{(2\cos^2\theta-1)} = \tan\theta \cdot \frac{(2\cos^2\theta-1)}{(2\cos^2\theta-1)}$$

$$= \tan\theta = \text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है—

$$(\sin A+\operatorname{cosec} A)^2+(\cos A+\sec A)^2 = 7 + \tan^2 A+\cot^2 A$$

$$\text{L.H.S.} = (\sin A+\operatorname{cosec} A)^2+(\cos A+\sec A)^2$$

$$= \sin^2 A+\operatorname{cosec}^2 A+2\sin A.\operatorname{cosec} A+\cos^2 A + \sec^2 A+2\cos A.\sec A$$

$$= \sin^2 A+\cos^2 A+\operatorname{cosec}^2 A+\sec^2 A+2+2 \quad [\because \cos A \sec A = 1 = \sin A \operatorname{cosec} A]$$

$$= 1+1+\cot^2 A+1+\tan^2 A+4$$

$$= 7+\tan^2 A+\cot^2 A = \text{R.H.S.}$$

(viii) $(\operatorname{cosec} A-\sin A)(\sec A-\cos A) = \dfrac{1}{\tan A+\cot A}$

$$\text{L.H.S.} = (\operatorname{cosec} A-\sin A)(\sec A-\cos A)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A}-\sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A}-\cos A\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 A.\sin^2 A}{\sin A\cos A} = \frac{\cos A.\sin A}{1}$$

$$= \frac{\cos A.\sin A}{\sin^2 A+\cos^2 A} = \frac{1}{\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}} = \frac{1}{\tan A+\cot A} = \text{R.H.S.}$$

(ix) सिद्ध करना है—

$$\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \frac{1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{\sin^2 A(\cos^2 A + \sin^2 A)}{\cos^2 A(\sin^2 A + \cos^2 A)} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \tan^2 A = \text{R.H.S.}$$

पुनः सिद्ध पद $\left[\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2 = \tan^2 A$ सिद्ध करना है—

$$\text{L.H.S.} = \left[\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2$$

$$= \left[\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}\right]^2 = \left[\frac{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\cos A - \sin A) \times \sin A}{(\sin A - \cos A) \times \cos A}\right]^2$$

$$= \frac{(\cos A - \sin A)^2 \times \sin^2 A}{(\sin A - \cos A)^2 \times \cos^2 A}$$

$$= \frac{(\sin A - \cos A)^2 \times \sin^2 A}{(\sin A - \cos A)^2 \times \cos^2 A} \quad [\because (a-b)^2 = (b-a)^2]$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \tan^2 A = \text{R.H.S.}$$

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 131,132 व 133 का अवलोकन कीजिए।

■ □ ■

7

दो कोणों के योग तथा अन्तर के त्रिकोणमितीय अनुपात
(Trigonometric Ratios of Sum and Difference of Two Angles)

अभ्यास 7.1

1. सिद्ध कीजिए— $\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$

हल– सिद्ध करना है— $\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$

$$\text{L.H.S.} = \cot 75^\circ$$
$$= \cot(30^\circ + 45^\circ)$$
$$= \frac{\cot 30^\circ \cot 45^\circ - 1}{\cot 45^\circ + \cot 30^\circ} \quad \left[\because \cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}\right]$$
$$= \frac{\sqrt{3} \times 1 - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$
$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{2}$$
$$= 2 - \sqrt{3} = \text{R.H.S.}$$

2. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\tan(A+B) - \tan B}{1 + \tan(A+B)\tan B} = \tan A$

हल– सिद्ध करना है— $\dfrac{\tan(A+B) - \tan B}{1 + \tan(A+B)\tan B} = \tan A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan(A+B) - \tan B}{1 + \tan(A+B)\tan B} = \tan[(A+B) - B]$$
$$\left[\because \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}\right]$$
$$= \tan[A + B - B] = \tan A = \text{R.H.S.}$$

3. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right)\tan\left(\dfrac{3\pi}{4} + \theta\right)$ **(ii)** $\dfrac{\tan 30^\circ + \tan 15^\circ}{\tan 30^\circ \tan 15^\circ - 1}$

(iii) $\dfrac{\tan 69^\circ + \tan 66^\circ}{1 - \tan 69^\circ \tan 66^\circ} + 1$ **(iv)** $\tan 75^\circ$

(v) $\tan 15^\circ + \tan 30^\circ + \tan 15^\circ \tan 30^\circ$

हल– (i) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\times\frac{\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{3\pi}{4}\tan\theta}$

$=\frac{1+\tan\theta}{1-1\times\tan\theta}\times\frac{-1+\tan\theta}{1-(-1)\tan\theta}$

$=\frac{(1+\tan\theta)}{(1-\tan\theta)}\times\frac{(\tan\theta-1)}{(1+\tan\theta)}=\frac{(\tan\theta-1)}{(1-\tan\theta)}=-\frac{(1-\tan\theta)}{(1-\tan\theta)}$

$=-1$ **उत्तर**

(ii) $\frac{\tan 30^\circ+\tan 15^\circ}{\tan 30^\circ\tan 15^\circ-1}=-\frac{\tan 30^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 15^\circ}$

$=-\tan(30^\circ+15^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$ **उत्तर**

(iii) $\frac{\tan 69^\circ+\tan 66^\circ}{1-\tan 69^\circ\tan 66^\circ}+1=\tan(69^\circ+66^\circ)+1=\tan 135^\circ+1=-1+1=0$ **उत्तर**

(iv) $\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}}{\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}}=\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=\frac{3+1+2\sqrt{3}}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{2}$

$=2+\sqrt{3}$ **उत्तर**

(v) $\tan 15^\circ+\tan 30^\circ+\tan 15^\circ\tan 30^\circ$

$=\tan 15^\circ+\frac{1}{\sqrt{3}}+\tan 15^\circ\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\tan 15^\circ+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan 15^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\tan 15^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\tan(45^\circ-30^\circ)$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\right]$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$$ उत्तर

4. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\cos(60°+A)+\cos(60°-A)=\cos A$

(ii) $\cot\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=1$

(iii) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

(iv) $\sin(45°+A)-\cos(45°-A)=0$

(v) $\cos A+\cos(120°-A)+\cos(120°+A)=0$

(vi) $\tan(45°+A)=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}$

(vii) $\sin(A-30°)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin A-\cos A)$

(viii) $\cot(45°-A)=\frac{\cot A+1}{\cot A-1}$

हल- (i) सिद्ध करना है— $\cos(60°+A)+\cos(60°-A)=\cos A$

$$\text{L.H.S.}=\cos(60°+A)+\cos(60°-A)$$

$$=\cos 60°\cos A-\sin 60°\sin A+\cos 60°\cos A+\sin 60°\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\times\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin A+\frac{1}{2}\times\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}\cos A=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos A=\left(\frac{1+1}{2}\right)\cos A$$

$$=\frac{2}{2}\cos A=\cos A=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\cot\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=1$

$$\text{L.H.S.}=\cot\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$$

$$=\frac{\cot\frac{\pi}{4}\cot A-1}{\cot A+\cot\frac{\pi}{4}}\times\frac{\cot A\cot\frac{\pi}{4}+1}{\cot A-\cot\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1\times\cot A-1}{\cot A+1}\times\frac{\cot A\times 1+1}{\cot A-1}$$

$$=\frac{(\cot A-1)}{(\cot A+1)}\times\frac{(\cot A+1)}{(\cot A-1)}$$
$$=1=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

$$\text{L.H.S.}=\sin(A+B)\sin(A-B)$$
$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$
$$=(\sin A\cos B)^2-(\cos A\sin B)^2$$
$$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A-\sin^2 B=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\sin(45^\circ+A)-\cos(45^\circ-A)=0$

$$\text{L.H.S.}=\sin(45^\circ+A)-\cos(45^\circ-A)$$
$$=\sin 45^\circ\cos A+\cos 45^\circ\sin A-(\cos 45^\circ\cos A+\sin 45^\circ\sin A)$$
$$=\sin 45^\circ\cos A+\cos 45^\circ\sin A-\cos 45^\circ\cos A-\sin 45^\circ\sin A$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A=0=\text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)=0$

$$\text{L.H.S.}=\cos A+\cos 120^\circ\cos A+\sin 120^\circ\sin A$$
$$+\cos 120^\circ\cos A-\sin 120^\circ\sin A$$
$$=\cos A+\left(-\frac{1}{2}\right)\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\left(-\frac{1}{2}\right)\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$$
$$=\cos A-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$$
$$=\cos A-\frac{1}{2}\cos A-\frac{1}{2}\cos A=\cos A-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos A$$
$$=\cos A-\frac{2}{2}\cos A=\cos A-\cos A=0=\text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\tan(45^\circ+A)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

$$\text{L.H.S.}=\tan(45^\circ+A)=\frac{\tan 45^\circ+\tan A}{1-\tan 45^\circ\tan A}=\frac{1+\tan A}{1-1\times\tan A}$$
$$=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}=\text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\sin(A-30^\circ)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\sin A-\cos A)$

$$\text{L.H.S.}=\sin(A-30^\circ)=\sin A\cos 30^\circ-\cos A\sin 30^\circ$$
$$=\sin A\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos A\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\frac{1}{2}\cos A$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin A-\cos A)=\text{R.H.S.}$$

(viii) सिद्ध करना है— $\cot(45^\circ - A) = \dfrac{\cot A + 1}{\cot A - 1}$

$$\text{L.H.S.} = \cot(45^\circ - A) = \frac{\cot A \cot 45^\circ + 1}{\cot A - \cot 45^\circ} = \frac{\cot A \times 1 + 1}{\cot A - 1}$$

$$= \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1} = \text{R.H.S.}$$

5. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) = \sin x - \cos x$

(ii) $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) = \sin x - \cos x$

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) = \sqrt{2}(\sin x \cos 45^\circ - \cos x \sin 45^\circ)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)$$

$$= \sin x - \cos x = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)$$

$$= \cos x - \sin x = \text{R.H.S.}$$

6. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\sin(A + B)$, यदि $\sin A = \dfrac{3}{5}$ व $\cos B = \dfrac{5}{13}$

(ii) $\sin(A - B)$, यदि $\cos A = \dfrac{12}{13}$ व $\cos B = \dfrac{8}{17}$

(iii) $\tan(A + B)$, यदि $\tan A = \dfrac{1}{2}$ व $\tan B = \dfrac{1}{3}$

हल– (i) दिया है— $\sin A = \dfrac{3}{5}$

अतः $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \sqrt{\dfrac{25 - 9}{25}}$

$$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

तथा $\cos B = \dfrac{5}{13}$ अतः $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{25}{169}}$

$$= \sqrt{\frac{169 - 25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

अब, $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}$

$=\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{15+48}{65}=\mathbf{\frac{63}{65}}$ उत्तर

(ii) दिया है— $\cos A=\frac{12}{13}$

अतः $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}$

$=\sqrt{\frac{169-144}{169}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13}$

तथा $\cos B=\frac{8}{17}$ अतः $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\sqrt{\frac{289-64}{289}}$

$=\sqrt{\frac{225}{289}}=\frac{15}{17}$

अब, $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{5}{13}\times\frac{8}{17}-\frac{12}{13}\times\frac{15}{17}$

$=\frac{40}{221}-\frac{180}{221}=\frac{40-180}{221}=\mathbf{\frac{-140}{221}}$ उत्तर

(iii) दिया है— $\tan A=\frac{1}{2}$ तथा $\tan B=\frac{1}{3}$

अतः $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3+2}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{6-1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$

$=\mathbf{1}$ उत्तर

7. सिद्ध कीजिए— $\tan A+\tan B+\tan A.\tan B=1$, यदि $A+B=45°$

हल– दिया है— $A+B=45°$

दोनों पक्षों का tan लेने पर $\tan(A+B)=\tan 45°$

या $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$

या $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$

या $\tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$ इति सिद्धम्

8. सिद्ध कीजिए— $\cos A(120°+A)+\cos(120°-A)=-\cos A$

हल– सिद्ध करना है— $\cos A(120°+A)+\cos(120°-A)=-\cos A$

L.H.S. $=\cos(120°+A)+\cos(120-A)$

$=\cos 120°\cos A-\sin 120°\sin A+\cos 120°\cos A+\sin 120°\sin A$

$=2\cos 120°\cos A=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cos A$

$=-\cos A=$ R.H.S.

9. सिद्ध कीजिए— $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$

हल– सिद्ध करना है— $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \cos(A+B)\cos(A-B)\\
&= (\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)\\
&= \cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B\\
&= \cos^2 A\cos^2 B-(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)\\
&= \cos^2 A\cos^2 B-(1-\cos^2 B-\cos^2 A+\cos^2 A\cos^2 B)\\
&= \cos^2 A\cos^2 B-1+\cos^2 B+\cos^2 A-\cos^2 A\cos^2 B\\
&= \cos^2 A-1+\cos^2 B=\cos^2 A-(1-\cos^2 B)\\
&= \cos^2 A-\sin^2 B=\text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

10. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\sin(A-B)+\sin A+\sin(A+B)}{\cos(A-B)+\cos A+\cos(A+B)}=\tan A$

हल– सिद्ध करना है— $\dfrac{\sin(A-B)+\sin A+\sin(A+B)}{\cos(A-B)+\cos A+\cos(A+B)}=\tan A$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \frac{\sin(A-B)+\sin A+\sin(A+B)}{\cos(A-B)+\cos A+\cos(A+B)}\\
&= \frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B+\sin A+\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B+\cos A+\cos A\cos B-\sin A\sin B}\\
&= \frac{\sin A+2\sin A\cos B}{\cos A+2\cos A\cos B}=\frac{\sin A(1+2\cos B)}{\cos A(1+2\cos B)}=\frac{\sin A}{\cos A}\\
&= \tan A=\text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

11. $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\tan 2A\tan A$ को सिद्ध कीजिए—

हल– हम जानते हैं कि—

$$\tan 3A=\tan(2A+A)$$

या $$\tan 3A=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}$$

या $$\tan 3A-\tan 3A\tan 2A\tan A=\tan 2A+\tan A$$

या $$\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\tan 2A\tan A$$

12. ΔABC में सिद्ध कीजिए कि— $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

हल– हम जानते हैं कि— ΔABC में,

$$A+B+C=180^\circ$$

या $$A+B=180^\circ-C$$

दोनों पक्षों का tan लेने पर,

$$\tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)$$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

या $$\tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)$$

या $$\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$$

या $$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$$

इति सिद्धम्

13. यदि $A+B=225°$, तो सिद्ध कीजिए कि— $\dfrac{\cot A}{1+\cot A}\cdot\dfrac{\cot B}{1+\cot B}=\dfrac{1}{2}$

हल– दिया है— $A+B=225° \Rightarrow B=225°-A=180°+(45°-A)$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\cot B}{1+\cot B}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\cot[180°+(45°-A)]}{1+\cot[180°+(45°-A)]}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\cot(45°-A)}{1+\cot(45°-A)}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\dfrac{\cot 45°\cot A+1}{\cot A-\cot 45°}}{1+\dfrac{\cot 45°\cot A+1}{\cot A-\cot 45°}}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\dfrac{1\times\cot A+1}{\cot A-1}}{1+\dfrac{1\times\cot A+1}{\cot A-1}}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\dfrac{(\cot A+1)}{(\cot A-1)}}{1+\dfrac{\cot A+1}{\cot A-1}}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\dfrac{(\cot A+1)}{(\cot A-1)}}{\dfrac{\cot A-1+\cot A+1}{(\cot A-1)}}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{\dfrac{(\cot A+1)}{(\cot A-1)}}{\dfrac{2\cot A}{(\cot A-1)}}$$

$$=\frac{\cot A}{(1+\cot A)}\cdot\frac{(\cot A-1)(\cot A+1)}{2\cot A(\cot A-1)}=\frac{1}{2}=\text{R.H.S.}$$

14. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\tan 75°+\cot 75°=4$

(ii) $\cos(45°+A)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$

(iii) $\cos(30°-A)-\cos(30°+A)=\sin A$

(iv) $\sqrt{2}(\cos 105°+\sin 105°)=1$

(v) $\dfrac{1-\tan A\tan B}{1+\tan A\tan B}=\dfrac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}$

(vi) $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$

(vii) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+60^\circ)$

हल– (i) सिद्ध करना है– $\tan 75^\circ+\cot 75^\circ=4$

$$\text{L.H.S.}=\tan 75^\circ+\cot 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)+\cot(45^\circ+30^\circ)$$

$$=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}+\frac{\cot 45^\circ\cot 30^\circ-1}{\cot 30^\circ+\cot 45^\circ}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1\times\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}+\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{3-1}$$

$$=\frac{8}{2}=4=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\cos(45^\circ+A)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$

$$\text{L.H.S.}=\cos(45^\circ+A)=\cos 45^\circ\cos A-\sin 45^\circ\sin A$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\cos(30^\circ-A)-\cos(30^\circ+A)=\sin A$

$$\text{L.H.S.}=\cos(30^\circ-A)-\cos(30^\circ+A)$$

$$=\cos 30^\circ\cos A+\sin 30^\circ\sin A-(\cos 30^\circ\cos A-\sin 30^\circ\sin A)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\sin A+\frac{1}{2}\sin A=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin A=\frac{2}{2}\sin A=\sin A=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\sqrt{2}(\cos 105^\circ+\sin 105^\circ)=1$

$$\text{L.H.S.}=\sqrt{2}(\cos 105^\circ+\sin 105^\circ)$$

$$=\sqrt{2}[\cos(60^\circ+45^\circ)+\sin(60^\circ+45^\circ)]$$

$$=\sqrt{2}[\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ+\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ]$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1+1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\times 2}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 = \textbf{R. H. S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\dfrac{1-\tan A \tan B}{1+\tan A \tan B} = \dfrac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\tan A \tan B}{1+\tan A \tan B} = \frac{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1+\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos A\cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B + \sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\dfrac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos(A-B)}{\cos A\cos B}}$$

$$= \frac{\cos(A+B)\cos A\cos B}{\cos(A-B)\cos A\cos B} = \frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)} = \textbf{R. H. S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} + \dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} = 0$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}$$

$$= \frac{\sin A\cos B - \cos A\sin B}{\cos A\cos B} + \frac{\sin B\cos C - \cos B\sin C}{\cos B\cos C} + \frac{\sin C\cos A - \cos C\sin A}{\cos C\cos A}$$

$$= \frac{\sin A\cos B\cos C - \cos A\sin B\cos C + \cos A\sin B\cos C - \cos A\cos B\sin C + \cos B\sin C\cos A - \cos B\cos C\sin A}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$= \frac{0}{\cos A\cos B\cos C} = 0 = \text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x+60^\circ)$

$$\text{R.H.S.} = 2\sin(x+60^\circ) = 2(\sin x\cos 60^\circ + \cos x\sin 60^\circ)$$

$$= 2\left(\sin x\times\frac{1}{2} + \cos x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{2}(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

$$= \sin x + \sqrt{3}\cos x = \text{L.H.S.}$$

15. ΔABC में सिद्ध कीजिए— $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$

हल– हम जानते हैं कि ΔABC में,

$$A + B + C = 180^\circ$$

या $$(A+B) = (180^\circ - C)$$

दोनों पक्षों का cot लेने पर

$$\cot(A+B) = \cot(180^\circ - C)$$

या $\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}=-\cot C$

या $\cot A\cot B-1=-\cot B\cot C-\cot C\cot A$

या $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ इति सिद्धम्

16. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\tan\left(A-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cot\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

(ii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right).\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}+\theta\right)=-1$

(iii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right)=2\sec 2A$

(iv) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{1}{2}-\sin^2 x$

(v) $\sin(A-B)\sin(A+B)+\sin(B-C)\sin(B+C)+\sin(C-A)\sin(C+A)=0$

(vi) $\tan(A-B)=0.375$, यदि $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ व $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\tan\left(A-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cot\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$$\text{L.H.S.}=\tan\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\tan A-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan A\times\tan\frac{\pi}{4}}+\frac{\cot A\cot\frac{\pi}{4}-1}{\cot\frac{\pi}{4}+\cot A}$$

$$=\frac{\tan A-1}{1+\tan A\times 1}+\frac{\cot A\times 1-1}{1+\cot A}$$

$$=\frac{\tan A-1}{1+\tan A}+\frac{\cot A-1}{1+\cot A}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-1}{1+\frac{\sin A}{\cos A}}+\frac{\frac{\cos A}{\sin A}-1}{1+\frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{\frac{\sin A-\cos A}{\cos A}}{\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}}+\frac{\frac{\cos A-\sin A}{\sin A}}{\frac{\sin A+\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{(\sin A-\cos A)\cos A}{(\sin A+\cos A)\cos A}+\frac{(\cos A-\sin A)\sin A}{(\sin A+\cos A)\sin A}$$

$$=\frac{\sin A-\cos A}{\sin A+\cos A}+\frac{\cos A-\sin A}{\sin A+\cos A}$$

$$=\frac{\sin A-\cos A+\cos A-\sin A}{\sin A+\cos A}$$

$$= \frac{0}{\sin A + \cos A} = 0 = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right) = -1$

$$\text{L.H.S.} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} \cdot \frac{\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{3\pi}{4}\tan\theta}$$

$$= \frac{1+\tan\theta}{1-1\times\tan\theta} \cdot \frac{-1+\tan\theta}{1-(-1)\tan\theta} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} \times \frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}$$

$$= \frac{-(1-\tan\theta)}{(1-\tan\theta)} \times \frac{(1+\tan\theta)}{(1+\tan\theta)} = -1 = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right) = 2\sec 2A$

$$\text{L.H.S.} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan A}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan A} + \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan A}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan A}$$

$$= \frac{1+\tan A}{1-1\times\tan A} + \frac{1-\tan A}{1+1\times\tan A} = \frac{1+\tan A}{1-\tan A} + \frac{1-\tan A}{1+\tan A}$$

$$= \frac{1+\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}}{1+\frac{\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}} + \frac{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}{\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A} + \frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}$$

$$= \frac{(\cos A+\sin A)^2+(\cos A-\sin A)^2}{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A+\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$= \frac{2\sin^2 A+2\cos^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A} = \frac{2(\sin^2 A+\cos^2 A)}{\cos 2A}$$

$$= \frac{2 \times 1}{\cos 2A} = 2\sec 2A = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1}{2} - \sin^2 x$

$$\text{L.H.S.} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) = \frac{1}{2} - \sin^2 x = \text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\sin(A-B)\sin(A+B) + \sin(B-C)\sin(B+C) + \sin(C-A)\sin(C+A) = 0$

$$\text{L.H.S.} = \sin(A-B)\sin(A+B) + \sin(B-C)\sin(B+C) + \sin(C-A)\sin(C+A)$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 C - \sin^2 A$$

$$[\because \sin(A-B)\sin(A+B) = \sin^2 A - \sin^2 B]$$

$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\tan(A-B) = 0.375$, यदि $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ व $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$

$$\text{L.H.S.} = \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{(4-\sqrt{3})} \times \frac{\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{3}) - \sqrt{3}(4-\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}+3}{4^2-(\sqrt{3})^2}}{1 + \frac{\sqrt{3}^2}{4^2-(\sqrt{3})^2}} = \frac{\frac{3+3}{16-3}}{1+\frac{3}{16-3}} = \frac{\frac{6}{13}}{1+\frac{3}{13}}$$

$$= \frac{\frac{6}{13}}{\frac{16}{13}} = \frac{6\times13}{16\times13} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = \text{R.H.S.}$$

अभ्यास 7.2

1. $\sin A = \frac{3}{5}$ तो $\tan 2A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\sin A = \frac{3}{5} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

अतः आधार $= \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{लम्ब}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

अतः $\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{3}{4}$

अब $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}$

$= \frac{3\times16}{7\times2} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$ उत्तर

2. यदि $\cos 2A = \frac{13}{36}$ हो तो $\cos A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\cos 2A = \frac{13}{36}$

या $2\cos^2 A - 1 = \frac{13}{36}$ $[\because 2\cos^2 A - 1 = \cos 2A]$

या $2\cos^2 A = \frac{13}{36} + 1 = \frac{13+36}{36} = \frac{49}{36}$

या $\cos^2 A = \frac{49}{2\times36}$

या $\cos A = \sqrt{\frac{49}{2\times36}} = \frac{7}{6\sqrt{2}}$ उत्तर

3. यदि $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ हो, तो $\sin 22\frac{1}{2}°$ का मान बताइए।

हल– दिया है— $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

या $1 - 2\sin^2 \frac{45°}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $[\because 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} = \cos A]$

या $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sin^2 \frac{45°}{2}$

या $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 2\sin^2 \frac{45°}{2}$

या $2\sin^2\frac{45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

या $\sin^2 22\frac{1}{2}^\circ=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

या $\sin 22\frac{1}{2}^\circ=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ उत्तर

4. यदि $\cos A=\frac{3}{5}$ तथा $\cos B=\frac{4}{5}$ हो, तो $\cos\frac{1}{2}(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि A और B दोनों धनात्मक न्यून कोण हैं।

हल– दिया है— $\cos A=\frac{3}{5}$

अतः $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ से

$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

तथा $\cos B=\frac{4}{5}$

अतः $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}$ से

$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25-16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

अब $\cos(A-B)=2\cos^2\frac{A-B}{2}-1$ से

$\cos A\cos B+\sin A\sin B=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)-1$

या $\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)-1$

या $\frac{12}{25}+\frac{12}{25}=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)-1$

या $\frac{12+12}{25}=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)-1$

या $\frac{24}{25}+1=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)$

या $\frac{24+25}{25}=2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)$

या $\frac{49}{50}=\cos^2\frac{1}{2}(A-B)$

या $\cos\frac{1}{2}(A-B)=\sqrt{\frac{49}{50}}$

या $\cos\frac{1}{2}(A-B)=\frac{7}{5\sqrt{2}}$ उत्तर

5. $\sin 2A$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि—

(i) $\cos A = \frac{12}{13}$, (ii) $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (iii) $\cos A = \frac{5}{13}$, (iv) $\tan A = \frac{5}{12}$

हल– (i) दिया है— $\cos A = \frac{12}{13}$

अत: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}}$

$= \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}}$

$\sin A = \frac{5}{13}$

अब $\sin 2A = 2\sin A \cos A = 2\times\frac{5}{13}\times\frac{12}{13} = \mathbf{\frac{120}{169}}$ उत्तर

(ii) दिया है— $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अत: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$ से

$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

या $\sin A = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4-3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

अब $\sin 2A = 2\sin A \cos A$ से

$= 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ उत्तर

(iii) दिया है— $\cos A = \frac{5}{13}$

अत: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$ से

$\sin A = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

अब $\sin 2A = 2\sin A \cos A = 2\times\frac{12}{13}\times\frac{5}{13} = \mathbf{\frac{120}{169}}$ उत्तर

(iv) दिया है— $\tan A = \frac{5}{12}$

अत: $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ से

या $\sin 2A = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{\frac{5}{6}}{1+\frac{25}{144}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{144+25}{144}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{169}{144}}$

$$= \frac{144 \times 5}{6 \times 169} = \frac{120}{169}$$ उत्तर

6. यदि $\cos A = \frac{1}{2}$ हो, तो $\tan 2A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\cos A = \frac{1}{2}$

अतः $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ से

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अतः $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

अब, $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$ उत्तर

7. यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो $\tan 2A$ का मान निकालिए।

हल– दिया है— $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

हम जानते हैं कि— $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}}$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2 \times 3}{2 \times \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$ उत्तर

8. यदि $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\cos 3A$, (ii) $\sin 3A$, (iii) $\tan 3A$, (iv) $\sin 2A$

हल– दिया है— $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अतः $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

तथा $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(i) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$= 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$ उत्तर

(ii) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A = 3\times\frac{1}{2} - 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} - 4\times\frac{1}{8}$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ उत्तर

(iii) $\tan 3A = \frac{\sin 3A}{\cos 3A} = \frac{1}{0} = \infty$ उत्तर

(iv) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

9. यदि $2\cos^2 A = \cos^2 45° + \sin 60°$, तो $\cos 2A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—

$$2\cos^2 A = \cos^2 45° + \sin 60°$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

अब $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{3}-2}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ उत्तर

10. $\frac{\sin^3 15° - \cos^3 15°}{\sin 15° - \cos 15°}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल–

$$\frac{\sin^3 15° - \cos^3 15°}{\sin 15° - \cos 15°} = \frac{(\sin 15° - \cos 15°)(\sin^2 15° + \cos^2 15° + \sin 15°\cos 15°)}{(\sin 15° - \cos 15°)}$$

$$= 1 + \sin 15°\cos 15° = 1 + \frac{2\sin 15°\cos 15°}{2} = 1 + \frac{\sin 30°}{2}$$

$$= 1 + \frac{1/2}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$ उत्तर

11. यदि $\tan A = 1$ तो $(\sin A + \cos A)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\tan A = 1$

$$(\sin A + \cos A)^2 = \sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A\cos A$$

$$= 1 + \sin 2A = 1 + \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = 1 + \frac{2\times 1}{1+1^2}$$

$$= 1 + \frac{2}{1+1} = 1 + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$$ उत्तर

12. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $(\sin A + \cos A)^2 = 1 + \sin 2A$ (ii) $(\sin A - \cos A)^2 = 1 - \sin 2A$

(iii) $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A$ (iv) $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$

(v) $\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \cot A$ (vi) $\cot A + \tan A = 2\operatorname{cosec} 2A$

(vii) $1 + \tan 2A.\tan A = \sec 2A$ (viii) $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = \sqrt{\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}}$

(ix) $\frac{\cos 2A}{1-\sin 2A}=\cot(45°-A)$ (x) $\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right)$

(xi) $\frac{2\tan 15°}{1-\tan^2 15°}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (xii) $\sec^2 A(1+\sec 2A)=2\sec 2A$

(xiii) $\text{cosec}2A+\cot 2A=\cot A$

हल-- (i) सिद्ध करना है— $(\sin A+\cos A)^2=1+\sin 2A$

$$\text{L.H.S.}=(\sin A+\cos A)^2=\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A$$
$$=1+\sin 2A=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $(\sin A-\cos A)^2=1-\sin 2A$

$$\text{L.H.S.}=(\sin A-\cos A)^2=\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A$$
$$=1-\sin 2A=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\cos^4 A-\sin^4 A=\cos 2A$

$$\text{L.H.S.}=\cos^4 A-\sin^4 A$$
$$=(\cos^2 A+\sin^2 A)(\cos^2 A-\sin^2 A)$$
$$=1\times\cos 2A=\cos 2A=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\cot A-\tan A=2\cot 2A$

$$\text{L.H.S.}=\cot A-\tan A=\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{\cos 2A}{\sin A\cos A}=\frac{2\cos 2A}{2\sin A\cos A}=\frac{2\cos 2A}{\sin 2A}$$
$$=2\cot 2A=\text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\cot A$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\frac{2\sin A\cos A}{1-(1-2\sin^2 A)}=\frac{2\sin A\cos A}{1-1+2\sin^2 A}$$
$$=\frac{2\sin A\cos A}{2\sin^2 A}=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A=\text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\cot A+\tan A=2\text{cosec}2A$

$$\text{L.H.S.}=\cot A+\tan A=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{1}{\sin A\cos A}=\frac{2}{2\sin A\cos A}=\frac{2}{\sin 2A}$$
$$=2\text{cosec}2A=\text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $1+\tan 2A.\tan A=\sec 2A$

$$\text{L.H.S.}=1+\tan 2A.\tan A=1+\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.\tan A$$
$$=1+\frac{2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}=\frac{1-\tan^2+2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}=\frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}$$

$$= \frac{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{\cos 2A} = \sec 2A = \text{R.H.S.}$$

(viii) सिद्ध करना है— $\frac{\sin A+\cos A}{\sin A-\cos A} = \sqrt{\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin A+\cos A}{\sin A-\cos A} \text{ या } = \sqrt{\frac{(\sin A+\cos A)^2}{(\sin A-\cos A)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A}{\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}} = \text{R.H.S.}$$

(ix) सिद्ध करना है— $\frac{\cos 2A}{1-\sin 2A} = \cot(45°-A)$

$$\text{R.H.S.} = \cot(45°-A) = \frac{\cot 45°\cot A+1}{\cot A+\cot 45°} = \frac{1\times\cot A+1}{\cot A-1}$$

$$= \frac{\cot A+1}{\cot A-1} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A}+1}{\frac{\cos A}{\sin A}-1} = \frac{\frac{\cos A+\sin A}{\sin A}}{\frac{\cos A-\sin A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A} = \frac{(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)}{(\cos A-\sin A)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A}$$

$$= \frac{\cos 2A}{1-\sin 2A} = \text{L.H.S.}$$

(x) सिद्ध करना है— $\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right)$

$$\text{R.H.S.} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right) = \left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\right]^2$$

$$= \left[\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan A}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan A}\right]^2 = \left[\frac{1+\frac{\sin A}{\cos A}}{1-1\times\frac{\sin A}{\cos A}}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}\right]^2=\left[\frac{(\sin A+\cos A)\cos A}{(\cos A-\sin A)\cos A}\right]^2$$

$$=\left[\frac{(\sin A+\cos A)}{(\cos A-\sin A)}\right]^2=\frac{(\sin A+\cos A)^2}{(\cos A-\sin A)^2}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A}{\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}=\text{L.H.S.}$$

(xi) सिद्ध करना है— $\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\tan 2\times 15^\circ=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\text{R.H.S.}$$

(xii) सिद्ध करना है— $\sec^2 A(1+\sec 2A)=2\sec 2A$

$$\text{L.H.S.}=\sec^2 A(1+\sec 2A)=\frac{1}{\cos^2 A}\left(1+\frac{1}{\cos 2A}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos^2 A}\left(\frac{\cos 2A+1}{\cos 2A}\right)=\frac{1}{\cos^2 A}\left(\frac{2\cos^2 A-1+1}{\cos 2A}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos^2 A}\times\frac{2\cos^2 A}{\cos 2A}=\frac{2}{\cos 2A}=2\sec 2A=\text{R.H.S.}$$

(xiii) सिद्ध करना है— $\operatorname{cosec}2A+\cot 2A=\cot A$

$$\text{L.H.S.}=\operatorname{cosec}2A+\cot 2A=\frac{1}{\sin 2A}+\frac{\cos 2A}{\sin 2A}=\frac{1+\cos 2A}{\sin 2A}$$

$$=\frac{1+2\cos^2 A-1}{2\sin A\cos A}=\frac{2\cos^2 A}{2\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A=\text{R.H.S.}$$

13. सिद्ध कीजिए—

(i) $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}=\sin 2A$ **(ii)** $\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\tan 2A$

(iii) $2\cos(45^\circ+x).\cos(45^\circ-x)=\cos 2x$

(iv) $\tan 75^\circ+\cot 75^\circ=4$ **(v)** $\tan A+\cot A=2\operatorname{cosec}2A$

(vi) $\frac{\cot A-\tan A}{\cot A+\tan A}=\cos 2A$

(vii) $\frac{\sin 8A}{\sin A}=8\operatorname{cosec}A.\cos 2A.\cos 4A$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}=\sin 2A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{2\dfrac{\sin A}{\cos A}}{1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\dfrac{2\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{2\sin A\cos^2 A}{\cos A(\sin^2 A+\cos^2 A)} = \frac{2\sin A\cos A}{1}$$

$$= 2\sin A\cos A = \sin 2A = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \tan 2A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\dfrac{\sin A}{\cos A}}{1-\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2\dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{2\sin A\cos^2 A}{\cos A(\cos^2 A-\sin^2 A)} = \frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$= \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \tan 2A = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $2\cos(45°+x)\cdot\cos(45°-x) = \cos 2x$

$$\text{L.H.S.} = 2\cos(45°+x)\cdot\cos(45°-x)$$

$$= 2(\cos 45°\cos x-\sin 45°\sin x)(\cos 45°\cos x+\sin 45°\sin x)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$$

$$= 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

$$= \frac{2}{2}(\cos^2 x-\sin^2 x) = \cos 2x = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\tan 75°+\cot 75° = 4$

$$\text{L.H.S.} = \tan 75°+\cot 75° = \tan(45°+30°)+\cot(45°+30°)$$

$$= \frac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}+\frac{\cot 45°\cot 30°-1}{\cot 30°+\cot 45°}$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1\times\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{8}{2} = 4 = \text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\tan A+\cot A = 2\operatorname{cosec} 2A$

$$\text{L.H.S.} = \tan A + \cot A = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A} = \frac{2 \times 1}{2 \times \sin A \cos A} = \frac{2}{\sin 2A}$$

$$= 2\operatorname{cosec} 2A = \text{R. H. S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cot A - \tan A}{\cot A + \tan A} = \cos 2A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cot A - \tan A}{\cot A + \tan A} = \frac{\dfrac{\cos A}{\sin A} - \dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \dfrac{\sin A}{\cos A}} = \frac{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin A \cos A}}{\dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cos A}}$$

$$= \frac{(\cos^2 A - \sin^2 A)\sin A \cos A}{(\cos^2 A + \sin^2 A)\sin A \cos A} = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos 2A}{1} = \cos 2A = \text{R. H. S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\dfrac{\sin 8A}{\sin A} = 8 \operatorname{cosec} A \cdot \cos 2A \cdot \cos 4A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin 8A}{\sin A} = \frac{\sin 2(4A)}{\sin A} = \frac{2\sin 4A \cos 4A}{\sin A}$$

$$= \frac{2 \cdot 2\sin 2A \cos 2A \cos 4A}{\sin A}$$

$$= \frac{4 \cdot 2\sin A \cos A \cos 2A \cos 4A}{\sin A}$$

$$= 8 \cdot \cos A \cos 2A \cos 4A = \text{R. H. S.}$$

14. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\dfrac{\dfrac{1}{\tan A} - \tan A}{\cot A + \dfrac{1}{\cot A}} = 2\cos^2 A - 1$

(ii) $\dfrac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$

(iii) $\dfrac{1 - \sin 2A}{1 - \cos 2A} = \dfrac{1}{2}(\cot A - 1)^2$

(iv) $\dfrac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$

(v) $\dfrac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$

(vi) $\dfrac{1 - \cos 2A + \sin 2A}{1 + \cos 2A + \sin 2A} = \tan A$

(vii) $\cos A \cos(60° + A) \cos(60° - A) = \dfrac{1}{4}\cos 3A$

(viii) $\sin^2(A + B) - \sin^2(A - B) = 2 \sin 2A \sin 2B$

(ix) $\dfrac{1 - \sin 2A}{\cos 2A} = \dfrac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$

(x) $1 + \cos^2 2\theta = 2(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\dfrac{\dfrac{1}{\tan A} - \tan A}{\cot A + \dfrac{1}{\cot A}} = 2\cos^2 A - 1$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\frac{1}{\tan A} - \tan A}{\cot A + \frac{1}{\cot A}} = \frac{\cot A - \tan A}{\cot A + \tan A}$$

$$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin A \cos A}}{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cos A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A} = \frac{\cos^2 A - (1 - \cos^2 A)}{1}$$

$$= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A = 2\cos^2 A - 1 = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 A)}{1 + 2\cos^2 A - 1} = \frac{1 - 1 + 2\sin^2 A}{2\cos^2 A}$$

$$= \frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A} = \tan^2 A = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\frac{1 - \sin 2A}{1 - \cos 2A} = \frac{1}{2}(\cot A - 1)^2$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1 - \sin 2A}{1 - \cos 2A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A - 2\sin A \cos A}{1 - (1 - 2\sin^2 A)}$$

$$\left[\because 1 = \sin^2 A + \cos^2 A,\ \sin 2A = 2\sin A \cos A,\ \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A\right]$$

$$= \frac{(\cos A - \sin A)^2}{1 - 1 + 2\sin^2 A} = \frac{(\cos A - \sin A)^2}{2\sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos A - \sin A}{\sin A}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\sin A}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(\cot A - 1)^2 = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{2\sin A \cos A}{1 + 2\cos^2 A - 1}$$

$$= \frac{2\sin A \cos A}{2\cos^2 A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A = \text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \frac{2\sin A\cos A}{1-(1-2\sin^2 A)} = \frac{2\sin A\cos A}{1-1+2\sin^2 A}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{2\sin^2 A} = \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A = \text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\dfrac{1-\cos 2A+\sin 2A}{1+\cos 2A+\sin 2A} = \tan A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\cos 2A+\sin 2A}{1+\cos 2A+\sin 2A}$$

$$= \frac{1-(1-2\sin^2 A)+2\sin A\cos A}{1+2\cos^2 A-1+2\sin A\cos A}$$

$$= \frac{1-1+2\sin^2 A+2\sin A\cos A}{2\cos^2 A+2\sin A\cos A}$$

$$= \frac{2\sin^2 A+2\sin A\cos A}{2\cos^2 A+2\sin A\cos A} = \frac{2\sin A(\sin A+\cos A)}{2\cos A(\cos A+\sin A)}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A = \text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A) = \dfrac{1}{4}\cos 3A$

$$\text{L.H.S.} = \cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A)$$

$$= \cos A(\cos 60°\cos A-\sin 60°\sin A)(\cos 60°\cos A+\sin 60°\sin A)$$

$$= \cos A\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)\left(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cos A(\cos A-\sqrt{3}\sin A)(\cos A+\sqrt{3}\sin A)$$

$$= \frac{1}{4}\cos A(\cos^2 A-3\sin^2 A)$$

$$= \frac{1}{4}\cos A[(\cos^2 A-3(1-\cos^2 A)]$$

$$= \frac{1}{4}\cos A(\cos^2 A-3+3\cos^2 A)$$

$$= \frac{1}{4}\cos A(4\cos^2 A-3) = \frac{1}{4}(4\cos^3 A-3\cos A)$$

$$[\because \cos 3A = 4\cos^3 A-3\cos A]$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3A = \text{R.H.S.}$$

(viii) सिद्ध करना है— $\sin^2(A+B)-\sin^2(A-B) = 2\sin 2A\sin 2B$

$$\text{L.H.S.} = \sin^2(A+B)-\sin^2(A-B)$$

$$= \{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}$$

$$= \{\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A\cos B-\cos A\sin B\}$$

$$\{\sin A\cos B+\cos A\sin B-(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\}$$

$= \{(2\sin A\cos B)(\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin A\cos B+\cos A\sin B)\}$

$= (2\sin A\cos B)(2\cos A\sin B) = 2\sin A\cos B\cdot 2\cos A\sin B$

$= 2\sin A\cos A\cdot 2\sin B\cos B = \sin 2A\sin 2B = \text{R.H.S.}$

(ix) सिद्ध करना है— $\dfrac{1-\sin 2A}{\cos 2A} = \dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$= \frac{(\cos A-\sin A)^2}{(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)} = \frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}$$

$$= \frac{\cos A\left(1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\right)}{\cos A\left(1+\dfrac{\sin A}{\cos A}\right)} = \frac{1-\tan A}{1+\tan A} = \text{R.H.S.}$$

(x) सिद्ध करना है— $1+\cos^2 2\theta = 2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$

$\text{L.H.S.} = 1+\cos^2 2\theta = 1+(\cos 2\theta)^2$

$= 1+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2 \quad [\because \cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta]$

$= 1+\cos^4\theta+\sin^4\theta-2\cos^2\theta\sin^2\theta$

$= \sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$[\because 1 = \sin^2\theta+\cos^2\theta]$

$= \sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta$

$= \sin^2\theta(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)+\cos^4\theta+\sin^4\theta$

$= \sin^2\theta\times\sin^2\theta+\cos^2\theta\times\cos^2\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta$

$= \sin^4\theta+\cos^4\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta$

$= 2\sin^4\theta+2\cos^4\theta = 2(\sin^4\theta+\cos^4\theta) = \text{R.H.S.}$

15. यदि $2\tan A = 3\tan B$, तो सिद्ध कीजिए कि— $\tan(A-B) = \dfrac{\sin 2B}{5-\cos 2B}$

हल– दिया है— $2\tan A = 3\tan B$ या $\tan A = \dfrac{3}{2}\tan B$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B} = \frac{\frac{3}{2}\tan B-\tan B}{1+\frac{3}{2}\tan B\cdot\tan B} = \frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)\tan B}{1+\frac{3}{2}\tan^2 B}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\tan B}{\frac{1}{2}(2+3\tan^2 B)} = \frac{\tan B}{2+3\tan^2 B} = \frac{\dfrac{\sin B}{\cos B}}{2+3\dfrac{\sin^2 B}{\cos^2 B}}$$

$$= \frac{\frac{\sin B}{\cos B}}{2\cos^2 B + 3\sin^2 B} = \frac{\sin B \cos^2 B}{\cos B(2\cos^2 B + 3\sin^2 B)}$$

$$= \frac{\sin B \cos B}{2\cos^2 B + 3\sin^2 B} = \frac{2\sin B \cos B}{4\cos^2 B + 6\sin^2 B}$$

$$= \frac{\sin 2B}{4\cos^2 B + 4\sin^2 B + 2\sin^2 B}$$

$$= \frac{\sin 2B}{4(\cos^2 B + \sin^2 B) + 2\sin^2 B}$$

$$= \frac{\sin 2B}{4 \times 1 + 2\sin^2 B} = \frac{\sin 2B}{4 + 2\sin^2 B}$$

$$= \frac{\sin 2B}{4 + (1 - \cos 2B)} \qquad [\because 1 - 2\sin^2 A = \cos 2A]$$

$$= \frac{\sin 2B}{4 + 1 - \cos 2B} = \frac{\sin 2B}{5 - \cos 2B} = \text{R.H.S.}$$

16. सिद्ध कीजिए कि— $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A = \cos^3 2A$

हल– L.H.S. $= \cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A$

$= \cos^3 A(4\cos^3 A - 3\cos A) + \sin^3 A(3\sin A - 4\sin^3 A)$

$= 4\cos^6 A - 3\cos^4 A + 3\sin^4 A - 4\sin^6 A$

$= 4\cos^6 A - 4\sin^6 A + 3\sin^4 A - 3\cos^4 A$

$= 4(\cos^6 A - \sin^6 A) + 3(\sin^4 A - \cos^4 A)$

$= 4[(\cos^2 A)^3 - (\sin^2 A)^3] + 3[(\sin^2 A)^2 - (\cos^2 A)^2]$

$= 4(\cos^2 A - \sin^2 A)[(\cos^2 A)^2 + (\sin^2 A)^2 + \cos^2 A \sin^2 A] + 3(\sin^2 A + \cos^2 A)(\sin^2 A - \cos^2 A)$

$= 4\cos 2A(\cos^4 A + \sin^4 A + \cos^2 A \sin^2 A) + 3 \times 1 (\sin^2 A - \cos^2 A)$

$= 4\cos 2A(\cos^4 A + \sin^4 A - 2\cos^2 A \sin^2 A + 3\cos^2 A \sin^2 A) - 3(\cos^2 A - \sin^2 A)$

$= 4\cos 2A[(\cos^2 A - \sin^2 A)^2 + 3\cos^2 A \sin^2 A] - 3\cos 2A$

$= 4\cos 2A[(\cos 2A)^2 + 3\cos^2 A \sin^2 A] - 3\cos 2A$

$= 4\cos 2A(\cos^2 2A + 3\cos^2 A \sin^2 A) - 3\cos 2A$

$= 4\cos^3 2A + 12\cos 2A.\cos^2 A \sin^2 A - 3\cos 2A$

$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A + 12\cos 2A \cos^2 A \sin^2 A$

$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A(1 - 4\sin^2 A \cos^2 A)$

$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A[1 - (2\sin A \cos A)^2]$

$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A[1 - (\sin 2A)^2]$

$$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A(1-\sin^2 2A)$$
$$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2A.\cos^2 2A$$
$$= 4\cos^3 2A - 3\cos^3 2A$$
$$= \cos^3 2A = \text{R.H.S.}$$

17. यदि $\tan A = 1$ तो $(\cos A + \sin A)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\tan A = 1$

अत: $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$$\sec A = \sqrt{1+\tan^2 A}$$
$$= \sqrt{1+(1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

या $$\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

इसी प्रकार $$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अत: $$(\sin A + \cos A)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

18. $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} = 2$ सिद्ध कीजिए।

हल– L.H.S. $= \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

$$= \cos^2\left(\pi - \frac{7\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$= \left[\cos\left(\pi - \frac{7\pi}{8}\right)\right]^2 + \left[\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{8}\right)\right]^2 + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$= \left(-\cos \frac{7\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos \frac{5\pi}{8}\right)^2 + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$= \cos^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$= 2\cos^2 \frac{7\pi}{8} + 2\cos^2 \frac{5\pi}{8}$$

$$= 2\cos^2 \frac{7\pi}{8} + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) \qquad \left[\because \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta\right]$$

$$= 2\cos^2 \frac{7\pi}{8} + 2\sin^2\left(\frac{4\pi - 5\pi}{8}\right)$$

$$= 2\cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 2\left\{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)\right\}^2 + 2\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2$$

$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + 2\left(-\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$= 2\cos^2\frac{\pi}{8} + 2\sin^2\frac{\pi}{8} \qquad \left[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta\right]$$

$$= 2\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) = 2\times 1 = 2$$

19. सिद्ध कीजिए— $\cos 4A - \cos 2A = 8\sin^4 A - 6\sin^2 A$

हल– L.H.S. $= \cos 4A - \cos 2A$

$= 2\cos^2 2A - 1 - (1 - 2\sin^2 A) \qquad [\because \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A]$

$= 2(\cos 2A)^2 - 1 - 1 + 2\sin^2 A$

$= 2(1 - 2\sin^2 A)^2 - 2 + 2\sin^2 A$

$= 2(1 + 4\sin^4 A - 4\sin^2 A) - 2 + 2\sin^2 A$

$= 2 + 8\sin^4 A - 8\sin^2 A - 2 + 2\sin^2 A$

$= 8\sin^4 A - 6\sin^2 A =$ R.H.S.

20. सिद्ध कीजिए कि— $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \sin 2\alpha$

हल– $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} - \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$

$$= \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} - \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{(1+\tan\alpha)^2 - (1-\tan\alpha)^2}{(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)}$$

$$= \frac{1+\tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 1 - \tan^2\alpha + 2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{4\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

इसी प्रकार $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 2\sec 2\alpha$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$$

$$= \frac{\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{2\sec 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha . \sec 2\alpha}$$

$$= \sin 2\alpha = \text{R.H.S.} \qquad [\because \cos\theta \sec\theta = 1]$$

21. $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A$ सिद्ध कीजिए।

हल– L.H.S. $= \cos^4 A - \sin^4 A = (\cos^2 A)^2 - (\sin^2 A)^2$

$= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A) = 1 \times \cos 2A$

$= \cos 2A = \text{R.H.S.}$

22. $\frac{1+\cot^2 A}{\cot A} = 2\text{cosec}2A$ सिद्ध कीजिए।

हल– L.H.S. $= \frac{1+\cot^2 A}{\cot A} = \frac{1+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}{\frac{\cos A}{\sin A}} = \frac{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A}}{\frac{\cos A}{\sin A}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 A}}{\frac{\cos A}{\sin A}}$

$= \frac{\sin A}{\sin^2 A \cos A} = \frac{1}{\sin A \cos A} = \frac{2}{2\sin A \cos A}$

$= \frac{2}{\sin 2A} = 2\text{cosec}2A = \text{R.H.S.}$

23. $\frac{1-\tan^2(45°-A)}{1+\tan^2(45°-A)} = \sin 2A$

हल– L.H.S. $= \frac{1-\tan^2(45°-A)}{1+\tan^2(45°-A)} = \cos 2(45°-A)$ $\left[\because \cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}\right]$

$= \cos(90°-2A) = \sin 2A = \text{R.H.S.}$

24. $\frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \tan\theta = \sin\theta \sec\theta$ सिद्ध कीजिए।

हल– L.H.S. $= \frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+2\cos^2\theta - 1}$

$= \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + 2\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta.\sec\theta = \text{R.H.S.}$

$= \tan\theta = \text{R.H.S.}$

अभ्यास 7.3

1. $\frac{\sin^2 22\frac{1}{2}° - \cos^2 22\frac{1}{2}°}{\sin^2 22\frac{1}{2}° + \cos^2 22\frac{1}{2}°}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल–

$$\frac{\sin^2 22\frac{1}{2}^\circ - \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ}{\sin^2 22\frac{1}{2}^\circ + \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ} = \frac{\left(\sin 22\frac{1}{2}^\circ\right)^2 - \left(\cos 22\frac{1}{2}^\circ\right)^2}{1} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \left(\sin 22\frac{1}{2}^\circ\right)^2 - \left(\cos 22\frac{1}{2}^\circ\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 \qquad \left[\because \sin 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \cos 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right]$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$ उत्तर

2. यदि $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तो $\sin 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

हम जानते हैं कि $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

अतः $\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$

या $\sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2}$

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$ उत्तर

3. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2} - \tan\frac{A}{2}\right) = \cot A$ (ii) $\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \tan^2\frac{A}{2}$

(iii) $\frac{\sin A}{1-\cos A} = \cot\frac{A}{2}$ (iv) $\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)^2 = 1 + \sin A$

(v) $\frac{1+\sin A - \cos A}{1+\sin A + \cos A} = \tan\frac{A}{2}$ (vi) $\tan\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = \sec A + \tan A$

(vii) $\tan\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sec A - \tan A = \frac{\cos A}{1+\sin A}$

(viii) $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} \times \frac{\cos A}{1+\cos A} = \tan\frac{A}{2}$ (ix) $\frac{2\sin\theta + \sin 2\theta}{2\sin\theta - \sin 2\theta} = \cot^2\frac{\theta}{2}$

(x) $(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2 = 4\cos^2\frac{A+B}{2}$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\right)=\cot A$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\right)$$

$$=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin A} \qquad \left[\because \cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2},\ \sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right]$$

$$=\cot A=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\tan^2\frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{1+2\cos^2\frac{A}{2}-1}=\frac{1-1+2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\tan^2\frac{A}{2}=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\frac{\sin A}{1-\cos A}=\cot\frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1-1+2\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\cot\frac{A}{2}=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$

$$\text{L.H.S.}=\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2$$

$$=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=1+\sin A=\text{R.H.S.} \qquad \left[\because \sin^2 A+\cos^2 A=1,\ 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A\right]$$

(v) सिद्ध करना है— $\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}=\tan\frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}$$

$$=\frac{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}-1}$$

$$=\frac{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}-1+2\sin^2\frac{A}{2}}{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}-1}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\tan\frac{A}{2}=\text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)=\sec A+\tan A$

$$\text{L.H.S.}=\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)=\frac{\tan 45^\circ+\tan\frac{A}{2}}{1-\tan 45^\circ\tan\frac{A}{2}}=\frac{1+\tan\frac{A}{2}}{1-1\times\tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1+\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1-\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} = \frac{\dfrac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{\dfrac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} = \frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}{\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos A}$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A} = \sec A + \tan A = \text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\tan\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right) = \sec A - \tan A = \frac{\cos A}{1+\sin A}$

$$\text{L.H.S.} = \tan\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right) = \frac{\tan 45^\circ - \tan\frac{A}{2}}{1+\tan 45^\circ\tan\frac{A}{2}} = \frac{1-\tan\frac{A}{2}}{1+1\times\tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1-\tan\frac{A}{2}}{1+\tan\frac{A}{2}} = \frac{1-\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1+\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} = \frac{\dfrac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{\dfrac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos A}{1+\sin A} = \text{R. H. S.}$$

पुनः $\sec A - \tan A = \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1-\sin A}{\cos A} = \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}$

$$= \frac{1-\sin^2 A}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{\cos^2 A}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{\cos A}{1+\sin A}$$

(viii) सिद्ध करना है— $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} \times \frac{\cos A}{1+\cos A} = \tan\frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} \times \frac{\cos A}{1+\cos A}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{1+2\cos^2 A - 1} \times \frac{\cos A}{1+\cos A}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A \times \cos A}{2\cos^2 A \times (1+\cos A)} = \frac{\sin A}{1+\cos A}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1+2\cos^2\frac{A}{2}-1} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \tan\frac{A}{2} = \text{R. H. S.}$$

(ix) सिद्ध करना है— $\frac{2\sin\theta + \sin 2\theta}{2\sin\theta - \sin 2\theta} = \cot^2\frac{\theta}{2}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2\sin\theta + \sin 2\theta}{2\sin\theta - \sin 2\theta} = \frac{2\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta(1+\cos\theta)}{2\sin\theta(1-\cos\theta)} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}{1-\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{1-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cot^2\frac{\theta}{2} = \text{R. H. S.}$$

(x) सिद्ध करना है— $(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2 = 4\cos^2\frac{A+B}{2}$

$$\text{L.H.S.} = (\cos A + \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2$$
$$= \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A \cos B + \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \sin B$$
$$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + (\sin^2 B + \cos^2 B) + 2(\cos A \cos B - \sin A \sin B)$$
$$= 1 + 1 + 2\cos(A + B) = 2 + 2\cos(A + B)$$
$$= 2 + 2\left[2\cos^2 \frac{A+B}{2} - 1\right] \quad \left[\because \cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1\right]$$
$$= 2 + 4\cos^2 \frac{A+B}{2} - 2 = 4\cos^2 \frac{A+B}{2} = \text{R.H.S.}$$

4. सिद्ध कीजिए—

(i) $\tan \frac{A}{2} + \cot \frac{A}{2} = 2\operatorname{cosec} A$ **(ii)** $\frac{\sin A}{1 - \cos A} = \cot \frac{A}{2}$

(iii) $\frac{1}{2}\left[\cot \frac{A}{2} - \tan \frac{A}{2}\right] = \cot A$ **(iv)** $\left[\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}\right]^2 = 1 - \sin A$

(v) $\frac{\sin A}{1 + \cos A} = \tan \frac{A}{2}$ **(vi)** $\cos A = \frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}$

(vii) $\tan A . \cot \frac{A}{2} - 1 = \sec A$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\tan \frac{A}{2} + \cot \frac{A}{2} = 2\operatorname{cosec} A$

$$\text{L.H.S.} = \tan \frac{A}{2} + \cot \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$
$$= \frac{\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}} = \frac{2}{2\cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}}$$
$$= \frac{2}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\frac{\sin A}{1 - \cos A} = \cot \frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}\right)} = \frac{2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{1 - 1 + 2\sin^2 \frac{A}{2}}$$
$$= \frac{2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \cot \frac{A}{2} = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\frac{1}{2}\left[\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\right]=\cot A$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{2}\left[\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{\cos A}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos A}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\left[\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right]^2=1-\sin A$

$$\text{L.H.S.}=\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)^2$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=1-\sin A \qquad \left[\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1,\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta\right]$$

$$=\text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\frac{\sin A}{1+\cos A}=\tan\frac{A}{2}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1+2\cos^2\frac{A}{2}-1}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\tan\frac{A}{2}=\text{R.H.S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\cos A=\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

$$\text{L.H.S.}=\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{1}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} - \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}} = \frac{1 - \tan^2\frac{A}{2}}{1 + \tan^2\frac{A}{2}} = \text{R.H.S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\tan A . \cot\frac{A}{2} - 1 = \sec A$

$$\text{L.H.S.} = \tan A . \cot\frac{A}{2} - 1 = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}} . \cot\frac{A}{2} - 1$$

$$= \frac{2\tan\frac{A}{2} . \cot\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}} - 1 = \frac{2}{1 - \tan^2\frac{A}{2}} - 1$$

$$= \frac{2 - 1 + \tan^2\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}} = \frac{1 + \tan^2\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}} = \frac{1 + \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{1 - \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}} = \frac{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos A} = \sec A = \text{R.H.S.}$$

5. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\sin\frac{\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}.\sin\frac{3\pi}{5}.\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{5}{16}$

(ii) $\cos^2 48^\circ-\sin^2 12^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{8}$

(iii) $\sin^2 24^\circ-\sin^2 6^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{8}$

(iv) $\sin\frac{\pi}{10}.\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}$

(v) $\cos 2A\cos 2B+\sin^2(A-B)-\sin^2(A+B)=\cos(2A+2B)$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\sin\frac{\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}.\sin\frac{3\pi}{5}.\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{5}{16}$

$$\text{L.H.S.}=\sin\frac{\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}.\sin\frac{3\pi}{5}.\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$=\sin\frac{\pi}{5}.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}=\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$=\sin^2\frac{180^\circ}{5}\cos^2\frac{180^\circ}{10}=\sin^2 36^\circ\cos^2 18^\circ$$

$$=\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2\times\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2$$

$$\left[\because \sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\ \cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right]$$

$$=\frac{(10-2\sqrt{5})}{16}\times\frac{(10+2\sqrt{5})}{16}=\frac{10^2-(2\sqrt{5})^2}{16\times16}$$

$$=\frac{100-20}{16\times16}=\frac{80}{16\times16}=\frac{5}{16}=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\cos^2 48^\circ-\sin^2 12^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{8}$

$$\text{L.H.S.}=\cos^2 48^\circ-\sin^2 12^\circ=\cos(48^\circ+12^\circ)\cos(48^\circ-12^\circ)$$

$$[\because \cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B]$$

$$=\cos 60^\circ.\cos 36^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}\quad\left[\because \cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{8}=\text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\sin^2 24^\circ-\sin^2 6^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{8}$

$$\text{L.H.S.} = \sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ = \sin(24^\circ+6^\circ)\sin(24^\circ-6^\circ)$$

$$[\because \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B]$$

$$= \sin 30^\circ . \sin 18^\circ \qquad \left[\because \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{8} = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\sin\frac{\pi}{10}.\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}$

$$\text{L.H.S.} = \sin\frac{\pi}{10}.\cos\frac{\pi}{5} = \sin\frac{180^\circ}{10}\cos\frac{180^\circ}{5} = \sin 18^\circ . \cos 36^\circ$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} . \frac{(\sqrt{5}+1)}{4} \qquad \left[\because \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right]$$

$$= \frac{5-1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \text{R.H.S.}$$

(v) सिद्ध करना है—

$$\cos 2A \cos 2B + \sin^2(A-B) - \sin^2(A+B) = \cos(2A+2B)$$

$$\text{L.H.S.} = \cos 2A \cos 2B + \sin^2(A-B) - \sin^2(A+B)$$

$$= \cos 2A \cos 2B + \sin(A-B+A+B)\sin(A-B-A-B)$$

$$[\because \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B]$$

$$= \cos 2A \cos 2B + \sin 2A \sin(-2B)$$

$$= \cos 2A \cos 2B - \sin 2A \sin 2B$$

$$[\because \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B]$$

$$= \cos(2A+2B) = \text{R.H.S.}$$

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 149 एवं 150 का अवलोकन कीजिए।

■ □ ■

8

कोणों की ज्या एवं कोज्या के गुणनफल
(Products of Sine and Cosine of Angles)

अभ्यास 8.1

1. $\sin 52\frac{1}{2}^\circ . \sin 7\frac{1}{2}^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\sin 52\frac{1}{2}^\circ . \sin 7\frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2} 2\sin 52\frac{1}{2}^\circ \sin 7\frac{1}{2}^\circ$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(52\frac{1}{2}^\circ - 7\frac{1}{2}^\circ\right) - \cos\left(52\frac{1}{2}^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ\right)\right]$$

$$[\because 2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 45^\circ - \cos 60^\circ) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$ उत्तर

2. $\cos 315^\circ \cos 75^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\cos 315^\circ \cos 75^\circ = \frac{1}{2} \times 2\cos 315^\circ \cos 75^\circ$

$$= \frac{1}{2}[\cos(315^\circ + 75^\circ) + \cos(315^\circ - 75^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 390^\circ + \cos 240^\circ]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(360^\circ + 30^\circ) + \cos(180^\circ + 60^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 30^\circ - \cos 60^\circ]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$ उत्तर

3. $\sin 105^\circ . \sin 75^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\sin 105^\circ . \sin 75^\circ = \frac{1}{2}(2\sin 105^\circ \sin 75^\circ)$

$$=\frac{1}{2}[\cos(105°-75°)-\cos(105°+75°)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 30°-\cos 180°]=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right]=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$$ उत्तर

4. $2\sin 9A.\cos A$ को योग व अन्तर के रूप में लिखिए।

हल– $2\sin 9A.\cos A=\sin(9A+A)+\sin(9A-A)$

$=\sin 10A+\sin 8A$ उत्तर

5. $\sin 75°\sin 15°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\sin 75°\sin 15°=\frac{1}{2}2\sin 75°\sin 15°$

$$=\frac{1}{2}[\cos(75°-15°)-\cos(75°+15)]$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 60°-\cos 90°)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$$ उत्तर

6. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\sin 7A\cos 3A=\frac{1}{2}(\sin 10A+\sin 4A)$

(ii) $\sin 8A+\sin 2A=2\sin 5A\cos 3A$

(iii) $\cos 7A\cos 3A-\cos 11A\cos A=\sin 8A\sin 4A$

(iv) $\cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A)=\frac{1}{4}\cos 3A$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\sin 7A\cos 3A=\frac{1}{2}(\sin 10A+\sin 4A)$

$$\text{L.H.S.}=\sin 7A\cos 3A=\frac{1}{2}(2\sin 7A\cos 3A)$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(7A+3A)+\sin(7A-3A)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin 10A+\sin 4A]$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 10A+\sin 4A)=\text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\sin 8A+\sin 2A=2\sin 5A\cos 3A$

$$\text{R.H.S.}=2\sin 5A\cos 3A=\sin(5A+3A)+\sin(5A-3A)$$

$$=\sin 8A+\sin 2A=\text{L.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\cos 7A\cos 3A-\cos 11A\cos A=\sin 8A\sin 4A$

$$\text{L.H.S.}=\cos 7A\cos 3A-\cos 11A\cos A$$

$$=\frac{1}{2}[2\cos 7A\cos 3A]-\frac{1}{2}[2\cos 11A\cos 7A]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(7A+3A)+\cos(7A-3A)]-\frac{1}{2}[\cos(11A+A)-\cos(11A-A)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 10A+\cos 4A]-\frac{1}{2}[\cos 12A+\cos 10A]$$

$$=\frac{1}{2}\cos 10A+\frac{1}{2}\cos 4A-\frac{1}{2}\cos 12A-\frac{1}{2}\cos 10A$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 4A-\cos 12A)$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(8A-4A)-\cos(8A+4A)]$$

$$=\frac{1}{2}2\sin 8A\sin 4A=\sin 8A\sin 4A=\text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $\cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A)=\frac{1}{4}\cos 3A$

$$\text{L.H.S.}=\cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A)$$

$$=\cos A\frac{1}{2}[2\cos(60°+A)\cos(60°-A)]$$

$$=\cos A\cdot\frac{1}{2}[\cos(60+A+60-A)+\cos(60°+A-60°+A)]$$

$$=\cos A\cdot\frac{1}{2}[\cos 120°+\cos 2A]=\frac{1}{2}\cos A\left[-\frac{1}{2}+\cos 2A\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{2}\cos 2A\cos A$$

$$=-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}[2\cos 2A\cos A]$$

$$=-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{4}[\cos(2A+A)+\cos(2A-A)]$$

$$=-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{4}[\cos 3A+\cos A]$$

$$=-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{4}\cos 3A+\frac{1}{4}\cos A=\frac{1}{4}\cos 3A=\text{R.H.S.}$$

7. $\sin A\sin(60°-A)\sin(60°+A)=\frac{1}{4}\sin 3A$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.}=\sin A\sin(60°-A)\sin(60°+A)$$

$$=\sin A\frac{1}{2}[2\sin(60°+A)\sin(60°-A)]$$

$$=\sin A\cdot\frac{1}{2}[\cos(60°+A-60°+A)-\cos(60°+A+60°-A)]$$

$$=\sin A\cdot\frac{1}{2}[\cos 2A-\cos 120°]=\frac{1}{2}\sin A\left[\cos 2A-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sin A\left[\cos 2A+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\sin A\cos 2A+\frac{1}{4}\sin A$$

$$=\frac{1}{4}[2\cos 2A\sin A]+\frac{1}{4}\sin A$$

$$= \frac{1}{4}[\sin(2A + A) - \sin(2A - A)] + \frac{1}{4}\sin A$$

$$= \frac{1}{4}[\sin 3A - \sin A] + \frac{1}{4}\sin A = \frac{1}{4}\sin 3A - \frac{1}{4}\sin A + \frac{1}{4}\sin A$$

$$= \frac{1}{4}\sin 3A = \text{R.H.S.}$$

8. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.} = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\sin 60^\circ \sin 20^\circ (2\sin 80^\circ \sin 40^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 20^\circ [\cos(80^\circ - 40^\circ) - \cos(80^\circ + 40^\circ)]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sin 20^\circ [\cos 40^\circ - \cos 120^\circ]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ \left[\cos 40^\circ - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 20^\circ \left[\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\cos 40^\circ \sin 20^\circ + \frac{1}{2}\sin 20^\circ\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 40^\circ \sin 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(2\cos 40^\circ \sin 20^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin(40^\circ + 20^\circ) - \sin(40^\circ - 20^\circ)] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin 60^\circ - \sin 20^\circ] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 20^\circ\right] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20^\circ = \frac{3}{16} = \text{R.H.S.}$$

9. $\sin A \sin 2A + \sin 3A \sin 6A - \sin 4A \sin 5A = 0$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.} = \sin A \sin 2A + \sin 3A \sin 6A - \sin 4A \sin 5A$$

$$= \frac{1}{2}[2\sin 2A \sin A + 2\sin 6A \sin 3A - 2\sin 5A \sin 4A]$$

$$= \frac{1}{2}[\{\cos(2A - A) - \cos(2A + A)\} + \{\cos(6A - 3A) - \cos(6A + 3A)\} - \{\cos(5A - 4A) - \cos(5A + 4A)\}]$$

$$=\frac{1}{2}[(\cos A-\cos 3A)+(\cos 3A-\cos 9A)-\{\cos A-\cos 9A\}]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos A-\cos 3A+\cos 3A-\cos 9A-\cos A+\cos 9A]$$

$$=\frac{1}{2}\times 0=0=\text{R.H.S.}$$

10. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ=\frac{1}{16}$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.}=\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$$

$$=\sin 10^\circ \frac{1}{2}\sin 50^\circ \sin 70^\circ=\frac{1}{2}\sin 10^\circ(\sin 70^\circ \sin 50^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\sin 10^\circ(2\sin 70^\circ \sin 50^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\sin 10^\circ\{\cos(70^\circ-50^\circ)-\cos(70^\circ+50^\circ)\}$$

$$=\frac{1}{4}\sin 10^\circ\{\cos 20^\circ-\cos 120^\circ\}$$

$$=\frac{1}{4}\sin 10^\circ\left\{\cos 20^\circ-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{1}{4}\sin 10^\circ\left\{\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\cos 20^\circ \sin 10^\circ+\frac{1}{8}\sin 10^\circ$$

$$=\frac{1}{8}2\cos 20^\circ \sin 10^\circ+\frac{1}{8}\sin 10^\circ$$

$$=\frac{1}{8}\{\sin(20^\circ+10^\circ)-\sin(20^\circ-10^\circ)\}+\frac{1}{8}\sin 10^\circ$$

$$=\frac{1}{8}\{\sin 30^\circ-\sin 10^\circ\}+\frac{1}{8}\sin 10^\circ$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}-\sin 10^\circ\right\}+\frac{1}{8}\sin 10^\circ$$

$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\sin 10^\circ+\frac{1}{8}\sin 10^\circ=\frac{1}{16}=\text{R.H.S.}$$

11. $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ=\frac{1}{16}$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.}=\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\{2\sin 66^\circ \sin 6^\circ\}\{2\sin 78^\circ \sin 42^\circ\}$$

$$=\frac{1}{4}[\{\cos(66^\circ-6^\circ)-\cos(66^\circ+6^\circ)\}\{\cos(78^\circ-42^\circ)-\cos(78^\circ+42^\circ)\}]$$

$$=\frac{1}{4}\{\cos 60^\circ-\cos 72^\circ\}\{\cos 36^\circ-\cos 120^\circ\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}-\cos(90^\circ-18^\circ)\right\}\left\{\cos 36^\circ-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}-\sin 18^\circ\right\}\left\{\cos 36^\circ+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{5-1}{16}-\frac{\sqrt{5}-1}{8}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{8}-\frac{\sqrt{5}-1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{4}{16}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{16}=\text{R.H.S.}$$

12. सिद्ध कीजिए—

$$\cos(36^\circ-A)\cos(36^\circ+A)+\cos(54^\circ+A)\cos(54^\circ-A)=\cos 2A$$

हल– L.H.S. $=\cos(36^\circ-A)\cos(36^\circ+A)+\cos(54^\circ+A)\cos(54^\circ-A)$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos(36^\circ+A)\cos(36^\circ-A)+\frac{1}{2}\cdot 2\cos(54^\circ+A)(54^\circ-A)$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos(36^\circ+A+36^\circ-A)+\cos(36^\circ+A-36^\circ+A)\}+$$

$$\frac{1}{2}\{\cos(54^\circ+A+54^\circ-A)+\cos(54^\circ+A-54^\circ+A)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos 72^\circ+\cos 2A\}+\frac{1}{2}\{\cos 108^\circ+\cos 2A\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 72^\circ+\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{2}\cos 108^\circ+\frac{1}{2}\cos 2A$$

$$=\frac{1}{2}\cos 72^\circ+\frac{1}{2}\cos(180^\circ-72^\circ)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos 2A$$

$$=\frac{1}{2}\cos 72^\circ-\frac{1}{2}\cos 72^\circ+\frac{1+1}{2}\cos 2A$$

$$=\frac{2}{2}\cos 2A=\cos 2A=\text{R.H.S.}$$

13. सिद्ध कीजिए—

$$\cos 2A.\cos 2B+\sin^2(A-B)-\sin^2(A+B)=\cos(2A+2B)$$

हल– L.H.S. $=\cos 2A.\cos 2B+\sin^2(A-B)-\sin^2(A+B)$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2A\cos 2B+\sin(A-B+A+B).\sin(A-B-A-B)$$

$$\{\because \sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B).\sin(A-B)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(2A+2B)+\cos(2A-2B)\}+\sin 2A\sin(-2B)$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(2A+2B)+\cos(2A-2B)\}-\sin 2A\sin 2B$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(2A+2B)+\cos(2A-2B)\}-\frac{1}{2}2\sin 2A\sin 2B$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2A+2B)+\frac{1}{2}\cos(2A-2B)-\frac{1}{2}\{\cos(2A-2B)-\cos(2A+2B)\}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2A+2B)+\frac{1}{2}\cos(2A-2B)-\frac{1}{2}\cos(2A-2B)+\frac{1}{2}\cos(2A+2B)$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cos(2A+2B)=\frac{2}{2}\cos(2A+2B)$$

$$= \cos(2A+2B) = \text{R.H.S.}$$

14. $\tan 70^\circ = 2\tan 50^\circ + \tan 20^\circ$ सत्यापित कीजिए।

हल– सिद्ध करना है— $\tan 70^\circ = 2\tan 50^\circ + \tan 20^\circ$

या $\tan 70^\circ - \tan 20^\circ = 2\tan 50^\circ$

$$\text{L.H.S.} = \tan 70^\circ - \tan 20^\circ = \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} - \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 70^\circ\cos 20^\circ - \cos 70^\circ\sin 20^\circ}{\cos 70^\circ\cos 20^\circ} = \frac{\sin(70^\circ-20^\circ)}{\cos 70^\circ\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 50^\circ}{\cos 70^\circ\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 50^\circ}{2\cos 70^\circ\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 50^\circ}{\cos(70^\circ+20^\circ)+\cos(70^\circ-20^\circ)} = \frac{2\sin 50^\circ}{\cos 90^\circ+\cos 50^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 50^\circ}{0+\cos 50^\circ} = 2\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} = 2\tan 50^\circ = \text{R.H.S.}$$

15. $\sin(A+B).\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

हल–

$$\text{L.H.S.} = \sin(A+B).\sin(A-B)$$

$$= (\sin A\cos B+\cos A\sin B).(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$

$$= (\sin A\cos B)^2-(\cos A\sin B)^2$$

$$= \sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-(\sin^2 B-\sin^2 A\sin^2 B)$$

$$= \sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B^2+\sin^2 A\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A-\sin^2 B = \text{R.H.S.}$$

16. $\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{8\pi}{15}.\cos\frac{14\pi}{15} = \frac{1}{16}$ सिद्ध कीजिए।

हल–

$$\text{L.H.S.} = \cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{8\pi}{15}.\cos\frac{14\pi}{15}$$

$$= \cos\frac{2\times 180^\circ}{15}.\cos\frac{4\times 180^\circ}{15}.\cos\frac{8\times 180^\circ}{15}.\cos\frac{14\times 180^\circ}{15}$$

$$= \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ \cos 168^\circ$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos 96^\circ \cos 24^\circ).\frac{1}{2}(2\cos 168^\circ \cos 48^\circ)$$

$$= \frac{1}{4}\{\cos(96^\circ+24^\circ)+\cos(96^\circ-24^\circ)\}\{\cos(168^\circ+48^\circ)+\cos(168^\circ-48^\circ)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\cos 120^\circ+\cos 72^\circ\}\{\cos 216^\circ+\cos 120^\circ\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\cos(90^\circ+30^\circ)+\cos(90^\circ-18^\circ)\}\{\cos(180^\circ+36^\circ)+\cos(90^\circ+30^\circ)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{-\sin 30^\circ+\sin 18^\circ\}\{-\cos 36^\circ-\sin 30^\circ\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}\left\{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{2}\right\} \qquad \left\{\because \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{-2+\sqrt{5}-1}{4}\right\}\left\{\frac{-\sqrt{5}-1-2}{4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{(\sqrt{5}-3)}{4}.\frac{(-\sqrt{5}-3)}{4} = \frac{1}{64}\{-(\sqrt{5}+3)\times(\sqrt{5}-3)\}$$

$$= \frac{1}{64}[-\{(\sqrt{5})^2-3^2\}] = \frac{1}{64}[-\{5-9\}] = \frac{1}{64}(-5+9)$$

$$= \frac{1}{64}\times 4 = \frac{1}{16} = \text{R.H.S.}$$

17. $\sin A.\sin(B-C)+\sin B.\sin(C-A)+\sin C.\sin(A-B)=0$

हल– L.H.S. $= \sin A.\sin(B-C)+\sin B.\sin(C-A)+\sin C.\sin(A-B)$

$$= \frac{1}{2}\{2\sin A\sin(B-C)\}+\frac{1}{2}\{2\sin B\sin(C-A)\}$$

$$+\frac{1}{2}\{2\sin C\sin(A-B)\}$$

$$= \frac{1}{2}[\cos\{A-(B-C)\}-\cos(A+B-C)\}+\frac{1}{2}[\cos\{B-(C-A)\}$$

$$-\cos(B+C-A)\}]+\frac{1}{2}\{\cos\{C-(A-B)\}-\cos(C+A-B)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(A-B+C)-\cos(A+B-C)]+\frac{1}{2}[\cos(B-C+A)$$

$$-\cos(B+C-A)]+\frac{1}{2}[\cos(C-A+B)-\cos(C+A-B)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(A+C-B)-\cos(A+B-C)+\cos(A+B-C)$$

$$-\cos(B+C-A)+\cos(B+C-A)-\cos(A+C-B)]$$

$$= \frac{1}{2}\times 0 = 0 = \text{R.H.S.}$$

अभ्यास 8.2

1. दिखाइए कि— $\cos(60°+A)+\cos(60°-A)=\cos A$

हल– $$\text{L.H.S.} = \cos(60°+A)+\cos(60°-A)$$
$$= 2\cos\left(\frac{60°+A+60°-A}{2}\right)\cos\frac{\{60°+A-(60°-A)\}}{2}$$
$$= 2\cos\frac{120°}{2}\cos\left(\frac{60°+A-60°+A}{2}\right)$$
$$= 2\cos 60°\times\cos\frac{2A}{2} = 2\times\frac{1}{2}\times\cos A$$
$$= \cos A = \text{R.H.S.}$$

2. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

(i) $\dfrac{\cos 2B+\cos 2A}{\cos 2B-\cos 2A} = \cot(A+B).\cot(A-B)$

(ii) $\dfrac{\cos 10°+\sin 10°}{\cos 10°-\sin 10°} = \cot 35°$

(iii) $\sin 8A+\sin 2A = 2\sin 5A\cos 3A$

(iv) $2\cos\dfrac{\pi}{13}.\cos\dfrac{9\pi}{13}+\cos\dfrac{3\pi}{13}+\cos\dfrac{5\pi}{13} = 0$

(v) $\sin(60°+A)+\sin(60°-A) = \sqrt{3}\cos A$

(vi) $\dfrac{\cos 15°+\sin 15°}{\cos 15°-\sin 15°} = \sqrt{3}$

(vii) $\dfrac{\cos 20°+\sin 20°}{\cos 20°-\sin 20°} = \tan 65°$

(viii) $\dfrac{\sin 75°-\sin 15°}{\cos 75°+\cos 15°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(ix) $\dfrac{\cos 10°-\sin 10°}{\cos 10°+\sin 10°} = \tan 35°$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cos 2B+\cos 2A}{\cos 2B-\cos 2A} = \cot(A+B).\cot(A-B)$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 2A+\cos 2B}{\cos 2B-\cos 2A} = \frac{2\cos\dfrac{2A+2B}{2}\cos\dfrac{2A-2B}{2}}{2\sin\dfrac{2B+2A}{2}\sin\dfrac{2A-2B}{2}}$$
$$= \frac{\cos\dfrac{2(A+B)}{2}\cos\dfrac{2(A-B)}{2}}{\sin\dfrac{2(B+A)}{2}\sin\dfrac{2(A-B)}{2}}$$
$$= \frac{\cos(A+B)\cos(A-B)}{\sin(A+B)\sin(A-B)} = \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}\cdot\frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}$$
$$= \cot(A+B)\cot(A-B) = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cos 10°+\sin 10°}{\cos 10°-\sin 10°} = \cot 35°$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 80^\circ) + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \sin(90^\circ - 80^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 80^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 80^\circ} = \frac{2\sin\left(\frac{80^\circ + 10^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{80^\circ - 10^\circ}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{10^\circ + 80^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{80^\circ - 10^\circ}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{70^\circ}{2}}{2\sin\frac{90^\circ}{2}\sin\frac{70^\circ}{2}} = \frac{\cos\frac{70^\circ}{2}}{\sin\frac{70^\circ}{2}} = \frac{\cos 35^\circ}{\sin 35^\circ}$$

$$= \cot 35^\circ = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\sin 8A + \sin 2A = 2\sin 5A \cos 3A$

$$\text{L.H.S.} = \sin 8A + \sin 2A = 2\sin\frac{8A + 2A}{2}\cdot\cos\frac{8A - 2A}{2}$$

$$= 2\sin\frac{10A}{2}\cos\frac{6A}{2} = 2\sin 5A\cos 3A = \text{R.H.S.}$$

(iv) सिद्ध करना है— $2\cos\frac{\pi}{13}\cdot\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$

$$\text{L.H.S.} = 2\cos\frac{\pi}{13}\cdot\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}$$

$$= \cos\left(\frac{9\pi}{13} + \frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{13} - \frac{\pi}{13}\right) + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}$$

$$= \cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}$$

$$= \left\{\cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13}\right\} + \left\{\cos\frac{8\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}\right\}$$

$$= 2\cos\frac{\frac{10\pi}{13} + \frac{3\pi}{13}}{2}\cos\frac{\frac{10\pi}{13} - \frac{3\pi}{13}}{2} + 2\cos\frac{\frac{8\pi}{13} + \frac{5\pi}{13}}{2}\cos\frac{\frac{8\pi}{13} - \frac{5\pi}{13}}{2}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{13\pi}{13}}{2}\right)\cos\left(\frac{10\pi - 3\pi}{\frac{13}{2}}\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi + 5\pi}{\frac{13}{2}}\right)\cos\left(\frac{8\pi - 5\pi}{\frac{13}{2}}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{13\pi}{13\times 2}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{13\times 2}\right) + 2\cos\left(\frac{13\pi}{13\times 2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{13\times 2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{7\pi}{26} + 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{26}$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{2}\left[\cos\frac{7\pi}{26} + \cos\frac{3\pi}{26}\right]$$
$$= 2\times 0\left[\cos\frac{7\pi}{26} + \cos\frac{3\pi}{26}\right] = 0 = \text{R. H. S.}$$

(v) सिद्ध करना है— $\sin(60^\circ + A) + \sin(60^\circ - A) = \sqrt{3}\cos A$

$$\text{L.H.S.} = \sin(60^\circ + A) + \sin(60^\circ - A)$$
$$= 2\sin\frac{(60^\circ + A + 60^\circ - A)}{2}\cos\frac{\{60^\circ + A - (60^\circ - A)\}}{2}$$
$$= 2\sin\frac{120^\circ}{2}\cos\left(\frac{60^\circ + A - 60^\circ + A}{2}\right)$$
$$= 2\sin 60^\circ\cos\frac{2A}{2} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$$
$$= \sqrt{3}\cos A = \text{R. H. S.}$$

(vi) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 75^\circ) + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin(90^\circ - 75^\circ)}$$
$$= \frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \cos 75^\circ} = \frac{2\sin\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}{2\sin\frac{15^\circ + 75^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}}$$
$$= \frac{2\sin\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{60^\circ}{2}}{2\sin\frac{90^\circ}{2}\sin\frac{60^\circ}{2}} = \frac{\sin 45^\circ\cos 30^\circ}{\sin 45^\circ\sin 30^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \text{R. H. S.}$$

(vii) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ} = \tan 65^\circ$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 70^\circ) + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin(90^\circ - 70^\circ)}$$
$$= \frac{\sin 70^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \cos 70^\circ} = \frac{2\sin\frac{70^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{70^\circ - 20^\circ}{2}}{2\sin\frac{20^\circ + 70^\circ}{2}\sin\frac{70^\circ - 20^\circ}{2}}$$
$$= \frac{2\sin\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ}{2}}{2\sin\frac{90^\circ}{2}\sin\frac{50^\circ}{2}} = \frac{\cos\frac{50^\circ}{2}}{\sin\frac{50^\circ}{2}} = \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}$$
$$= \cot 25^\circ = \cot(90^\circ - 65^\circ) = \tan 65^\circ = \text{R. H. S.}$$

(viii) सिद्ध करना है— $\dfrac{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ+\cos 15^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ+\cos 15^\circ}=\frac{2\cos\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}}{2\cos\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\dfrac{90^\circ}{2}\sin\dfrac{60^\circ}{2}}{2\cos\dfrac{90^\circ}{2}\cos\dfrac{60^\circ}{2}}=\frac{\sin\dfrac{60^\circ}{2}}{\cos\dfrac{60^\circ}{2}}=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\text{R.H.S.}$$

(ix) सिद्ध करना है— $\dfrac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}=\tan 35^\circ$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sin(90^\circ-80^\circ)}{\cos(90^\circ-80^\circ)+\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{\cos 10^\circ-\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ+\sin 10^\circ}=\frac{2\sin\dfrac{10^\circ+80^\circ}{2}\sin\dfrac{80^\circ-10^\circ}{2}}{2\sin\dfrac{80^\circ+10^\circ}{2}\cos\dfrac{80^\circ-10^\circ}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\dfrac{90^\circ}{2}\sin\dfrac{70^\circ}{2}}{2\sin\dfrac{90^\circ}{2}\cos\dfrac{70^\circ}{2}}=\frac{\sin\dfrac{70^\circ}{2}}{\cos\dfrac{70^\circ}{2}}$$

$$=\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}=\tan 35^\circ=\text{R.H.S.}$$

3. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\sin(30^\circ+A)+\sin(30^\circ-A)}{\cos(30^\circ-A)-\cos(30^\circ+A)}=\cot A$

हल—

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin(30^\circ+A)+\sin(30^\circ-A)}{\cos(30^\circ-A)-\cos(30^\circ+A)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\dfrac{30^\circ+A+30^\circ-A}{2}\right)\cos\left\{\dfrac{30^\circ+A-(30-A)}{2}\right\}}{2\sin\left(\dfrac{30^\circ-A+30^\circ+A}{2}\right)\sin\left\{\dfrac{30^\circ+A-(30^\circ-A)}{2}\right\}}$$

$$=\frac{2\sin\dfrac{60^\circ}{2}\cos\left(\dfrac{30^\circ+A-30^\circ+A}{2}\right)}{2\sin\dfrac{60^\circ}{2}\sin\left(\dfrac{30^\circ+A-30^\circ+A}{2}\right)}=\frac{\cos\dfrac{2A}{2}}{\sin\dfrac{2A}{2}}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A=\text{R.H.S.}$$

4. सिद्ध कीजिए— $\sec(45°+A)\sec(45°-A)=2\sec 2A$

हल– $$\text{L.H.S.}=\sec(45°+A)\sec(45°-A)$$
$$=\frac{1}{\cos(45°+A)\cos(45°-A)}$$
$$=\frac{2}{2\cos(45°+A)\cos(45°-A)}$$
$$=\frac{2}{\cos(45°+A+45°-A)+\cos\{45°+A-(45°-A)\}}$$
$$=\frac{2}{\cos 90°+\cos 2A}=\frac{2}{0+\cos 2A}$$
$$=\frac{2}{\cos 2A}=2\sec 2A=\text{R.H.S.}$$

5. सिद्ध कीजिए— $2\cos A+\cos 3A+\cos 5A=4\cos A\cos^2 2A$

हल– $$\text{L.H.S.}=2\cos A+\cos 5A+\cos 3A$$
$$=2\cos A+2\cos\frac{5A+3A}{2}\cos\frac{5A-3A}{2}$$
$$=2\cos A+2\cos\frac{8A}{2}\cos\frac{2A}{2}$$
$$=2\cos A+2\cos 4A\cos A=2\cos A(1+\cos 4A)$$
$$=2\cos A(1+2\cos^2 2A-1)=2\cos A\times 2\cos^2 2A$$
$$=4\cos A\cos^2 2A=\text{R.H.S.}$$

6. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\sin(A+3B)+\sin(3A+B)}{\sin 2A+\sin 2B}=2\cos(A+B)$

हल– $$\text{L.H.S.}=\frac{\sin(A+3B)+\sin(3A+B)}{\sin 2A+\sin 2B}$$
$$=\frac{2\sin\frac{A+3B+3A+B}{2}\cos\frac{A+3B-3A-B}{2}}{2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}}$$
$$=\frac{\sin\frac{4A+4B}{2}\cos\frac{2B-2A}{2}}{\sin\frac{2(A+B)}{2}\cos\frac{2(A-B)}{2}}$$
$$=\frac{\sin\frac{4(A+B)}{2}\cos\frac{2(B-A)}{2}}{\sin(A+B)\cos(A-B)}$$
$$=\frac{\sin 2(A+B)\cos(B-A)}{\sin(A+B)\cos(A-B)}$$
$$=\frac{2\sin(A+B)\cos(A+B)\cos(A-B)}{\sin(A+B)\cos(A-B)}\qquad[\because\cos(-\theta)=\cos\theta]$$
$$=2\cos(A+B)=\text{R.H.S.}$$

7. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}$

हल— $\text{L.H.S.}=\dfrac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}$

$=\dfrac{(\sin 5A+\sin A)+2\sin 3A}{(\sin 7A+\sin 3A)+2\sin 5A}$

$=\dfrac{2\sin\dfrac{5A+A}{2}\cos\left(\dfrac{5A-A}{2}\right)+2\sin 3A}{2\sin\dfrac{7A+3A}{2}\cos\dfrac{7A-3A}{2}+2\sin 5A}$

$=\dfrac{2\sin\dfrac{6A}{2}\cos\dfrac{4A}{2}+2\sin 3A}{2\sin\dfrac{10A}{2}\cos\dfrac{4A}{2}+2\sin 5A}$

$=\dfrac{2\sin 3A\cos 2A+2\sin 3A}{2\sin 5A\cos 2A+2\sin 5A}$

$=\dfrac{2\sin 3A(\cos 2A+1)}{2\sin 5A(\cos 2A+1)}=\dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}=\text{R.H.S.}$

8. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\tan(60°+A)-\tan(60°-A)}{\tan(60°+A)+\tan(60°-A)}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin A$

हल— $\text{L.H.S.}=\dfrac{\tan(60°+A)-\tan(60°-A)}{\tan(60°+A)+\tan(60°-A)}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin(60°+A)}{\cos(60°+A)}-\dfrac{\sin(60°-A)}{\cos(60°-A)}}{\dfrac{\sin(60°+A)}{\cos(60°+A)}+\dfrac{\sin(60°-A)}{\cos(60°-A)}}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin(60°+A)\cos(60°-A)-\cos(60°+A)\sin(60°-A)}{\cos(60°+A)\cos(60°-A)}}{\dfrac{\sin(60°+A)\cos(60°-A)+\cos(60°+A)\sin(60°-A)}{\cos(60°+A)\cos(60°-A)}}$

$=\dfrac{\sin(60°+A)\cos(60°-A)-\cos(60°+A)\sin(60°-A)}{\sin(60°+A)\cos(60°-A)+\cos(60°+A)\sin(60°-A)}$

$=\dfrac{\sin\{60°+A-(60°-A)\}}{\sin\{60°+A+(60°-A)\}}=\dfrac{\sin\{60°+A-60°+A\}}{\sin\{60°+A+60°-A\}}$

$=\dfrac{\sin 2A}{\sin 120°}=\dfrac{\sin 2A}{\sin(90°+30°)}=\dfrac{\sin 2A}{\cos 30°}$

$=\dfrac{\sin 2A}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin 2A=\text{R.H.S.}$

9. $A+B+C=180°$ हो, तो सिद्ध कीजिए—

(i) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(ii) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(iii) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

हल– (i) सिद्ध करना है— $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

जबकि $A + B + C = 180^\circ$

$$\text{L.H.S.} = \cos A + \cos B + \cos C = (\cos A + \cos B) + \cos C$$

$$= 2\cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$= 2\cos \frac{180^\circ - C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C \qquad \left[\because A + B + C = 180^\circ \right. \\ \left. A + B = 180^\circ - C\right]$$

$$= 2\cos \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) \cos \frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$= 2\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= 1 + \left\{2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2\sin^2 \frac{C}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{180^\circ - (A+B)}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{\cos \frac{A-B}{2} - \sin \left(90^\circ - \frac{A+B}{2}\right)\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{2\sin \frac{\frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}}{2} \sin \frac{\frac{A+B}{2} - \frac{(A-B)}{2}}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{2\sin \left(\frac{A-B+A+B}{4}\right) \sin \left(\frac{A+B-A+B}{4}\right)\right\}$$

$$= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{2\sin \frac{2A}{4} \sin \frac{2B}{4}\right\} = 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left\{2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}\right\}$$

$$= 1 + 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \text{R.H.S.}$$

(ii) सिद्ध करना है— $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

जबकि $A + B + C = 180^\circ$

$$\text{L.H.S.} = \sin A + \sin B - \sin C = (\sin A + \sin B) - \sin C$$
$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\sin\frac{180^\circ - C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{180^\circ - (A+B)}{2}\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \sin\left(90^\circ - \frac{A+B}{2}\right)\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{2\sin\left(\frac{\frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}}{2}\right)\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{2\sin\left(\frac{A-B+A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B-A+B}{2}\right)\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{2B}{4}\right\} = 2\cos\frac{C}{2}\left\{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right\}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \text{R.H.S.}$$

(iii) सिद्ध करना है— $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

जबकि $A + B + C = 180^\circ$

$$\text{L.H.S.} = \sin A + \sin B + \sin C = (\sin A + \sin B) + \sin C$$
$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$
$$= 2\sin\left(\frac{180^\circ - C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$
$$= 2\sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{180^\circ-(A+B)}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{2\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{A+B+A-B}{4}.\cos\frac{A+B-A+B}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{2A}{4}\cos\frac{2B}{4}\right\}=2\cos\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\text{R. H. S.}$$

10. सिद्ध कीजिए— $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$

हल–

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}$$

$$=\frac{\frac{1-\cos 2A}{2}-\frac{1-\cos 2B}{2}}{\frac{1}{2}.2\sin A\cos A-\frac{1}{2}.2\sin B\cos B}$$

$$[\because 1-2\sin^2 A=\cos 2A]$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\{1-\cos 2A-1+\cos 2B\}}{\frac{1}{2}\sin 2A-\frac{1}{2}\sin 2B}=\frac{\frac{1}{2}\{-\cos 2A+\cos 2B\}}{\frac{1}{2}\{\sin 2A-\sin 2B\}}$$

$$=\frac{(\cos 2B-\cos 2A)}{(\sin 2A-\sin 2B)}=\frac{2\sin\frac{2B+2A}{2}.\sin\frac{2A-2B}{2}}{2\cos\frac{2A+2B}{2}.\sin\frac{2A-2B}{2}}$$

$$=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\sin(A-B)}=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$=\tan(A+B)=\text{R. H.S.}$$

11. सिद्ध कीजिए— $\tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$

हल– हम जानते हैं कि— $\tan 3A = \tan(2A + A)$

या $\tan 3A = \dfrac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$

या $\tan 3A - \tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 2A + \tan A$

या $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A$

या $\tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$ इति सिद्धम्

12. यदि $\cos A = \dfrac{1}{7}$ तथा $\cos B = \dfrac{13}{14}$ तो सिद्ध कीजिए— $\cos(A - B) = \dfrac{1}{2}$

हल– दिया है— $\cos A = \dfrac{1}{7}$

अतः $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ सूत्र से,

$= \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{49}} = \sqrt{\dfrac{49 - 1}{49}} = \sqrt{\dfrac{48}{49}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

तथा $\cos B = \dfrac{13}{14}$

अतः $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$ सूत्र से,

$= \sqrt{1 - \left(\dfrac{13}{14}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{169}{196}} = \sqrt{\dfrac{196 - 169}{196}} = \sqrt{\dfrac{27}{196}}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

अब L.H.S. $= \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$= \dfrac{1}{7} \times \dfrac{13}{14} + \dfrac{4\sqrt{3}}{7} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{14} = \dfrac{13}{98} + \dfrac{36}{98} = \dfrac{49}{98} = \dfrac{1}{2}$ = R.H.S.

13. सिद्ध कीजिए कि— $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{A}{2}\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{\sin A}{\sqrt{2}}$

हल– L.H.S. $= \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{A}{2}\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{A}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left[2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{A}{2}\right) - 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{A}{2}\right)\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left[\left\{1 + \cos 2\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{A}{2}\right)\right\} - \left\{1 + \cos 2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{A}{2}\right)\right\}\right]$

$[\because \cos 2A = 2\cos^2 A - 1]$

$= \dfrac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right) - 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - A\right)\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - A\right)\right]$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sin \frac{\left(\frac{\pi}{4} + A\right) + \left(\frac{\pi}{4} - A\right)}{2} \sin \frac{\left(\frac{\pi}{4} - A\right) - \left(\frac{\pi}{4} + A\right)}{2}$$

$$\left[\because \cos A - \cos B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]$$

$$= \sin \frac{\frac{\pi}{4} + A + \frac{\pi}{4} - A}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4} - A - \frac{\pi}{4} - A}{2}$$

$$= \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{-2A}{2}\right) = \sin\frac{2\pi}{8}\sin(-A)$$

$$= -\sin A \times \sin\frac{\pi}{4} = -\sin A \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A = -\frac{\sin A}{\sqrt{2}} = \text{R.H.S.}$$

14. सिद्ध कीजिए कि— $\sin A \sin 2A + \sin 3A \sin 6A = \sin 4A \sin 5A$

हल-- $\text{L.H.S.} = \sin A \sin 2A + \sin 3A \sin 6A$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sin 2A \sin A + \frac{1}{2} \cdot 2\sin 6A \sin 3A$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(2A - A) - \cos(2A + A)\} + \frac{1}{2}\{\cos(6A - 3A) - \cos(6A + 3A)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos A - \cos 3A\} + \frac{1}{2}\{\cos 3A - \cos 9A\}$$

$$= \frac{1}{2}\cos A - \frac{1}{2}\cos 3A + \frac{1}{2}\cos 3A - \frac{1}{2}\cos 9A$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos A - \cos 9A\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sin\frac{A + 9A}{2} \cdot \sin\frac{9A - A}{2}$$

$$= \sin\frac{10A}{5}\sin\frac{8A}{2} = \sin 5A \sin 4A$$

$$= \sin 4A \sin 5A = \text{R.H.S.}$$

15. यदि $A + B + C = 180°$ तो सिद्ध कीजिए—

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1$$

हल– दिया है— $A + B + C = 180°$

सिद्ध करना है— $\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1$

$$\text{L.H.S.} = \cos A + \cos B - \cos C = (\cos A + \cos B) - \cos C$$

$$= 2\cos\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2} - \cos C$$

$$[\because A+B=180°-C]$$

$$=2\cos\frac{180°-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos C$$

$$=2\cos\left(90°-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\left[\because \cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-1+2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{\sin\frac{180°-(A+B)}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right\}-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left[\sin\left\{90°-\frac{(A+B)}{2}\right\}+\cos\frac{(A-B)}{2}\right]-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{(A+B)}{2}+\cos\frac{(A-B)}{2}\right\}-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right\}-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{A+B+A-B}{4}\cos\frac{A+B-A+B}{4}\right\}-1$$

$$=4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{2A}{4}\cos\frac{2B}{4}-1=4\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-1$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1=\text{R.H.S.}$$

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट–बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 158 व 159 का अवलोकन कीजिए।

9

त्रिकोणमितीय सारणियाँ
(Trigonometrical Tables)

अभ्यास 9

1. त्रिकोणमितीय सारणी की सहायता से निम्नलिखित त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए—

(i) cot 53°24′ **(ii) sin 68°20′**
(iii) cos 23°10′ **(iv) cosec 18°30′**
(v) tan 37°42′ **(vi) sec 84°50′ + cosec 18°36′**
(vii) cos 42°20′ − sin 64°42′ **(viii) sec 51°24′ + cosec 68°20′**

हल– (i) cot 53°24′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी II** की **अन्तिम पंक्ति** में cot तथा **अन्तिम स्तम्भ** में 53·4 अथवा अन्तिम से पहले स्तम्भ में 53°24′ को देखिए। 53°24′ वाली पंक्ति में cot का स्तम्भ देखिए। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·7427 लिखी है।

अतः cot 53°24′ = **0.7427** **उत्तर**

(ii) sin 68°20′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी I** की **अन्तिम पंक्ति** में sin तथा **अन्तिम स्तम्भ** में 68°20′ को देखिए। 68°20′ वाली पंक्ति में sin का स्तम्भ देखिए। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·9293 लिखी है।

अतः sin 68°20′ = **0·9293** **उत्तर**

(iii) cos 23°10′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी I** की **प्रथम पंक्ति** में cos तथा **प्रथम स्तम्भ** में 23°10′ देखिए। 23°10′ वाली पंक्ति में cos का स्तम्भ देखिए, इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·9194 लिखी है।

अतः cos 23°10′ = **0·9194** **उत्तर**

(iv) cosec 18°30′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी I** की **प्रथम पंक्ति** में cosec तथा **प्रथम स्तम्भ** में 18°30′ देखिए 18°30′ वाली पंक्ति में cosec का स्तम्भ देखिए। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 3·152 लिखी है।

अतः cosec 18°30′ = **3·152** **उत्तर**

(v) tan 37°42′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी II** की **प्रथम पंक्ति** में tan तथा **प्रथम स्तम्भ** में 37·7 अथवा द्वितीय स्तम्भ में 37 तथा तृतीय स्तम्भ में 42 देखिए। 37·7 अथवा 37°42′ वाली पंक्ति में tan का स्तम्भ देखिए। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·7729 लिखी है। अतः

tan 37°42′ = **0·7729** **उत्तर**

(vi) sec 84°50′ + cosec 18°36′ का मान ज्ञात करने के लिए त्रिकोणमितीय सारणियों से sec 84°50′ तथा cosec 18°36′ के मान ज्ञात करते हैं। sec 84°50′ के मान के लिए **सारणी I की अन्तिम पंक्ति** में sec तथा **अन्तिम स्तम्भ** में 84°50′ देखते है। 84°50′ वाली पंक्ति में sec का स्तम्भ देखते हैं। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 11·10 लिखी है।

अत: sec 84°50′ = **11·10** **उत्तर**

अब cosec 18°36′ के मान के लिए **सारणी II** की **प्रथम पंक्ति** में cosec तथा द्वितीय स्तम्भ में 18 व 36 देखिए। 18°36′ वाली पंक्ति में cosec का स्तम्भ देखिए। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 3·1352 लिखी है।

अत: cosec 18°36′ = 3·1352

अब sec 84°50′ + cosec 18°36′

= 11·10 + 3·1352 = **14·2352** **उत्तर**

(vii) cos 42°20′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी I** की **प्रथम पंक्ति** में cos तथा **प्रथम स्तम्भ** में 42°20′ देखते हैं। 42°20′ वाली पंक्ति में cos का स्तम्भ देखते हैं। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·7392 लिखी है।

अत: cos 42°20′ = 0·7392

अब sin 64°42′ का मान ज्ञात करने के लिए **सारणी II** की **अन्तिम पंक्ति** में sin तथा **अन्तिम से पहले स्तम्भ** में 64 व 42 देखते हैं। 64 व 42 वाली पंक्ति में sin का स्तम्भ देखते हैं। इनके मिलान बिन्दु पर संख्या 0·9041 लिखी है।

अत: sin 64°42′ = 0·9041

अब, cos 42°20′ − sin 64°42′ = 0·7392 − 0·9041 = **−0·1649** **उत्तर**

(viii) सारणी II से उपर्युक्त विधि द्वारा,

sec 51°24′ = 1·6029

तथा सारणी I से,

cosec 68°20′ = 1·0760

अत: sec 51°24′ + cosec 68°20′

= 1·6029 + 1·0760 = **2·6789** **उत्तर**

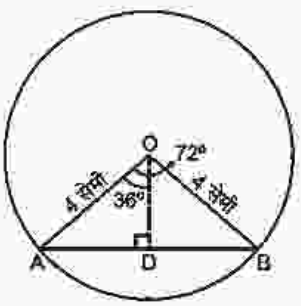
2. 4 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जो वृत्त के केन्द्र पर 72° माप का कोण अन्तरित करती है।

हल– माना केन्द्र O तथा 4 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की जीवा AB है जो केन्द्र पर 72° माप का कोण अन्तरित करती है।

तब $OA = OB = 4$ सेमी

तथा $\angle AOB = 72°$

वृत्त के केन्द्र O से जीवा AB पर लम्ब OD डाला।



अत: $AD = \frac{AB}{2}$

$\angle AOD = \angle BOD = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{72°}{2} = 36°$

$\therefore$ समकोण ΔODA में,

$\sin 36° = \frac{AD}{OA}$

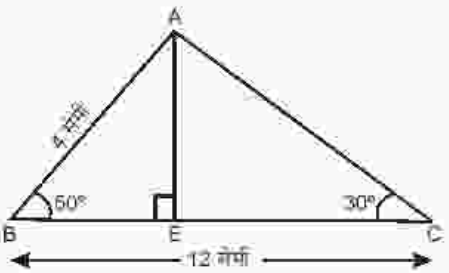
या $AD = QA \sin 36°$

या $\frac{AB}{2} = 4 \times \sin 36°$

या $AB = 8 \times \sin 36°$

$= 8 \times 0{\cdot}5878$ सेमी (सारणी I से) $= 4{\cdot}7024$ सेमी $= \mathbf{4{\cdot}7}$ **सेमी** **उत्तर**

3. चित्र में $BC = 12$ सेमी, $AB = 4$ सेमी, $\angle AEB = 90°$, $\angle B = 50°$ तथा $C = 30°$, BE तथा AC का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र में,

AEB समकोण Δ है।

अतः $\angle BAE = 90° - 50° = 40°$

समकोण $\Delta\, AEB$ में,

$\sin 40° = \frac{BE}{AB}$

या $BE = AB \sin 40° = 4 \times \sin 40° = 4 \times 0{\cdot}6428$ सेमी (सारणी I से) $= 2{\cdot}5712$ सेमी

$BE = \mathbf{2{\cdot}57}$ **सेमी** **उत्तर**

समकोण $\Delta\, AEC$ में,

$\cos 30° = \frac{EC}{AC}$

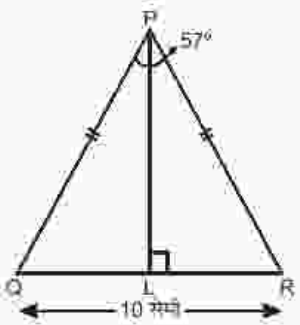
या $AC = \frac{EC}{\cos 30°} = \frac{BC - BE}{\cos 30°} = \frac{12 - 2{\cdot}57}{\cos 30°} = \frac{9{\cdot}43}{0{\cdot}8660} = 10{\cdot}8891$ (सारणी I से)

$= \mathbf{10{\cdot}89}$ **सेमी** **उत्तर**

4. उस समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार 10 सेमी तथा शीर्ष कोण 57° का हो।

हल– माना समद्विबाहु $\Delta\, PQR$ में $PQ = PR$

आधार $QR = 10$ सेमी तथा शीर्ष कोण $QPR = 57°$ शीर्ष P से आधार QR पर लम्ब PL डाला।



तब, $QL = LR = \frac{QR}{2} = \frac{10}{2} = 5$ सेमी

$\angle QPL = \angle RPL = \frac{\angle QPR}{2} = \frac{57°}{2} = (28{\cdot}5)°$

समकोण Δ PLQ में,

$\cot (28{\cdot}5)° = \frac{PL}{QL}$

या $PL = QL \cot (28{\cdot}5)°$

$= 5 \times \cot (28{\cdot}5)° = 5 \times 1{\cdot}8418$ सेमी (सारणी II से) $= 9{\cdot}21$ सेमी

अतः समद्विबाहु $\Delta\, PQR$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 9{\cdot}21 = 5 \times 9{\cdot}21$ वर्ग सेमी $= \mathbf{46{\cdot}05}$ **वर्ग सेमी** **उत्तर**

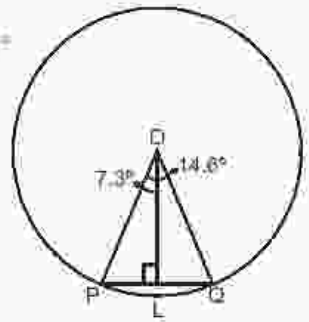
5. 1 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जो वृत्त के केन्द्र पर 14·6° माप का कोण अन्तरित करती है।

हल– माना केन्द्र O तथा 1 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा PQ है जो केन्द्र O पर $14\cdot6^\circ$ माप का कोण अन्तरित करती है।

अतः $OP = OQ = 1$ मीटर तथा $\angle POQ = 14\cdot6^\circ$ वृत्त के केन्द्र O से जीवा PQ पर लम्ब OL डाला।

तब, $PL = \frac{PQ}{2}$

तथा $\angle POL = \angle QOL = \frac{\angle POQ}{2} = \frac{14\cdot6^\circ}{2} = 7\cdot3^\circ$



समकोण ΔOLP में,

$\sin 7\cdot3^\circ = \frac{PL}{OP}$

या $PL = OP \sin 7\cdot3^\circ$

या $\frac{PQ}{2} = 1 \times \sin 7\cdot3^\circ$

या $PQ = 2 \times \sin 7\cdot3^\circ$

$= 2 \times 0\cdot1271$ (सारणी II से) $= 0\cdot2542$ मीटर $= 25\cdot42$ सेमी $=$ **25·4 सेमी** **उत्तर**

6. 80 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के अन्तर्गत खींचे गए 25 भुजाओं वाले समबहुभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– 25 भुजाओं वाले समबहुभुज की एक भुजा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण,

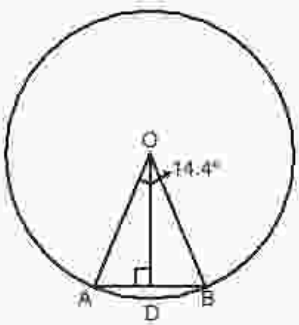
$= \frac{360^\circ}{25} = (14\cdot4)^\circ$

माना समबहुभुज की एक भुजा AB है।

$AO = BO = 80$ सेमी (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)

OD, भुजा AB पर लम्ब है। अतः $AD = \frac{AB}{2}$

अतः $\angle AOD = \angle BOD = \frac{14\cdot4}{2} = 7\cdot2^\circ$



समकोण ΔODA में,

$\sin \angle AOD = \frac{AD}{AO}$

या $\sin 7\cdot2^\circ = \frac{AD}{80}$

या $AD = 80 \sin 7\cdot2^\circ$

$\frac{AB}{2} = 80 \times 0\cdot1253$ [सारणी II से]

या $\frac{AB}{2} = 10\cdot024$ सेमी

या $AB = 2 \times 10\cdot024 = 20\cdot048$ सेमी $=$ **20·05 सेमी** **उत्तर**

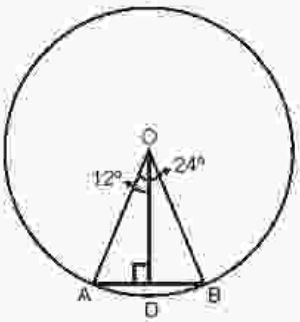
7. 500 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के अन्तर्गत खींचे गए 15 भुजाओं वाले समबहुभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– 15 भुजाओं वाले समबहुभुज की एक भुजा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण = $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$

माना समबहुभुज की एक भुजा AB है। तब। $AO = BO = 500$ सेमी (वृत्त की त्रिज्याएँ)

OD, भुजा AB पर लम्ब है। अतः $AD = \frac{AB}{2}$

अतः $\angle AOD = \angle BOD = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{24^\circ}{2} = 12^\circ$



समकोण ΔODA में,

$\sin \angle AOD = \frac{AD}{AO}$

या $AD = AO \sin \angle AOD$

या $\frac{AB}{2} = AO \sin \angle AOD$

या $AB = 2\,AO \sin 12^\circ = 2 \times 500 \times 0{\cdot}2079$ (सारणी 1 से) $=$ **207·9 सेमी** **उत्तर**

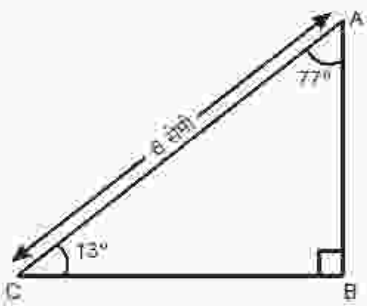
8. उस समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कर्ण 6 सेमी, तथा एक न्यून कोण 77° माप का है।

हल– माना ABC एक समकोण Δ है। जिसका कोण $A = 77^\circ$ है। तथा कर्ण $AC = 6$ सेमी।

अतः $\sin 77^\circ = \frac{BC}{AC}$

या $0{\cdot}9744 = \frac{BC}{6}$ (सारणी 1 से)

या $BC = 6 \times 0{\cdot}9744 = 5{\cdot}85$ सेमी



ΔABC में,

$\angle C = 90^\circ - 77^\circ = 13^\circ$

$\sin C = \frac{AB}{AC}$

$\sin 13^\circ = \frac{AB}{6}$

या $AB = 6 \times \sin 13^\circ = 6 \times 0{\cdot}2250$ (सारणी 1 से) $= 1{\cdot}35$ सेमी

समकोण ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times AB = \frac{1}{2} \times 5{\cdot}85 \times 1{\cdot}35$

$= 3{\cdot}95$ **वर्ग सेमी** **उत्तर**

9. समकोण त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जबकि $\angle P = 30^\circ$, $\angle Q = 90^\circ$ तथा $PR = 4$ सेमी है।

हल– दिया है—

समकोण त्रिभुज PQR जिसमें $\angle P = 30^\circ$, $\angle Q = 90^\circ$ तथा भुजा $PR = 4$ सेमी

अतः समकोण ΔPQR में,

$\sin 30° = \frac{QR}{PR}$

या $0{\cdot}5 = \frac{QR}{4}$ (सारणी 1 से)

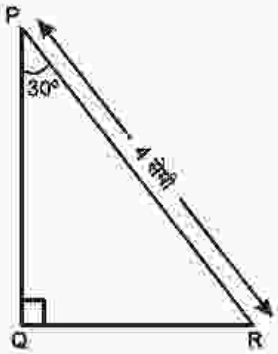
या $QR = 4 \times 0{\cdot}5 = 2{\cdot}0$ सेमी

$\angle R = 90° - 30° = 60°$

अतः $\sin 60° = \frac{PQ}{PR}$

$0{\cdot}8660 = \frac{PQ}{4}$ (सारणी 1 से)

या $PQ = 4 \times 0{\cdot}8660 = 3{\cdot}464$ सेमी



अतः समकोण ΔPQR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} QR \times PQ = \frac{1}{2} \times 2 \times 3{\cdot}464 = 3{\cdot}464$ वर्ग सेमी उत्तर

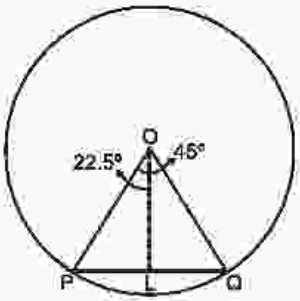
10. 2 मीटर त्रिज्या वाले एक वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जो वृत्त के केन्द्र पर 45° माप का कोण अन्तरित करती है।

हल– माना केन्द्र O तथा 2 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा PQ है, जो केन्द्र O पर 45° का कोण अन्तरित करती है।

तब $OP = OQ = 2$ मीटर

वृत्त के केन्द्र O से जीवा PQ पर लम्ब OL डाला।

तब $PL = LQ = \frac{PQ}{2}$



अतः $\angle POL = \angle QOL = \frac{\angle POQ}{2} = \frac{45°}{2} = 22{\cdot}5°$

समकोण ΔOLP में,

$\sin 22{\cdot}5° = \frac{PL}{OP}$

या $PL = OP \sin 22{\cdot}5°$

या $\frac{PQ}{2} = OP \times \sin 22{\cdot}5°$

या $PQ = 2 \times OP \times \sin 22{\cdot}5° = 2 \times 2 \times \sin 22{\cdot}5° = 4 \times 0{\cdot}3825$

$= 1{\cdot}5308$ सेमी $= 1{\cdot}53$ सेमी उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट– बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 163 का अवलोकन कीजिए।

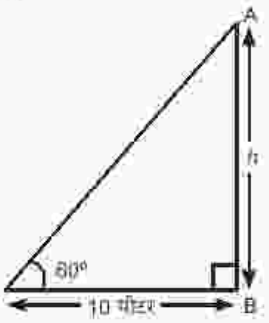
10

ऊँचाई एवं दूरी
(Height and Distance)

अभ्यास 10

1. एक मीनार के क्षैतिज आधार से 10 मीटर दूरी पर स्थित एक बिन्दु पर मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 60° है, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– चित्रानुसार, AB एक h मीटर ऊँची मीनार है। मीनार के क्षैतिज आधार B से 10 मीटर दूरी पर बिन्दु P स्थित है, जिस पर मीनार की चोटी A का उन्नयन कोण 60° है।



अत: समकोण ΔABP में,

$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BP}$

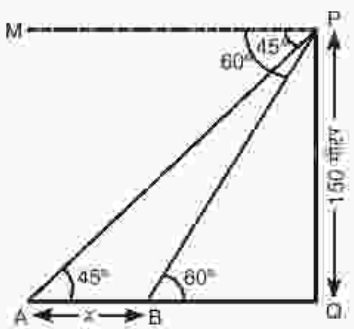
या $\sqrt{3} = \frac{h}{10}$

या $h = 10\sqrt{3}$ मीटर

अत: मीना की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मीटर होगी। **उत्तर**

2. एक मीनार के एक ही ओर उसके पाद से जाने वाली क्षैतिज रेखा पर दो बिन्दु स्थित हैं। मीनार की चोटी से उनके अवनमन कोण क्रमश: 45° व 60° हैं। यदि मीनार की ऊँचाई 150 मीटर हो, तो दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– चित्रानुसार, माना PQ 150 मीटर ऊँची एक मीनार है जिसके पाद Q से होकर जाने वाली क्षैतिज रेखा पर दो बिन्दु A व B स्थित है। बिन्दु A व B के मीनार की चोटी से अवनमन कोण क्रमश: 45° व 60° हैं।



तब $\angle MPA = \angle QAP = 45^\circ$

तथा $\angle MPB = \angle QBP = 60^\circ$

माना A व B के बीच की दूरी $= x$ मीटर

अत: समकोण ΔPQB में,

$\tan 60^\circ = \frac{PQ}{BQ}$

$\sqrt{3} = \frac{150}{BQ}$

या $BQ = \frac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$ मीटर

तथा समकोण ΔPQA में,

$\tan 45^\circ = \frac{PQ}{AQ}$

$1 = \frac{150}{AB + BQ}$

या $AB + BQ = 150$

या $x + 50\sqrt{3} = 150$

या $x = 150 - 50\sqrt{3}$

$= 50(3 - \sqrt{3})$ मीटर

अतः दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी $50(3 - \sqrt{3})$ मीटर है। **उत्तर**

3. एक नाव जो पुल की ओर आ रही है, उस पुल का उन्नयन कोण 30° देखा गया। नाव का उसी चाल से 6 मिनट चलने के पश्चात् उन्नयन कोण 60° हो जाता है। ज्ञात कीजिए कि नाव को उस पुल तक उसी चाल से पहुँचने में कितना समय और लगेगा।

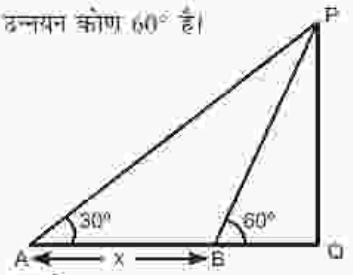
हल– माना बिन्दु P पुल पर स्थित है, जिसके ठीक नीचे बिन्दु Q है।

माना नाव की प्रथम स्थिति A से पुल पर स्थित बिन्दु P का उन्नयन कोण 30° है।

अतः $\angle PAQ = 30^\circ$

6 मिनट बाद नाव की द्वितीय स्थिति B से पुल का उन्नयन कोण 60° है।

अतः $\angle PBQ = 60^\circ$



चित्रानुसार, ΔPAB में $\angle PBQ$ बहिष्कोण है।

अतः $\angle PAB + \angle BPA = \angle PBQ$

या $30^\circ + \angle BPA = 60^\circ$

या $\angle BPA = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

ΔPAB में $\angle PAB = \angle BPA = 30^\circ$

अतः $PB = AB = x$ (बराबर कोणों के सामने की भुजाएँ)

समकोण ΔPQB में,

$\cos 60^\circ = \frac{BQ}{PB}$

$\frac{1}{2} = \frac{BQ}{x} \Rightarrow BQ = \frac{x}{2}$

इससे ज्ञात होता है कि नाव को पुल तक पहुँचने में BQ अर्थात् $\frac{x}{2}$ दूरी और तय करनी होगी यदि $AB = x$ है।

AB अर्थात् x दूरी तय करने में नाव को लगा समय = 6 मिनट

BQ अर्थात् $\frac{x}{2}$ दूरी तय करने में नाव को लगा समय $= \frac{6}{2} = 3$ मिनट

अतः नाव को पुल तक पहुँचने में **3 मिनट** और लगेंगे। **उत्तर**

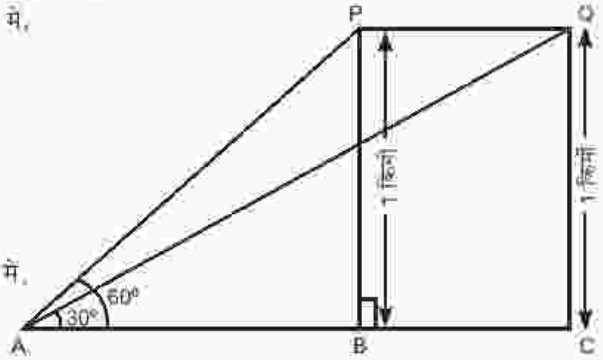
4. एक वायुयान भूमि से 1 किमी की ऊँचाई पर क्षैतिज दिशा में उड़ रहा है। किसी बिन्दु से वायुयान का उन्नयन कोण 60° है। 15 सेकण्ड पश्चात् उसी स्थान पर वायुयान का उन्नयन कोण 30° हो जाता है। वायुयान की चाल किमी/घण्टा में ज्ञात कीजिए।

हल– माना वायुयान की प्रथम स्थिति P तथा 15 सेकण्ड पश्चात् द्वितीय स्थिति Q है। क्षैतिज पर स्थित बिन्दु A पर स्थितियों P व Q से वायुयान के उन्नयन कोण क्रमशः $60°$ व $30°$ हैं।

वायुयान की ऊँचाई $PB = QC = 1$ किमी

माना वायुयान की चाल $= x$ किमी/घण्टा

अतः समकोण ΔPBA में,



$$\tan 60° = \frac{PB}{AB}$$

या $$\sqrt{3} = \frac{1}{AB}$$

या $$AB = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ किमी}$$

तथा समकोण ΔQCA में,

$$\tan 30° = \frac{QC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{AB + BC} \quad [\because AC = AB + BC]$$

या $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + BC}$$

या $$\frac{1}{\sqrt{3}} + BC = \sqrt{3}$$

या $$BC = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ किमी} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 1000 \text{ मीटर} = PQ$$

वायुयान को स्थिति P से Q तक जाने में लगा समय $= 15$ सेकण्ड

वायुयान की चाल $=$ दूरी/समय

$$= \frac{2 \times 1000}{\sqrt{3} \times 15} \text{ मीटर/सेकण्ड} = \frac{2000}{1{\cdot}732 \times 15} \text{ मीटर/सेकण्ड} = 76{\cdot}98 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

$$= 76{\cdot}98 \times \frac{18}{5} \text{ किमी/घण्टा} = \frac{1385{\cdot}64}{5} \text{ किमी/घण्टा} = 277{\cdot}12 \text{ किमी/घण्टा}$$

अतः वायुयान की चाल **277.12 किमी/घण्टा** है। **उत्तर**

5. एक नाव से नदी के किनारे की किसी इमारत के एक प्रकाश स्रोत का कोण $30°$ देखा गया। 4 मिनट पश्चात् उसी नाव से प्रकाश स्रोत का उन्नयन कोण $60°$ हो गया। ज्ञात कीजिए कि नाव को इमारत के पास किनारे तक पहुँचने में कितना समय लगेगा?

हल– माना PQ नदी किनारे की इमारत है तथा P प्रकाश स्रोत है बिन्दु A किसी क्षण नाव की स्थिति है। 4 मिनट पश्चात् नाव बिन्दु B पर पहुँच जाती है। बिन्दु A व B पर नाव के प्रकाश स्रोत P से उन्नयन कोण क्रमशः $30°$ व $60°$ हैं।

ΔPAB में $\angle PBQ$ बहिष्कोण है

$\angle PAB + \angle APB = \angle PBQ$

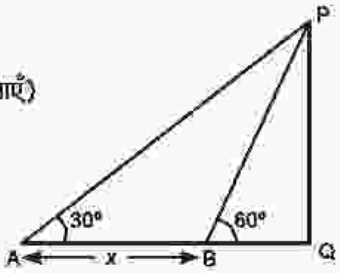
$30° + \angle APB = 60°$

या $\angle APB = 60° - 30° = 30°$

ΔPAB में

$\angle PAB = \angle APB$

अतः $PB = AB = x$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ)



समकोण ΔPQB में,

$\cos 60° = \frac{BQ}{PB}$

$\frac{1}{2} = \frac{BQ}{x}$

या $BQ = \frac{x}{2}$

चूकि $AB = x$ दूरी तय करने में नाव को लगा समय $= 4$ मिनट

अतः $BQ = \frac{x}{2}$ दूरी तय करने में नाव को लगा समय $= \frac{4}{2} = 2$ मिनट

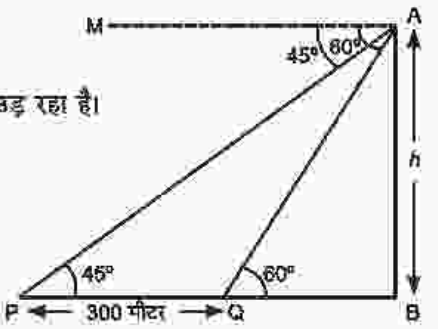
अतः नाव को इमारत के पास किनारे तक पहुँचने में **2 मिनट** लगेगी। **उत्तर**

6. एक वायुयान दो मकानों के ऊपर से उड़ रहा है, जिनके बीच की न्यूनतम दूरी 300 मीटर है। यदि किसी समय वायुयान से एक ही दिशा में दोनों मकानों के अवनमन कोण 45° व 60° हों, तो ज्ञात कीजिए वायुयान कितनी ऊँचाई पर उड़ रहा है।

हल– माना P व Q दो मकान हैं, जिनके बीच की दूरी $PQ = 300$ मीटर, A किसी क्षण वायुयान की स्थिति है। जिससे मकान P व Q के अवनमन कोण क्रमशः $\angle MAP = 45°$ तथा $\angle MAQ = 60°$ है।

अतः $\angle APB = \angle MAP = 45°$

तथा $\angle AQB = \angle MAQ = 60°$



माना वायुयान $AB = h$ मीटर ऊँचाई पर उड़ रहा है।

$\therefore$ समकोण ΔABQ में,

$\tan 60° = \frac{AB}{QB}$

या $\sqrt{3} = \frac{h}{QB}$

या $QB = \frac{h}{\sqrt{3}}$ .....(1)

तथा समकोण ΔABP में,

$\tan 45° = \frac{AB}{PB}$

$1 = \frac{h}{PQ + QB}$ $[\because PB = PQ + QB]$

या $1 = \frac{h}{300 + QB}$

या $300 + QB = h$

या $300 + \frac{h}{\sqrt{3}} = h$ (समीकरण 1 से)

या $300 = h - \frac{h}{\sqrt{3}}$

या $300 = \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} h$

या $h = \frac{300\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{300\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{300(3+\sqrt{3})}{3-1} = \frac{300(3+\sqrt{3})}{2}$

$= 150(3+\sqrt{3})$ मीटर **उत्तर**

7. सड़क के एक ओर स्थित किसी मकान के सड़क के दूसरी ओर स्थित मीनार के शिखर से छत तथा आधार के अवनमन कोण क्रमशः 45° व 60° हैं, यदि मकान की ऊँचाई 10 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

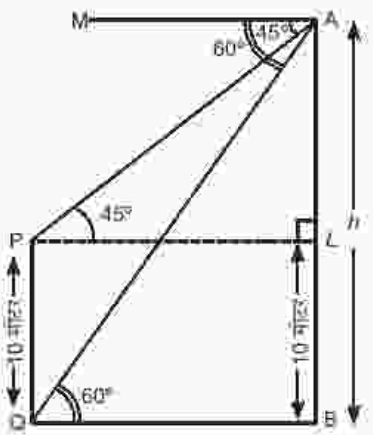
हल– माना $AB = h$ मीटर ऊँची एक मीनार सड़क के एक ओर स्थित है तथा $PQ = 10$ मीटर ऊँचाई का सड़क के दूसरी ओर स्थित कोई मकान इस प्रकार है कि मीनार के शिखर से इसके छत व आधार के अवनमन कोण क्रमशः $\angle MAP = 45°$ तथा $\angle MAQ = 60°$ हैं।

PL, भुजा AB पर लम्ब डाला।

अतः $\angle APL = \angle MAP = 45°$ (एकान्तर कोण)

तथा $\angle AQB = \angle MAQ = 60°$ (एकान्तर कोण)

$LB = PQ = 10$ मीटर



तथा $PL = QB$

समकोण ΔALP में,

$\tan 45° = \frac{AL}{PL}$

या $1 = \frac{AL}{PL}$

या $PL = AL$

या $QB = AL$ .....(1)

समकोण ΔABQ में,

$\tan 60° = \frac{AB}{QB}$

या $\sqrt{3} = \frac{AL + LB}{AL}$ [$\because AB = AL + LB$]

या $\sqrt{3} = \frac{AL + 10}{AL}$

या $\sqrt{3}AL = AL + 10$

या $\sqrt{3}AL - AL = 10$

या $(\sqrt{3}-1)AL = 10$

या $AL = \frac{10}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2} = 5(\sqrt{3}+1)$

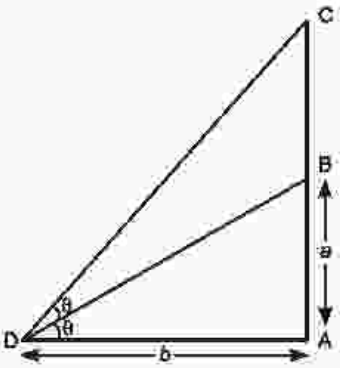
मीनार की ऊँचाई $h = AB = AL + LB = 5(\sqrt{3}+1) + 10 = 5\sqrt{3} + 5 + 10 = 5\sqrt{3} + 15$

$= 5(\sqrt{3}+3) = 5(1.732+3) = 5 \times 4.732 = 23.66$ मीटर

अतः मीनार की ऊँचाई **23.66 मीटर** है। **उत्तर**

8. चित्र में, क्षैतिज समतल पर खड़ी मीनार के दो भाग AB तथा BC हैं। $AB = a$ मीटर है। उसी क्षैतिज समतल पर कोई बिन्दु D है जिस पर BC तथा AB दोनों भाग समान कोण θ अन्तरित करते हैं। यदि $AD = b$ मीटर, तब सिद्ध कीजिए— $BC = \frac{a(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)}$ मीटर

हल– दिए गए चित्रानुसार,



समकोण ΔBAD में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{AD}$$

या $$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

तथा समकोण ΔCAD में,

$$\tan(\theta + \theta) = \frac{AC}{AD}$$

या $$\tan 2\theta = \frac{AB + BC}{AD}$$

या $$\tan 2\theta = \frac{a + BC}{b}$$

या $$\frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{a + BC}{b}$$

या $$\frac{2 \times \frac{a}{b}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{a + BC}{b}$$ [समीकरण (1) से]

या $$\frac{2 \times \frac{a}{b}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{a + BC}{b}$$

या $$\frac{\frac{2a}{b}}{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} = \frac{a + BC}{b}$$

या $$\frac{2ab^2}{b(b^2 - a^2)} = \frac{a + BC}{b}$$

या $$\frac{2ab^2}{b^2 - a^2} = a + BC$$

या $$a + BC = \frac{2ab^2}{b^2 - a^2}$$

$$BC = \frac{2ab^2}{b^2 - a^2} - a$$

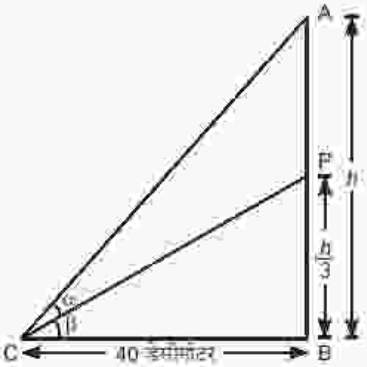
या $$BC = \frac{2ab^2 - ab^2 + a^3}{b^2 - a^2}$$

या $$BC = \frac{ab^2 + a^3}{b^2 - a^2} = \frac{a(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)}$$ मीटर इति सिद्धम्

9. ऊर्ध्वाधर खम्भा (जो 100 डेसी मीटर से अधिक लम्बा है) दो भागों में बँटा है, जिसमें नीचे का भाग उसकी कुल लम्बाई का $\frac{1}{3}$ है। यदि खम्भे की जड़ से 40 डेसीमीटर दूर एक स्थान पर उसका ऊपरी भाग कोण α अन्तरित करता है जबकि $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, तो खम्भे की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– चित्र में, माना $AB = h$ डेसीमीटर लम्बाई का खम्भा है। जिसके दो भाग AP व PB है, तथा $PB = \frac{1}{3}h$ डेसी मीटर। खम्भे की जड़ B से 40 डेसीमीटर दूरी पर स्थित बिन्दु C पर खम्भे के ऊपरी भाग AP द्वारा अन्तरित कोण α है।

माना खम्भे के निचले भाग PB द्वारा बिन्दु C पर अन्तरित कोण β है। दिया है— $\tan\alpha = \frac{1}{2}$



अतः समकोण ΔPBC में,

$$\tan\beta = \frac{PB}{BC}$$

या $$\tan\beta = \frac{\frac{h}{3}}{40}$$

या $$\tan\beta = \frac{h}{120} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

तथा समकोण ΔABC में,

$$\tan\angle BCA = \frac{AB}{BC}$$

या $$\tan(\alpha+\beta) = \frac{h}{40}$$

या $$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{h}{40}$$

या $$\frac{\frac{1}{2} + \frac{h}{120}}{1 - \frac{1}{2}\times\frac{h}{120}} = \frac{h}{40}$$

या $$\frac{\frac{60+h}{120}}{1 - \frac{h}{240}} = \frac{h}{40}$$

या $\dfrac{\dfrac{60+h}{120}}{\dfrac{240-h}{240}}=\dfrac{h}{40}$

या $\dfrac{240(60+h)}{120(240-h)}=\dfrac{h}{40}$

या $\dfrac{2(60+h)}{240-h}=\dfrac{h}{40}$

या $80(60+h)=240h-h^2$

या $4800+80h=240h-h^2$

या $h^2-240h+80h+4800=0$

या $h^2-160h+4800=0$

या $h^2-120h-40h+4800=0$

या $h(h-120)-40(h-120)=0$

या $(h-120)(h-40)=0$

अत:, यदि $h-120=0$ तो $h=120$ डेसीमीटर

तथा यदि $h-40=0$ तो $h=40$ डेसीमीटर (जो अमान्य है)

अत: खम्भे की लम्बाई $(h)=120$ डेसीमीटर **उत्तर**

10. एक वायुयान सीधी सड़क के अनुदिश सड़क पर स्थित एक स्थान की ओर क्षैतिज दिशा में, 600 किमी/घण्टा की गति से उड़ रहा है। उस स्थान पर उसका उन्नयन कोण 30° और 12 सेकण्ड बाद 60° हो जाता है। वायुयान की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई कीजिए।

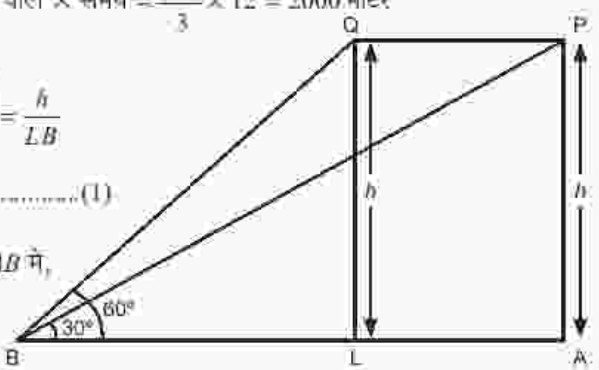
हल– माना सड़क AB पर स्थित बिन्दु B के अनुदिश ऊँचाई h मीटर पर एक वायुयान उड़ रहा है। वायुयान की प्रथम स्थिति P से बिन्दु B का उन्नयन कोण 30° तथा 12 सेकण्ड बाद वायुयान की द्वितीय स्थिति, Q से बिन्दु B का उन्नयन कोण 60° है।

चित्र से,

$QL=PA=h$ मीटर तथा $PQ=AL$

वायुयान की चाल 600 किमी/घण्टा $=600\times\dfrac{5}{18}$ मीटर/सेकण्ड $=\dfrac{500}{3}$ मीटर/सेकण्ड

अत: दूरी $PQ=AL=$ चाल $\times$ समय $=\dfrac{500}{3}\times 12=2000$ मीटर



$\therefore$ समकोण ΔQLB में,

$\tan 60^\circ=\dfrac{QL}{LB}\Rightarrow\sqrt{3}=\dfrac{h}{LB}$

या $LB=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ .....(1)

तथा समकोण ΔPAB में,

$\tan 30^\circ=\dfrac{PA}{AB}$

या $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{h}{AL+LB}$ [$\because AB=AL+LB$]

या $h=\frac{1}{\sqrt{3}}(AL+LB)$

या $h=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2000+\frac{h}{\sqrt{3}}\right)$

या $h=\frac{2000}{\sqrt{3}}+\frac{h}{3}$

या $h-\frac{h}{3}=\frac{2000}{\sqrt{3}}$

या $\frac{3h-h}{3}=\frac{2000}{\sqrt{3}}$

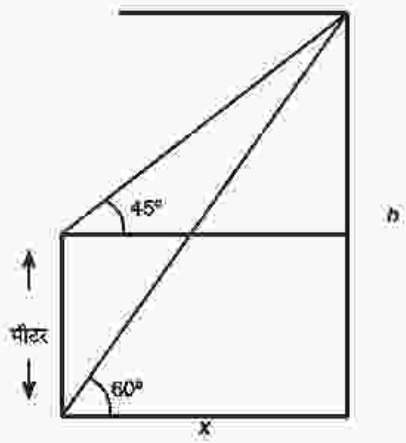
या $\frac{2h}{3}=\frac{2000}{\sqrt{3}}$

या $h=\frac{2000\times 3}{2\times\sqrt{3}}=1000\sqrt{3}$ मीटर

अत: वायुयान की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई $1000\sqrt{3}$ मीटर होगी। उत्तर

11. एक मकान की ऊँचाई $30\sqrt{3}$ मीटर है। एक मीनार के शिखर से मकान के आधार तथा चोटी के अवनमन कोण क्रमश: 60° तथा 45° हैं। मीनार की ऊँचाई तथा मकान से मीनार की क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, $AB=h$ मीटर ऊँची मीनार है। मीनार से x दूरी पर $30\sqrt{3}$ मीटर ऊँचाई का मकान PQ स्थित है। मीनार AB के शिखर A से मकान के आधार व चोटी के अवनमन कोण क्रमश: 60° व 45° हैं।



PL, भुजा AB पर लम्ब डाला।

अत: $LB=PQ=30\sqrt{3}$ मीटर

$PL=QB=x$ मीटर

$\angle AQB=\angle MAQ=60°$

तथा $\angle APL=\angle MAP=45°$

∴ समकोण ΔALP में,

$\tan 45°=\frac{AL}{PL}$

$1=\frac{AL}{x}$

या $AL=x$ .....(1)

तथा समकोण ΔABQ में,

$\tan 60°=\frac{AB}{QB}$ [$\because AB=AL+LB$]

या $\sqrt{3}=\frac{AL+LB}{QB}$

या $\sqrt{3}=\frac{AL+PQ}{QB}$

या $\sqrt{3}=\frac{x+30\sqrt{3}}{x}$ [समीकरण (1) से]

या $\sqrt{3}x=x+30\sqrt{3}$

या $\sqrt{3}x-x=30\sqrt{3}$

या $(\sqrt{3}-1)x=30\sqrt{3}$

या $x=\frac{30\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)}=\frac{30\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

या $x=\frac{30(3+\sqrt{3})}{3-1}=\frac{30(3+\sqrt{3})}{2}=15(3+\sqrt{3})$ मीटर

मीनार की ऊँचाई $(h)=AB=AL+LB=x+PQ=15(3+\sqrt{3})+30\sqrt{3}$

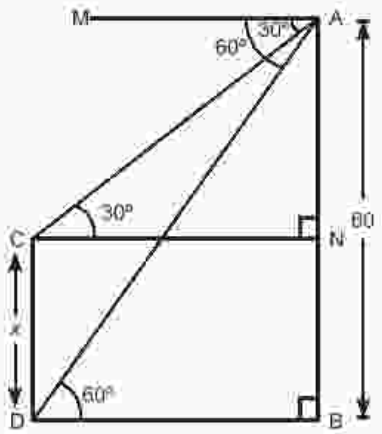
$=45+15\sqrt{3}+30\sqrt{3}=45+45\sqrt{3}=45(1+\sqrt{3})$ मीटर

अतः मीनार की ऊँचाई $=\mathbf{45(1+\sqrt{3})}$ **मीटर**

तथा मीनार से मकान की क्षैतिज दूरी $=\mathbf{15(3+\sqrt{3})}$ **मीटर** **उत्तर**

12. एक भवन तथा एक मीनार एक ही तल पर स्थित हैं। मीनार की चोटी से भवन के शीर्ष तथा आधार के अवनमन कोण क्रमशः 30° व 60° हैं, यदि मीनार की ऊँचाई 60 मीटर है तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, $AB=60$ मीटर ऊँची एक मीनार तथा उसी तल में भवन $CD=x$ मीटर ऊँचा स्थित है। मीनार की चोटी A से भवन के शीर्ष C तथा आधार D के अवनमन कोण क्रमशः $30°$ व $60°$ हैं। CN, भुजा AB पर लम्ब डाला।



अतः $NB=CD=x$

तथा $CN=DB$

$\therefore$ समकोण ΔANC में,

$\tan 30°=\frac{AN}{CN}$

या $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{AN}{CN}$

या $CN=\sqrt{3}AN$ .....(1)

समकोण ΔABD में,

$\tan 60°=\frac{AB}{DB}$

या $\sqrt{3}=\frac{60}{CN}$

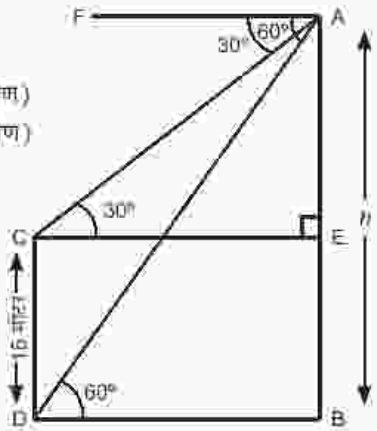
या $\sqrt{3}=\frac{60}{\sqrt{3}AN}$ [समीकरण (1) से]

या $AN=\frac{60}{3}=20$ मीटर

भवन की ऊँचाई $CD=NB=AB-AN=60-20=\mathbf{40}$ **मीटर** **उत्तर**

13. एक मीनार के शिखर से एक भवन के शिखर तथा आधार के अवनमन कोण क्रमशः 30° व 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए, जबकि भवन की ऊँचाई 15 मीटर है।

हल– माना चित्र में, $AB = h$ मीटर ऊँची कोई मीनार है। $CD = 15$ मीटर ऊँचा एक भवन है, जिसके शिखर व आधार के मीनार के शिखर से अवनमन कोण क्रमशः $\angle FAC = 30°$ तथा $\angle FAD = 60°$ है। CE, भुजा AB पर लम्ब डाला।



अतः $CE = DB$

तथा $EB = CD = 15$ मीटर

$\angle ACE = \angle FAC = 30°$ (एकान्तर कोण)

तथा $\angle ADB = \angle FAD = 60°$ (एकान्तर कोण)

$\therefore$ समकोण ΔACE में,

$$\tan 30° = \frac{AE}{CE}$$

या $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AE}{DB}$$

या $$DB = \sqrt{3}AE = \sqrt{3}(AB - EB)$$

$$= \sqrt{3}(h - 15) \text{ मीटर}$$

तथा समकोण ΔABD में,

$$\tan 60° = \frac{AB}{DB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{DB}$$

या $$\sqrt{3} = \frac{h}{\sqrt{3}(h-15)}$$

या $3(h - 15) = h$

या $3h - 45 = h$

या $3h - h = 45$

या $2h = 45$

या $$h = \frac{45}{2} = 22.5 \text{ मीटर}$$

अतः मीनार की ऊँचाई $AB = h = 22.5$ मीटर है। **उत्तर**

14. 10 मीटर ऊँचे एक स्तम्भ के पाद से एक पहाड़ी की चोटी का उन्नयन कोण 60° तथा स्तम्भ के शीर्ष से पहाड़ी की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। पहाड़ी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में $MN = h$ मीटर ऊँची पहाड़ी है तथा $AB = 10$ मीटर ऊँचाई का कोई स्तम्भ है। स्तम्भ के पाद तथा शीर्ष से पहाड़ी की चोटी के उन्नयन कोण क्रमशः 60° तथा 30° हैं। AD, भुजा MN पर लम्ब डाला।

अतः $AD = BN$

तथा $DN = AB = 10$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔMDA में,

$$\tan 30° = \frac{MD}{AD}$$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{MN - DN}{BN}$ $[\because MD = MN - DN]$

या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h-10}{BN}$

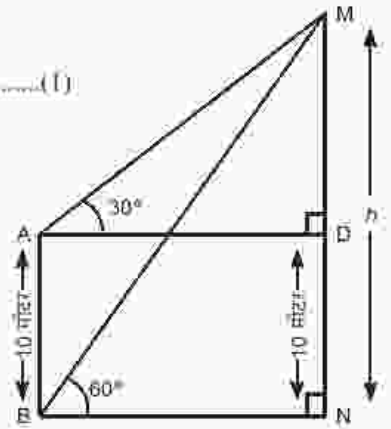
या $BN = \sqrt{3}h - 10\sqrt{3}$ .....(1)

तथा समकोण ΔMNB में,

$\tan 60° = \frac{MN}{BN}$

$\sqrt{3} = \frac{h}{BN}$

या $BN = \frac{h}{\sqrt{3}}$ .....(2)



समीकरण (1) व (2) से

$\frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}h - 10\sqrt{3}$

या $h = 3h - 30$

या $30 = 3h - h$

या $30 = 2h \Rightarrow h = \frac{30}{2} = 15$ मीटर

अतः पहाड़ी की ऊँचाई $(h) = 15$ मीटर है। उत्तर

15. 5 मीटर ऊँचे बिजली के एक खम्भे के पाद से किसी मीनार की चोटी का उन्नयन कोण $60°$ तथा खम्भे के शीर्ष से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण $30°$ है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना $PQ = h$ मीटर ऊँची कोई मीनार है तथा $RS = 5$ मीटर ऊँचा एक बिजली का खम्भा इस प्रकार है कि मीनार की चोटी का खम्भे के पाद व शीर्ष से उन्नयन कोण क्रमशः $60°$ व $30°$ है। RM, भुजा PQ पर लम्ब डाला है।

अतः $RM = SQ = x$

तथा $MQ = RS = 5$ मीटर

$PM = PQ - MQ = (h-5)$ मीटर

∴ समकोण ΔPMR में,

$\tan 30° = \frac{PM}{RM}$

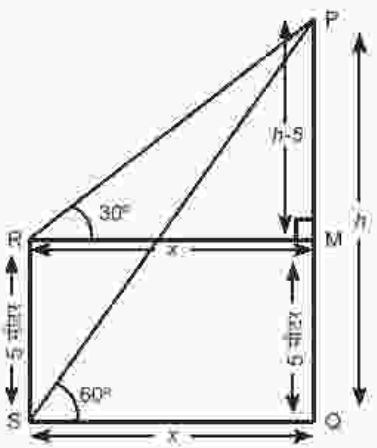
या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h-5}{x}$

या $x = \sqrt{3}(h-5)$ .....(1)

तथा समकोण ΔPQS में,

$\tan 60° = \frac{PQ}{SQ}$

या $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$



या $x=\frac{h}{\sqrt{3}}$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$\sqrt{3}(h-5)=\frac{h}{\sqrt{3}}$

या $3(h-5)=h$

या $3h-15=h$

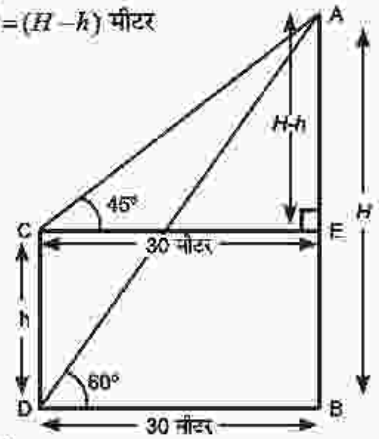
या $3h-h=15$

या $2h=15\Rightarrow h=\frac{15}{2}=7{\cdot}5$ मीटर

अत: मीनार की ऊँचाई 7.5 मीटर है। उत्तर

16. एक मकान के आधार से 30 मीटर दूर स्थित एक मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° तथा मकान की छत से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। मकान तथा मीनार की ऊँचाईयाँ ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, $AB=H$ मीटर ऊँची मीनार तथा $CD=h$ मीटर ऊँचा मकान है। मीनार व मकान के बीच दूरी $DB=30$ मीटर है। CE भुजा AB पर लम्ब है। अत: $CE=DB=30$ मीटर, $EB=CD=h$ मीटर $AE=AB-EB=(H-h)$ मीटर



$\therefore$ समकोण ΔAEC में,

$\tan 45°=\frac{AE}{CE}$

$1=\frac{H-h}{30}$

या $H-h=30$ मीटर .....(1)

तथा समकोण ΔABD में,

$\tan 60°=\frac{AB}{DB}$

या $\sqrt{3}=\frac{H}{30}$

या $H=30\sqrt{3}$ मीटर $=30\times 1{\cdot}732=51{\cdot}96$ मीटर

H का मान समीकरण में (1) रखने पर,

$51{\cdot}96-h=30$

या $51{\cdot}96-30=h$

या $21{\cdot}96=h\Rightarrow h=21{\cdot}96$ मीटर

अत: मकान की ऊँचाई $=21{\cdot}96$ मीटर

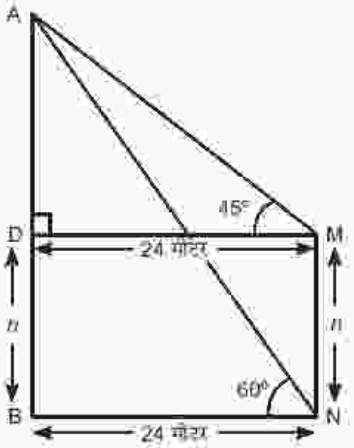
तथा मीनार की ऊँचाई $=51{\cdot}96$ मीटर उत्तर

17. एक मकान के आधार से 24 मीटर दूर स्थित एक चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 60° तथा मकान की छत से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। मकान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, AB कोई चिमनी तथा इससे 24 मीटर दूरी पर मकान MN स्थित है, जिसकी ऊँचाई $MN = h$ मीटर। चिमनी के शिखर A के मकान MN के पाद N तथा छत M से उन्नयन क्रमशः $\angle ANB = 60°$ तथा $\angle AMD = 45°$ तथा भुजा MD, AB पर लम्ब डाला गया।

अतः $DM = BN = 24$ मीटर

$DB = MN = h$ मीटर



$\therefore$ समकोण ΔADM में,

$$\tan 45° = \frac{AD}{MD}$$

या $$1 = \frac{AD}{MD}$$

या $AD = MD = 24$ मीटर .....(1)

तथा समकोण ΔABN में,

$$\tan 60° = \frac{AB}{BN}$$

या $$\sqrt{3} = \frac{AD + DB}{24} \quad [\because AB = AD + DB]$$

या $$\sqrt{3} = \frac{24 + h}{24}$$

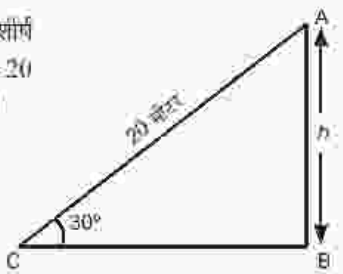
या $24\sqrt{3} = 24 + h$

या $h = 24\sqrt{3} - 24 = 24(\sqrt{3} - 1) = 24(1.732 - 1) = 24 \times 0.732 = 17.568$ मीटर

$= 17.57$ मीटर **उत्तर**

18. एक सर्कस का कलाकार 20 मीटर लम्बी रस्सी पर चढ़ रहा है, जो कि एक ऊर्ध्वाधर स्तम्भ के शीर्ष से बँधी हुई है। स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। यदि रस्सी द्वारा जमीन के साथ बना हुआ उन्नयन कोण 30° है।

हल– माना $AB = h$ मीटर ऊँचाई का एक स्तम्भ है, जिसके शीर्ष A तथा जमीन पर स्थित बिन्दु C से एक रस्सी $AC = 20$ मीटर जमीन के साथ 30° का कोण बनाते हुए बँधी है।



अतः समकोण ΔABC में,

$$\sin 30° = \frac{AB}{AC}$$

या $$\frac{1}{2} = \frac{h}{20}$$

या $$h = \frac{20}{2} = 10 \text{ मीटर}$$ **उत्तर**

19. एक वृक्ष तूफान के कारण टूट जाता है और टूटा हुआ भाग जमीन के साथ 30° का कोण बनाता है। वृक्ष के पाद से तथा उस बिन्दु के बीच की दूरी (जहाँ वृक्ष का शीर्ष जमीन को छूता है) 8 मीटर है। वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना वृक्ष APQ का ऊपरी भाग AP तूफान में टूटकर जमीन पर PQ स्थिति ग्रहण कर लेता है। अर्थात् वृक्ष का ऊपरी बिन्दु A जमीन को बिन्दु O पर छूता है। जो पृथ्वी के साथ 30° का कोण बनाता है।

तब $OP = AP$

प्रश्नानुसार,

$OQ = 8$ मीटर तथा $\angle POQ = 30°$

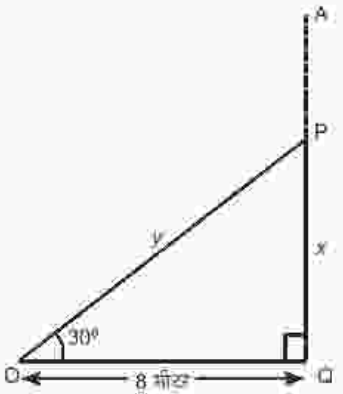
माना $OP = y$ तथा $PQ = x$

समकोण ΔPQO में,

$\tan 30° = \frac{PQ}{OQ}$

या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{8}$

या $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ मीटर



पुनः समकोण ΔPQO में,

$\cos 30° = \frac{OQ}{OP}$

या $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{y}$

या $y = \frac{16}{\sqrt{3}}$ मीटर

अतः वृक्ष की ऊँचाई $= AQ = AP + PQ = OP + PQ = y + x$

$= \frac{16}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{16+8}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$ मीटर उत्तर

20. जमीन पर स्थित किसी बिन्दु से एक टावर के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° है। यदि टावर के आधार से वह बिन्दु 30 मीटर दूर है, तो टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, MN एक टावर है, जिसकी ऊँचाई $MN = h$ मीटर। टावर से 30 मीटर दूर स्थित बिन्दु P है जिससे टावर के शीर्ष M का उन्नयन कोण 30° है अर्थात्

$\angle MPN = 30°$

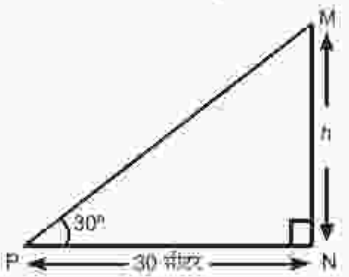
समकोण ΔMNP में,

$\tan 30° = \frac{MN}{PN}$

या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$

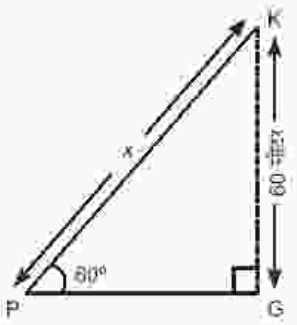
या $h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{10 \times 3}{\sqrt{3}}$

$= 10\sqrt{3}$ मीटर उत्तर



21. एक पतंग जमीन से 60 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रही है। पतंग से बँधा हुआ धागा जमीन पर स्थित किसी बिन्दु पर बँधा हुआ है। यदि धागे का जमीन से झुकाव 60° है, तो धागे की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में एक पतंग आकाश में K बिन्दु पर उड़ रही है। PK पतंग से बँधा धागा है जो जमीन पर बिन्दु P पर बँधा है तथा जमीन के साथ $60°$ का कोण बनाता है। पतंग की जमीन से ऊँचाई $KG = 60$ मीटर।



माना धागे की लम्बाई $= PK = x$ मीटर है।

अत: समकोण ΔKGP में,

$\sin 60° = \frac{KG}{PK}$

या $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{x}$

या $x = \frac{60 \times 2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{3 \times 20 \times 2}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$ मीटर

उत्तर

22. एक 1·5 मीटर लम्बा लड़का 30 मीटर ऊँची इमारत से कुछ दूरी पर खड़ा हुआ है। लड़के द्वारा इमारत की ओर चलने पर लड़के की आँख से इमारत के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° से बढ़कर 60° हो जाता है। वह दूरी ज्ञात कीजिए, जितनी लड़का इमारत की ओर चला।

हल– माना $LD = 1·5$ मीटर लम्बा एक लड़का $AB = 30$ मीटर ऊँची इमारत से $BD = y$ दूरी पर खड़ा है, जहाँ पर लड़के की आँख से इमारत के शीर्ष A का उन्नयन कोण $(\angle ALM) = 30°$ है। इमारत की ओर x दूरी चलने पर यह कोण $(\angle AL'M) = 60°$ हो जाता है। LM, भुजा AB पर लम्ब है।

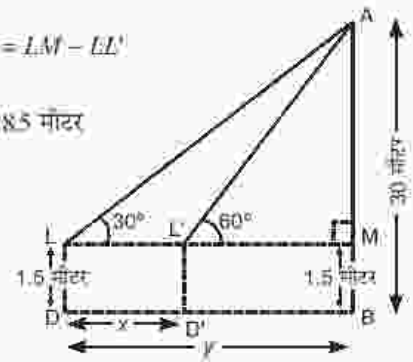
चित्रानुसार,

$LD = MB = 1·5$ मीटर

$LL' = DD' = x$ तथा $LM = DB = y$, $L'M = LM - LL'$

$= (y - x)$ मीटर

तथा $AM = (AB - MB) = (30 - 1·5) = 28·5$ मीटर



∴ समकोण ΔAML में,

$\tan 30° = \frac{AM}{LM}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28·5}{y}$

या $y = 28·5\sqrt{3}$ मीटर ……(1)

तथा समकोण $\Delta AML'$ में,

$\tan 60° = \frac{AM}{L'M}$

$\sqrt{3} = \frac{28·5}{LM - LL'}$

या $\sqrt{3} = \frac{28·5}{y - x}$

या $\sqrt{3} = \frac{28{\cdot}5}{28{\cdot}5\sqrt{3} - x}$ [समीकरण (1) से]

या $28{\cdot}5 \times 3 - \sqrt{3}x = 28{\cdot}5$

या $85{\cdot}5 - 28{\cdot}5 = \sqrt{3}x$

या $57{\cdot}0 = \sqrt{3}x$

या $x = \frac{57}{\sqrt{3}} = \frac{57 \times \sqrt{3}}{3} = 19\sqrt{3}$ मीटर

अत: लडका इमारत की ओर **$19\sqrt{3}$ मीटर** दूरी चलता है। **उत्तर**

23. एक 20 मीटर ऊँची इमारत पर एक टावर बनाया गया है। जमीन पर स्थित किसी बिन्दु से टावर के शीर्ष और आधार के उन्नयन कोण 60° व 45° हैं। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, $AB = 20$ मीटर ऊँची एक इमारत है। जिसके ऊपर $TA = h$ मीटर ऊँचाई का एक टावर बनाया गया है। जमीन पर कोई बिन्दु P है। जिसकी इमारत के आधार से दूरी $PB = x$ मीटर है।

$\angle APB = 45°$ तथा $\angle TPB = 60°$

समकोण ΔABP में,

$\tan 45° = \frac{AB}{PB}$

या $1 = \frac{20}{x}$

या $x = 20$ मीटर

समकोण ΔTBP में,

$\tan 60° = \frac{TB}{PB}$

या $\sqrt{3} = \frac{TA + AB}{PB}$

या $\sqrt{3} = \frac{h + 20}{20}$

या $20\sqrt{3} = h + 20$

या $h = 20\sqrt{3} - 20 \Rightarrow h = 20(\sqrt{3} - 1)$ मीटर **उत्तर**

24. एक पीठ पर 1·6 मीटर लम्बी मूर्ति स्थित है। जमीन पर स्थित किसी बिन्दु से मूर्ति के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° है और उसी बिन्दु से पीठ के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° है। पीठ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, $AB = h$ मीटर ऊँचा एक पीठ है, जिस पर $MA = 1{\cdot}6$ मीटर ऊँची एक मूर्ति स्थित है। जमीन पर एक बिन्दु P है, जिस पर मूर्ति के शीर्ष एवं पीठ के शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमशः $\angle MPB = 60°$ तथा $\angle APB = 45°$ है।

$\therefore$ समकोण ΔABP में,

$\tan 45° = \frac{AB}{PB}$

या $1 = \frac{h}{PB}$

या $PB = h$ .....(1)

तथा समकोण ΔMPB में,

$\tan 60^\circ = \frac{MB}{PB}$

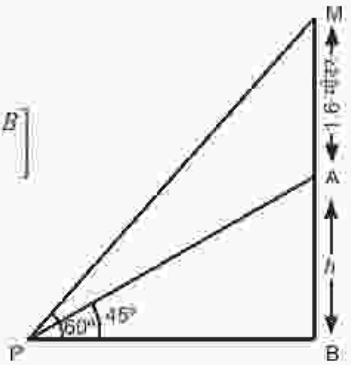
या $\sqrt{3} = \frac{MA + AB}{h}$ $\left[\because MB = MA + AB = 1.6 + h\right]$

या $\sqrt{3} = \frac{1.6 + h}{h}$

या $\sqrt{3}h = 1.6 + h$

या $\sqrt{3}h - h = 1.6$

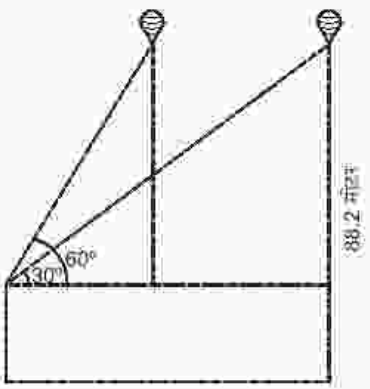
या $(\sqrt{3} - 1)h = 1.6$



या $h = \frac{1.6}{\sqrt{3}-1} = \frac{1.6 \times (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{2}$

$= 0.8(\sqrt{3}+1)$ मीटर उत्तर

25. हवा के साथ क्षैतिज रेखा पर गति करते हुए एक गुब्बारा 1.2 मीटर लम्बी लड़की से 88.2 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है। गुब्बारा किसी क्षण लड़की की आँख से 60° का उन्नयन कोण बनाता है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण 30° कम हो जाता है। उस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा चली गई दूरी ज्ञात कीजिए।



हल– चित्र में, $GL = 1.2$ मीटर लम्बी एक लड़की है। B_1 व B_2 गुब्बारे की दो स्थितियाँ हैं, जिनके लड़की की आँख से उन्नयन कोण क्रमशः 60° व 30° हैं। माना गुब्बारे द्वारा B_1 से B_2 तक चलित दूरी $B_1B_2 = x$ मीटर।

गुब्बारे की ऊँचाई = 88.2 मीटर

चित्रानुसार, $GL = QM = 1.2$ मीटर

अतः $B_1P = B_2Q = 88.2 - 1.2 = 87$ मीटर

$B_1B_2 = PQ = x$

∴ समकोण ΔB_1PG में,

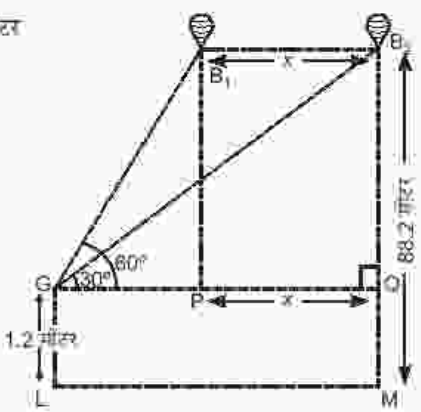
$\tan 60^\circ = \frac{B_1P}{GP}$

$\sqrt{3} = \frac{87}{GP}$

या $GP = \frac{87}{\sqrt{3}}$ .....(1)

तथा समकोण ΔB_2QG में,

$\tan 30^\circ = \frac{B_2Q}{GQ}$



या $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{87}{GP+PQ}$

या $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{87}{GP+x}$

या $GP+x=87\times\sqrt{3}$

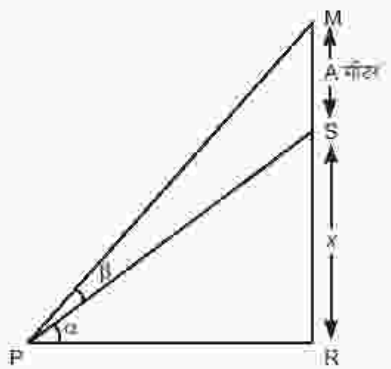
या $\frac{87}{\sqrt{3}}+x=87\sqrt{3}$ [समीकरण (1) से]

या $x=87\sqrt{3}-\frac{87}{\sqrt{3}}$

या $x=\frac{87\times3-87}{\sqrt{3}}=\frac{261-87}{\sqrt{3}}=\frac{174}{\sqrt{3}}=\frac{174\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{174\sqrt{3}}{3}=58\sqrt{3}$ मीटर उत्तर

26. एक उर्ध्वाधर खम्भा अपने पाद के तल में स्थित किसी बिन्दु पर α कोण अन्तरित करता है तथा एक A मीटर लम्बा आदमी जो खम्भे के शिखर पर खड़ा है, सड़क के उस बिन्दु पर β कोण अन्तरित करता है। सिद्ध कीजिए खम्भे की ऊँचाई $A\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\beta$ मीटर है।

हल– माना चित्र में $SR=x$ मीटर लम्बा खम्भा है, जो अपने पाद के तल में स्थित बिन्दु P पर α कोण अन्तरित करता है। $MS=A$ मीटर लम्बा आदमी खम्भे के शिखर पर खड़ा है, जो बिन्दु P पर β कोण अन्तरित करता है।



∴ समकोण ΔSRP में,

$\cot\alpha=\frac{PR}{SR}$

या $\cot\alpha=\frac{PR}{x}$

या $PR=x\cot\alpha$ .....(1)

तथा समकोण ΔMRP में,

$\cot(\alpha+\beta)=\frac{PR}{MR}$

या $\cot(\alpha+\beta)=\frac{PR}{MS+SR}$

या $\cot(\alpha+\beta)=\frac{PR}{(A+x)}$

या $PR=(A+x)\cot(\alpha+\beta)$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$x\cot\alpha=(A+x)\cot(\alpha+\beta)$

या $x\cot\alpha=A\cot(\alpha+\beta)+x\cot(\alpha+\beta)$

या $x\cot\alpha-x\cot(\alpha+\beta)=A\cot(\alpha+\beta)$

या $x\{\cot\alpha-\cot(\alpha+\beta)\}=A\cot(\alpha+\beta)$

या $x\left\{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right\}=A\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

या $x\left\{\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\right\}=A\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

या $x\frac{\sin(\alpha+\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}=A\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

या $x\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}=A\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

या $x\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=A\cos(\alpha+\beta)$

या $x=\frac{A\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$

या $x=A\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\beta$ इति सिद्धम्

27. एक झील के तल से h मीटर ऊँचाई पर स्थित एक स्थान पर बादल का उन्नयन कोण α है तथा झील में उसके प्रतिबिम्ब का अवनमन कोण β है। सिद्ध कीजिए उस स्थान से बादल की दूरी $\frac{2h\sec\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}$ मीटर है।

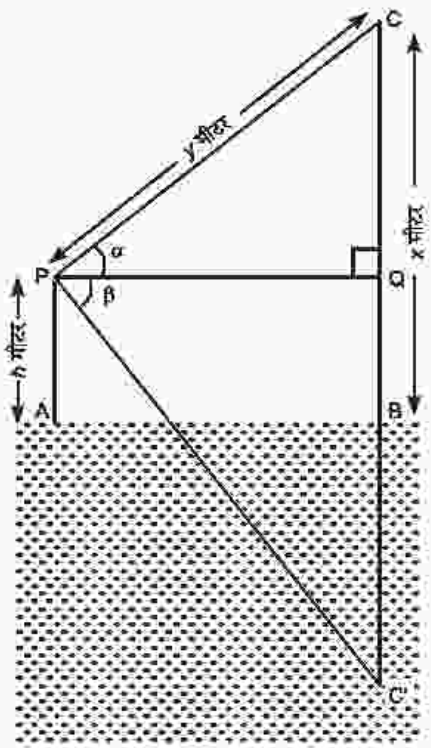
हल– माना चित्र में किसी झील के तल पर दो बिन्दु A व B हैं। बिन्दु B से x मीटर ऊँचाई पर बादल C है। बिन्दु A से h ऊँचाई पर कोई बिन्दु P है, जिससे बादल C का उन्नयन कोण $\angle CPQ=\alpha$ है बिन्दु P से बादल की दूरी $=PC=y$, बिन्दु B से x गहराई पर बादल C का प्रतिबिम्ब C' है, जिससे बिन्दु P का अवनमन β है।

चित्रानुसार, $QB=PA=h$ मीटर

तथा $BC'=BC=x$ मीटर

$CQ=BC-BQ$ तथा $QC'=BQ+BC'$

$=x-h$ $=h+x$



∴समकोण ΔCQP में,

$\tan\alpha=\frac{CQ}{PQ}$

या $\tan\alpha=\frac{BC-QB}{PQ}$

या $\tan\alpha=\frac{x-h}{PQ}$

या $PQ\tan\alpha=x-h$

या $x=h+PQ\tan\alpha$ .....(1)

तथा समकोण $\Delta PQC'$ में,

$\tan\beta=\frac{QC'}{PQ}$

या $\tan\beta=\frac{QB+BC'}{PQ}$

या $\tan\beta=\frac{h+x}{PQ}$

या $PQ\tan\beta = h + x$

या $x = PQ\tan\beta - h$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$h + PQ\tan\alpha = PQ\tan\beta - h$

या $h + h = PQ\tan\beta - PQ\tan\alpha$

या $2h = PQ(\tan\beta - \tan\alpha)$

या $PQ = \dfrac{2h}{(\tan\beta - \tan\alpha)}$ .....(3)

पुनः समकोण ΔCQP में,

$\cos\alpha = \dfrac{PQ}{PC}$

या $\cos\alpha = \dfrac{PQ}{y}$

या $y = \dfrac{PQ}{\cos\alpha} = PQ\sec\alpha = \dfrac{2h\sec\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$ [समीकरण (3) से]

$= \dfrac{2h\sec\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$ इति सिद्धम्

28. एक मीनार एक क्षैतिज समतल पर खड़ी है तथा क्षैतिज से α कोण पर झुके पहाड़ से इसकी दूरी a है। एक आदमी जो पहाड़ पर बैठा है, मीनार के ठीक ऊपर से तालाब को देख सकता है जो मीनार से b दूरी पर है यदि आदमी की पहाड़ के आधार से दूरी c हो तो सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\dfrac{bc\sin\alpha}{a + b + c\cos\alpha}$ है।

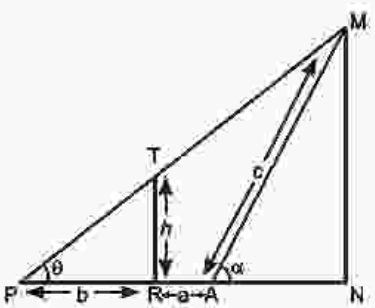
हल– माना चित्र में AMN एक पहाड़ है जो क्षैतिज से α कोण पर झुका हुआ है। पहाड़ के आधार A से a मीटर दूरी पर $TR = h$ ऊँचाई की एक मीनार है। पहाड़ के शिखर M पर बैठा आदमी मीनार TR से b दूरी पर स्थित तालाब को मीनार के ठीक ऊपर से देख सकता है। माना $\angle MPN = \angle TPR = \theta$, पहाड़ के आधार A से आदमी M की दूरी $= c$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔMNA में,

$\sin\alpha = \dfrac{MN}{MA}$

या $\sin\alpha = \dfrac{MN}{c}$

या $MN = c\sin\alpha$ .....(1)



पुनः समकोण ΔMNA में,

$\cos\alpha = \dfrac{AN}{MA}$

या $\cos\alpha = \dfrac{AN}{c}$

या $AN = c\cos\alpha$ .....(2)

समकोण ΔTRP में,

$\tan\theta = \frac{TR}{PR} \Rightarrow \tan\theta = \frac{h}{b}$ .....(3)

समकोण ΔMNP में,

$\tan\theta = \frac{MN}{PN}$

या $\tan\theta = \frac{MN}{PR + RA + AN}$ $[PN = PR + RA + AN]$

या $\tan\theta = \frac{c\sin\alpha}{b + a + c\cos\alpha}$ .....(4)

समीकरण (3) व (4) से,

$\frac{h}{b} = \frac{c\sin\alpha}{b + a + c\cos\alpha}$

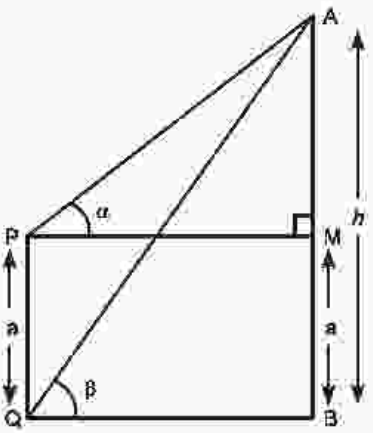
या $h = \frac{bc\sin\alpha}{a + b + c\cos\alpha}$ इति सिद्धम्

29. दीवार पर खड़ा एक व्यक्ति देखता है कि एक बिजली के खम्भे के शिखर का उन्नयन कोण α है। दीवार के नीचे से उसी खम्भे के शिखर का उन्नयन कोण β है। यदि दीवार की ऊँचाई a है, तो सिद्ध कीजिए कि खम्भे की ऊँचाई $\frac{a\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$ होगी।

हल– माना चित्र में $AB = h$ ऊँचाई का एक खम्भा है। $PQ = a$ ऊँचाई की दीवार है। बिन्दु P पर खम्भे के शिखर का उन्नयन कोण $\angle APM = \alpha$ तथा दीवार के नीचे का उन्नयन कोण $\angle AQB = \beta$ है। PM, भुजा AB पर लम्ब है।

अत: $MB = PQ = a$ तथा $PM = QB$

$AM = AB - MB = h - a$



∴समकोण ΔAMP में,

$\tan\alpha = \frac{AM}{PM}$

या $\tan\alpha = \frac{h - a}{PM}$

या $PM = \frac{h - a}{\tan\alpha}$ .....(1)

तथा समकोण ΔABQ में,

$\tan\beta = \frac{AB}{QB}$

या $\tan\beta = \frac{h}{PM}$

या $PM = \frac{h}{\tan\beta}$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$\frac{h - a}{\tan\alpha} = \frac{h}{\tan\beta}$

$$\text{या } \frac{h}{\tan\alpha}-\frac{a}{\tan\alpha}=\frac{h}{\tan\beta}$$

$$\text{या } \frac{h}{\tan\alpha}-\frac{h}{\tan\beta}=\frac{a}{\tan\alpha}$$

$$\text{या } h\left(\frac{1}{\tan\alpha}-\frac{1}{\tan\beta}\right)=\frac{a}{\tan\alpha}$$

$$\text{या } h\left(\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}-\frac{1}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}\right)=\frac{a}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\text{या } h\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)=\frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\text{या } h\left(\frac{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right)=\frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\text{या } h\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

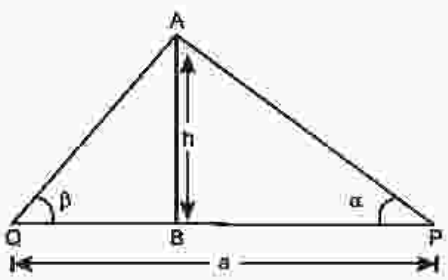
$$\text{या } h=\frac{a\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\text{या } h=\frac{a\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

इति सिद्धम्

30. दो बिन्दु जिनके बीच की दूरी a है एक मीनार के ठीक पूर्व की ओर तथा दूसरा पश्चिम की ओर है। यदि इन बिन्दुओं से मीनार के उन्नयन कोण α और β हैं, तो सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\frac{a}{\cot\alpha+\cot\beta}=\frac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha}=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ होगी।

हल– माना AB एक मीनार है, जिसकी ऊँचाई h है। मीनार के पूर्व में बिन्दु P तथा पश्चिम में बिन्दु Q हैं, जहाँ $PQ=a$ बिन्दु P व Q पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः $\angle APB=\alpha$ तथा $\angle AQB=\beta$ हैं।



∴समकोण ΔABP में,

$$\tan\alpha=\frac{AB}{PB}$$

$$\text{या } \tan\alpha=\frac{h}{PB}$$

$$\text{या } PB=\frac{h}{\tan\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

तथा समकोण ΔABQ में,

$$\tan\beta=\frac{AB}{QB}$$

$$\text{या } \tan\beta=\frac{h}{QB}$$

या $QB = \dfrac{h}{\tan\beta}$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोडने पर

$PB + QB = \dfrac{h}{\tan\alpha} + \dfrac{h}{\tan\beta}$

या $PQ = h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\beta}\right)$ $[\because PB + QB = PQ]$

$a = h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\beta}\right)$

$h = \dfrac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta + \tan\alpha}$

पुन: $a = h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\beta}\right)$

या $a = h(\cot\alpha + \cot\beta)$

या $h = \dfrac{a}{\cot\alpha + \cot\beta}$

या $h = \dfrac{a}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}$

या $h = \dfrac{a}{\dfrac{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}$

या $h = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$

या $h = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

अत: मीनार की ऊँचाई $= \dfrac{a}{\cot\alpha + \cot\beta} = \dfrac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta + \tan\alpha} = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ इति सिद्धम्

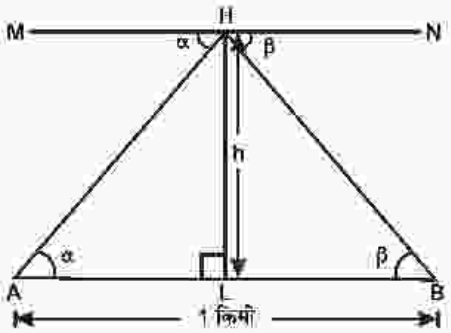
31. किसी क्षण एक सीधी सड़क के ऊपर कुछ ऊँचाई पर उड़ रहे एक हेलीकॉप्टर से सड़क के किनारे लगे दो क्रमागत किलोमीटर के पत्थरों के अवनमन कोण α और β हैं सिद्ध कीजिए हेलीकॉप्टर की ऊँचाई $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ किमी है।

हल– माना चित्र में A व B एक सीधी सड़क पर दो क्रमागत किलोमीटर के पत्थर हैं। सड़क के ऊपर h किमी ऊँचाई पर किसी क्षण हेलीकॉप्टर H बिन्दु पर स्थित है। बिन्दु H से पत्थर A व B के अवनमन कोण क्रमश: $\angle MHA = \alpha$ तथा $\angle NHB = \beta$ हैं, $HL = h$ किमी

चित्रानुसार,

$\angle HAL = \angle MHA = \alpha$

तथा $\angle HBL = \angle NHB = \beta$



$\therefore$ समकोण ΔHLA में,

$\tan\alpha = \frac{HL}{AL}$

या $\tan\alpha = \frac{h}{AL}$

या $AL = \frac{h}{\tan\alpha}$ .....(1)

तथा समकोण ΔHLB में,

$\tan\beta = \frac{HL}{LB}$

या $\tan\beta = \frac{h}{LB}$

या $LB = \frac{h}{\tan\beta}$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$AL + LB = \frac{h}{\tan\alpha} + \frac{h}{\tan\beta}$ $[\because AL + LB = AB]$

या $AB = h\left(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}\right)$

या $1 = h(\cot\alpha + \cot\beta)$

या $1 = h\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)$

या $1 = h\left(\frac{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}\right)$

या $1 = h\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

या $h = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

इति सिद्धम्

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट–बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 188 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-5 ज्यामिति (Geometry)

11

वृत्त (Circle)

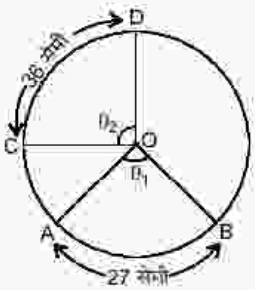
अभ्यास 11.1

1. एक वृत्त के दो चाप खंडों की लम्बाइयाँ क्रमशः 27 सेमी और 36 सेमी हैं। चाप खंडों द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोणों के मापों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– हम जानते है कि—

किसी वृत्त में चाप खंड द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण चाप खंड की लम्बाई के अनुक्रमानुपाती होता है।

चित्र मे चाप AB व CD द्वारा अंतरित कोण क्रमशः θ_1 व θ_2 हैं।



$$\theta_1 \propto \overset{\frown}{AB} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = k\,\overset{\frown}{AB}$$

(k अनुक्रमानुपाती नियतांक है)

या $\theta_1 = k \times 27$ ...(1)

तथा $\theta_2 \propto \overset{\frown}{CD}$ या $\theta_2 = k\,\overset{\frown}{CD}$

या $\theta_2 = k \times 36$ ...(2)

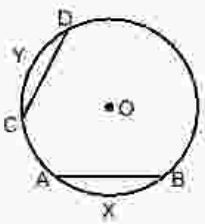
अतः $$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{k \times 27}{k \times 36} = \frac{3}{4}$$

$$\theta_1 : \theta_2 = 3 : 4$$ **उत्तर**

2. एक वृत्त का चाप AXB, चाप CYD के बराबर है, तो जीवा AB और CD की लम्बाइयों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– हम जानते हैं कि—

किसी वृत्त में समान लम्बाई के चाप वृत्त पर समान जीवाएँ अंतरित करते है।



दिया है : $\overset{\frown}{AXB} = \overset{\frown}{CYD}$

अतः जीवा AB = जीवा CD

या $\frac{\text{जीवा } AB}{\text{जीवा } CD} = \frac{1}{1}$

अतः $AB : CD = 1 : 1$ उत्तर

3. संलग्न आकृति में, AD और BC वृत्त के दो व्यास हैं। चाप AC और चाप BD की लम्बाइयों में क्या अन्तर है?

हल– दिया है— AD व BC वृत्त के दो व्यास हैं।

अतः $AD = BC$ या $\overset{\frown}{ACD} = \overset{\frown}{BDC}$

दोनों पक्षों में से $\overset{\frown}{CD}$ घटाने पर—

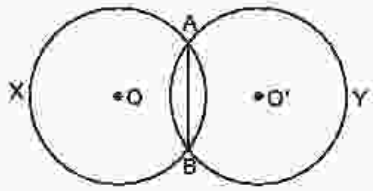
$$\overset{\frown}{ACD} - \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BDC} - \overset{\frown}{CD}$$

या $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ या चाप AC = चाप BD

या चाप AC − चाप $BD = 0$ उत्तर

4. दो बराबर वृत्त AXB और AYB एक-दूसरे को बिन्दुओं A और B पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि—

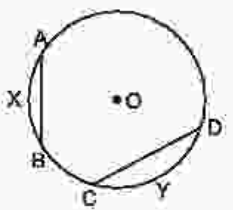
चाप AXB = चाप AYB



हल– दिया है—दो सर्वांगसम वृत्त AXB व AYB जिनके केन्द्र क्रमशः O व O' हैं।
हम जानते हैं कि सर्वांगसम वृत्तों की समान जीवाएँ समान चाप अंतरित करती है।
यहाँ जीवा AB उभयनिष्ठ है।

अतः चाप AXB = चाप AYX इति सिद्धम्

5. एक वृत्त का चाप AXB, चाप CYD का दो-तिहाई है, तो सिद्ध कीजिए कि जीवा AB और CD की लम्बाइयों का अनुपात 2 : 3 है।



हल– दिया है—वृत्त जिसका केन्द्र O है में चाप $AXB = \frac{2}{3}$ चाप CYD

या जीवा $AB = \frac{2}{3}$ जीवा CD

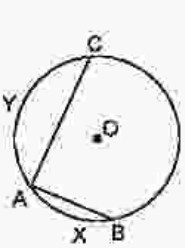
या $\frac{\text{जीवा } AB}{\text{जीवा } CD} = \frac{2}{3}$

या जीवा AB : जीवा $CD = 2 : 3$ इति सिद्धम्

6. एक वृत्त का चाप AXB, चाप CYD के बराबर है तो जीवा AB और CD की लम्बाइयों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– इसके लिए प्रश्न नं० 2 का हल देखिए।

7. संलग्न चित्र में एक वृत्त का केन्द्र O है। इसके दो चाप AXB और CYA इस प्रकार हैं कि चाप $AXB = \frac{1}{2}$ चाप CYA है। जीवा AB और जीवा AC की लम्बाइयों में अनुपात ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है— केन्द्र O वाले वृत्त में

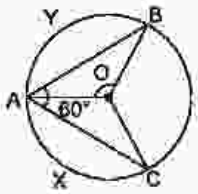
$$\text{चाप } AXB = \frac{1}{2} \text{ चाप } CYA$$

या $$\text{जीवा } AB = \frac{1}{2} \text{ जीवा } AC$$

या $$\frac{\text{जीवा } AB}{\text{जीवा } AC} = \frac{1}{2}$$

या $$\text{जीवा } AB : \text{जीवा } AC = 1:2$$ उत्तर

8. चित्र में, वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर है। यदि $\angle BAC = 60°$ हो, तो चाप AXC का अंश माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र में,

दिया है— $\angle BAC = 60°$

तथा जीवा AB = जीवा AC

हम जानते हैं किसी वृत्त में समान जीवाएँ केन्द्र पर समान कोण अंतरित करती हैं।

अत: $\angle AOC = \angle AOB$

$\angle BOC = 2\angle BAC$ [∵ केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त पर अंतरित कोण का दो गुना होता है]

$= 2 \times 60° = 120°$

$\angle AOC + \angle AOB + \angle BOC = 360°$

या $\angle AOC + \angle AOC + 120° = 360°$

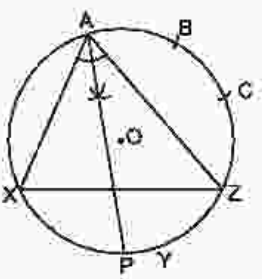
या $2\angle AOC = 360° - 120° = 240°$

या $\angle AOC = \frac{240°}{2} = 120°$

अत: चाप AXC का अंश माप = **120°** है। उत्तर

9. सिद्ध कीजिए कि एक ही चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग पर बने कोण की अर्द्धक रेखाएँ चाप के एक निश्चित बिन्दु से होकर जाती है।

हल– ज्ञात है—एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। वृत्त का एक चाप XYZ है तथा शेष भाग पर अनेक बिन्दु A, B, C आदि हैं।



सिद्ध करना है—चाप XYZ द्वारा बिन्दुओं A, B, C आदि पर बने कोणों की अर्द्ध रेखाएँ एक निश्चित बिन्दु से होकर जाती है।

रचना—XA तथा ZA को मिलाया तथा $\angle XAZ$ का अर्द्धक किया। अर्द्धक रेखा चाप XYZ के बिन्दु P से होकर जाती है।

उपपत्ति—रेखा AP, $\angle XAZ$ का अर्द्धक है।

अत: $\angle XAP = \angle ZAP$

तब चाप XP = चाप ZP

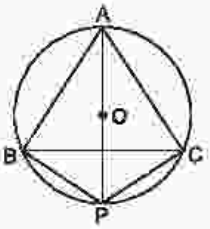
∴ बिन्दु P चाप XYZ का मध्य बिन्दु है।

अर्थात् चाप XYZ द्वारा बिन्दु A पर बने कोण की अर्द्धक रेखा चाप XYZ के मध्य बिन्दु से होकर जाती है।

इसी प्रकार, सिद्ध किया जा सकता है कि चाप XYZ के द्वारा बिन्दुओं B, C आदि पर बने कोणों की अर्द्धक रेखाएँ चाप XYZ के मध्य बिन्दु P से होकर जाती हैं। इति सिद्धम्

10. समबाहु त्रिभुज ABC के परिवृत्त में लघु चाप BC के मध्य कोई बिन्दु P लिया गया है। सिद्ध कीजिए कि रेखा खंड PA, $\angle BPC$ को अर्द्धित करता है।

हल– ज्ञात है—समबाहु ΔABC के परिवृत्त जिसका केन्द्र O है। लघु चाप BC का मध्य बिन्दु P है।



सिद्ध करना है—PA, $\angle BPC$ का अर्द्धक है

या $\angle BPA = \angle CPA$

उपपत्ति—समबाहु ΔABC में,

$$AB = AC = BC$$

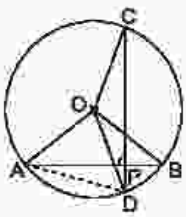
अर्थात् जीवा AB = जीवा AC

तब $\angle BPA = \angle CPA$

या PA, $\angle BPC$ का अर्द्धक है। इति सिद्धम्

11. यदि दो जीवाएँ वृत्त के अन्दर एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित करें, तो सिद्ध कीजिए कि उनके बीच का कोण उनके द्वारा काटे चापों से केन्द्र पर अंतरित कोणों के योग के आधे के बराबर होता है।

हल– ज्ञात है—केन्द्र O वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB व CD एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती हैं।



सिद्ध करना है— $\angle APC = \frac{1}{2}[\angle AOC + \angle DOB]$

रचना—केन्द्र O को बिन्दुओं A, B, C व D से मिलाया तथा A और D को मिलाया।

उपपत्ति—चूँकि ΔADP का एक बहिष्कोण APC है;

$\therefore$ $\angle APC = \angle ADP + \angle DAP$

या $\angle APC = \angle ADC + \angle DAB$

या $\angle APC = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle DOB$

या $\angle APC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle DOB)$ इति सिद्धम्

12. संलग्न चित्र में केन्द्र O वाले वृत के अन्तर्गत एक ΔABC खींचा गया है जिसके कोणों की अर्द्धक रेखाएँ वृत्त को क्रमशः बिन्दुओं X, Y और Z पर काटती हैं।

सिद्ध कीजिए कि ΔXYZ के $\angle X$, $\angle Y$ और $\angle Z$ क्रमशः $\frac{\angle B + \angle C}{2}$, $\frac{\angle C + \angle A}{2}$ और $\frac{\angle A + \angle B}{2}$ के बराबर हैं।

हल– दिए गए चित्रानुसार,

$\angle A$, $\angle B$ तथा $\angle C$ की अर्द्धक रेखाएँ क्रमशः AX, BY तथा CZ हैं।

ΔXYZ में,

$$\angle X = \angle ZXY = \angle ZXA + \angle YXA \quad \ldots(1)$$

परन्तु $\angle ZXA = \angle ZCA = \frac{\angle C}{2}$ [∵चाप AZ के कोण]

तथा $\angle YXA = \angle YBA = \frac{\angle B}{2}$ [∵चाप YA के कोण]

$\angle ZXA$ तथा $\angle YXA$ के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\angle X = \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle C + \angle B}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2}$$

इसी प्रकार,

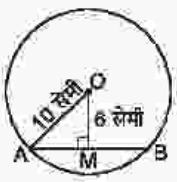
$$\angle Y = \angle XYZ = \angle XYB + \angle ZYB = \angle XAB + \angle ZCB$$
$$= \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2}$$
$$= \frac{\angle A + \angle C}{2} = \frac{\angle C + \angle A}{2}$$

तथा $$\angle Z = \angle YZX = \angle YZC + \angle XZC$$
$$= \angle YBC + \angle XAC$$
$$= \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle A$$
$$= \frac{\angle B + \angle A}{2} = \frac{\angle A + \angle B}{2}$$

इति सिद्धम्

अभ्यास 11.2

1. संलग्न चित्र में एक वृत्त है, जिसका केन्द्र O है। त्रिज्या $OA = 10$ सेमी और जीवा AB पर डाला गया लम्ब $OM = 6$ सेमी है, तो AB का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र में, $OA = 10$ सेमी, $OM = 6$ सेमी

तथा जीवा AB पर केन्द्र O से डाला गया लम्ब OM है।

अतः $$AM = BM$$

$$AB = AM + BM = AM + AM = 2AM$$

समकोण ΔOMA में,

$$OA^2 = OM^2 + AM^2 \quad \text{या} \quad AM^2 = OA^2 - OM^2$$

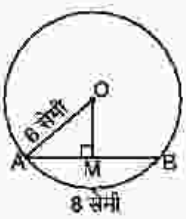
या $$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2}$$
$$= \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी}$$
$$AB = 2AM = 2 \times 8 = 16 \text{ सेमी}$$

उत्तर

2. एक वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है। उसकी एक जीवा $AB = 8$ सेमी हो, तो केन्द्र से उस जीवा की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है —6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त, जिसकी जीवा $AB = 8$ सेमी

वृत्त केन्द्र O से AB पर लम्ब OM डाला।



अतः $$AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ सेमी}$$

केन्द्र से जीवा की दूरी $= OM$

समकोण ΔOMA में

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

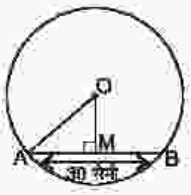
या $$OM^2 = OA^2 - AM^2$$

या $$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{6^2 - 4^2}$$

$$= \sqrt{36-16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ सेमी}$$ उत्तर

3. एक वृत्त में जिसका केन्द्र O तथा व्यास 34 सेमी, की एक जीवा $AB = 30$ सेमी है। जीवा AB की केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा व्यास $= 34$ सेमी



अत: वृत्त की त्रिज्या $= \frac{34}{2} = 17$ सेमी

वृत्त की जीवा $AB = 30$ सेमी

चित्र से, OM जीवा AB पर लम्ब है।

अत: $$AM = \frac{AB}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ सेमी}$$

तथा वृत्त की त्रिज्या $OA = 17$ सेमी

वृत्त के केन्द्र O से जीवा AB की दूरी $= OM$

समकोण ΔOMA में,

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

या $$OM^2 = OA^2 - AM^2$$

या $$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{17^2 - 15^2}$$

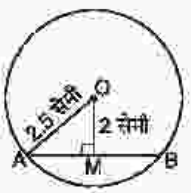
$$OM = \sqrt{289-225} = \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी}$$

अत: दिए गए वृत्त के केन्द्र से दी गई जीवा की दूरी $= 8$ सेमी उत्तर

4. किसी वृत्त की त्रिज्या 2.5 सेमी और उसके केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लम्ब 2 सेमी है। उस जीवा की माप की गणना कीजिए।

हल– माना चित्र में, वृत्त की त्रिज्या $OA = 2.5$ सेमी

जीवा AB पर केन्द्र से डाले गए लम्ब की माप $OM = 2$ सेमी



$\therefore$ समकोण ΔOMA में

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

या $$AM^2 = OA^2 - OM^2$$

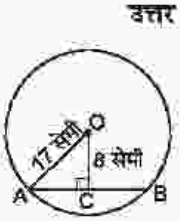
या $$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{(2.5)^2 - 2^2}$$

$$= \sqrt{6.25-4} = \sqrt{2.25} = 1.5 \text{ सेमी}$$

जीवा AB की माप $= 2AM = 2 \times 1.5 = 3.0$ सेमी उत्तर

5. संलग्न चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। वृत्त की त्रिज्या 17 सेमी है। यदि $OC = 8$ सेमी है, तो जीवा AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिए गए चित्रानुसार,



समकोण ΔOAC में,

$$OA^2 = OC^2 + AC^2$$

या $AC^2 = OA^2 - OC^2$

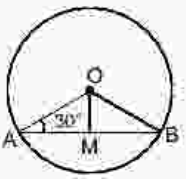
या $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2}$ या $AC = \sqrt{17^2 - 8^2}$

या $AC = \sqrt{289 - 64}$ या $AC = \sqrt{225}$

या $AC = 15$ सेमी

अतः $AB = 2AC = 2 \times 15 = \mathbf{30}$ **सेमी** **उत्तर**

6. संलग्न चित्र में वृत्त का केन्द्र O और AB उसकी एक जीवा है, जिसका मध्य बिन्दु M है। यदि $\angle A = 30°$ हो, तो $\angle O$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

बिन्दु M, जीवा AB का मध्य बिन्दु है।

अतः $OM \perp AB$ (जीवा के मध्य बिन्दु और केन्द्र को मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है)

$\angle OMA = \angle OMB = 90°$

$\angle AOM = 180° - (\angle OAM + \angle OMA)$

$= 180° - (30° + 90°)$

$= 180° - 120° = 60°$

ΔOMA तथा ΔOMB में

$AM = BM$ (दिया है)

$\angle OMA = \angle OMB = 90°$

भुजा OM उभयनिष्ठ है।

अतः $\Delta OMA \cong \Delta OMB$

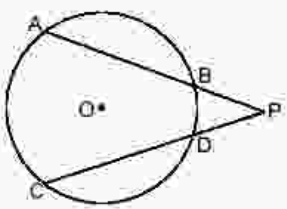
अतः $\angle BOM = \angle AOM = 60°$

$\angle O = \angle BOM + \angle AOM$

$= 60° + 60° = \mathbf{120°}$ **उत्तर**

7. एक वृत्त $ABCD$ का केन्द्र O है। वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB व CD वृत्त के बाहर बिन्दु P पर मिलती हैं। सिद्ध कीजिए—

$$\boldsymbol{PB = PD}$$

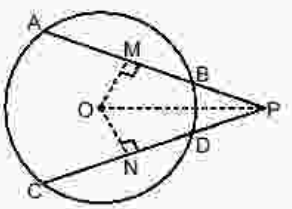


हल– दिए गए चित्र में केन्द्र O से जीवा AB व CD पर लम्ब क्रमशः OM व ON डाले। OP को मिलाया।

दिया है— जीवा AB = जीवा CD

या $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

या $MB = ND$



ΔPOM व ΔPON में,

$OM = ON$ (∵ वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती है)

$\angle OMP = \angle ONP = 90°$

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ $\Delta POM \cong \Delta PON$ (S.A.S. सर्वांगसमता)

अतः $MP = NP$

या $MB + PB = ND + PD$

या $ND + PB = ND + PD$

या $PB = PD$ इति सिद्धम्

8. किन्हीं दो वृत्तों के व्यासों का अनुपात 4 : 9 है। इन वृत्तों की परिधियों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

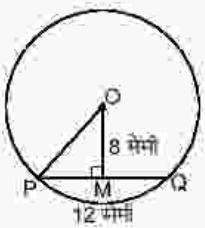
हल– माना दो वृत्तों के व्यास क्रमशः d_1 व d_2 हैं।

अतः प्रश्नानुसार, $d_1 : d_2 = 4 : 9$

वृत्तों की परिधियाँ $= \pi d_1$ व πd_2 होंगी।

$\therefore$ वृत्तों की परिधियों में अनुपात $= \frac{\pi d_1}{\pi d_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{4}{9} = 4 : 9$ **उत्तर**

9. संलग्न चित्र में, एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। जीवा PQ की लम्बाई 12 सेमी है तथा जीवा केन्द्र से 8 सेमी दूर है। वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)



हल– प्रश्नानुसार, जीवा $PQ = 12$ सेमी

अतः $PM = \frac{12}{2} = 6$ सेमी

समकोण ΔOMP में, $OP = \sqrt{PM^2 + OM^2}$

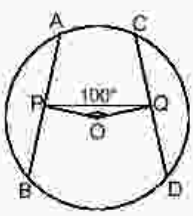
या $OP = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ सेमी

अतः वृत्त की त्रिज्या $(r) = OP = 10$ सेमी

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = 3.14 \times (10)^2$

$= 3.14 \times 100 = 314$ **वर्ग सेमी** **उत्तर**

10. संलग्न चित्र में, वृत्त का केन्द्र O है, जिसकी दो समान जीवाएँ AB व CD हैं। केन्द्र O से दोनों जीवाओं पर डाले गए लम्ब क्रमशः OP व OQ हैं तथा $\angle POQ = 100°$ है, तो $\angle APQ$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

जीवा $AB =$ जीवा CD

$OP \perp AB$

$\therefore$ $\angle APO = 90°$

तथा $OQ \perp CD$

$\angle CQO = 90°$

तथा $OP = OQ$ (वृत्त की समान जीवाओं की केन्द्र से दूरी समान होती है)

ΔOPQ में

$\angle OPQ = \angle OQP$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

$\angle OPQ + \angle OQP + \angle POQ = 180°$

$$\angle OPQ + \angle OPQ + 100^\circ = 180^\circ$$

या $$2\angle OPQ + 100^\circ = 180^\circ$$

या $$2\angle OPQ = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

या $$\angle OPQ = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

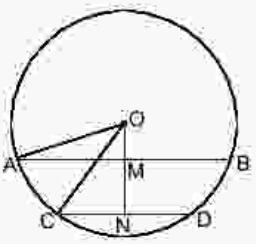
परन्तु $$\angle OPQ + \angle APQ = \angle APO$$

या $$\angle 40^\circ + \angle APQ = 90^\circ$$

या $$\angle APQ = 90^\circ - 40^\circ$$

या $$\angle APQ = \mathbf{50^\circ}$$ **उत्तर**

11. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त में जो जीवा केन्द्र के निकट होती है, वह दूर वाली जीवा से बड़ी होती है।



हल– ज्ञात है—AB व CD वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं $AB > CD$। उनकी वृत्त के केन्द्र O से दूरियाँ क्रमशः OM और ON हैं।

सिद्ध करना है—$OM < ON$

रचना—रेखाखंड OA तथा OC खींचिए।

उपपत्ति—वृत्त के केन्द्र O से जीवाओं AB व CD की दूरियाँ क्रमशः OM तथा ON हैं।

$\therefore$ OM तथा ON क्रमशः जीवा AB व CD के लम्बार्द्धक हैं।

अतः $$\angle OMA = \angle ONC = 90^\circ$$

तथा $$AM = \frac{1}{2}AB \quad \text{तथा} \quad CN = \frac{1}{2}CD$$

ΔOMA व ΔONC दोनों समकोणीय हैं।

$\therefore$ समकोण ΔOMA में,

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

या $$OA^2 = OM^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$$

या $$OA^2 = OM^2 + \frac{AB^2}{4}$$

या $$4OA^2 = 4OM^2 + AB^2 \quad \ldots(1)$$

तथा समकोण ΔONC में,

$$OC^2 = ON^2 + CN^2$$

$$= ON^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = ON^2 + \frac{CD^2}{4}$$

या $$4OC^2 = 4ON^2 + CD^2 \quad \ldots(2)$$

$$OA = OC \qquad \text{(वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

या $$OA^2 = OC^2 \quad \text{या} \quad 4OA^2 = 4OC^2$$

या $$4OM^2 + AB^2 = 4ON^2 + CD^2$$

$$AB^2 - CD^2 = 4ON^2 - 4OM^2$$

या $$AB^2 - CD^2 = 4(ON^2 - OM^2)$$

दोनों पक्षों के परिणाम धनात्मक हैं, अत:

$$AB > CD$$

तब $$ON > OM$$

या $$OM < ON$$ **इति सिद्धम्**

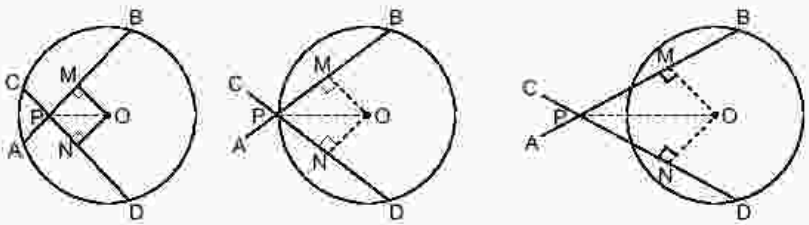
12. यदि वृत्त की दो बराबर जीवाएँ वृत्त के भीतर, वृत्त पर या वृत्त के बाहर प्रतिच्छेदित करती हैं तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेद-बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं के बीच के कोण को अर्द्धित करती है।

हल– ज्ञात है—केन्द्र O के वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB और CD जो बिन्दु P पर वृत्त के भीतर, वृत्त पर अथवा वृत्त के बाहर प्रतिच्छेदित करती हैं।

सिद्ध करना है—रेखाखंड OP $\angle BPD$ को अर्द्धित करता है। अर्थात्

$$\angle BPO = \angle DPO$$

रचना—केन्द्र O से AB और CD पर क्रमश: OM और ON लम्ब डाले।



उपपत्ति— जीवा AB = जीवा CD

$\therefore$ $$OM = ON$$ (वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं)

अब, ΔOPM और ΔOPN में,

$$OM = ON$$

$$\angle OMP = \angle ONP$$ (प्रत्येक समकोण है)

$$OP = OP$$ (उभयनिष्ठ है)

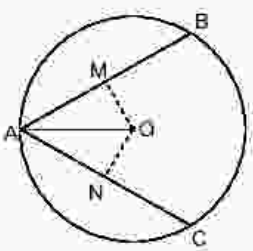
$\therefore$ $$\Delta OPM \cong \Delta OPN$$ (S.A.S सर्वांगसमता)

अत: $$\angle MPO = \angle NPO$$

या $$\angle BPO = \angle DPO$$ **इति सिद्धम्**

13. किसी वृत्त की दो समान जीवाएँ AB व AC हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC$ का अर्द्धक केन्द्र से होकर जाएगा।

हल– ज्ञात है—केन्द्र O के वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB और AC हैं।



सिद्ध करना है—$\angle BAC$ का अर्द्धक AO है।

अर्थात् $$\angle BAO = \angle CAO$$

रचना—केन्द्र O से जीवा AB और AC पर क्रमश: OM और ON लम्ब डाले।

उपपत्ति—ΔOMA और ΔONA में

$\angle OMA = \angle ONA$ (प्रत्येक समकोण है)

$OM = ON$ (बराबर जीवाओं पर केन्द्र से लम्ब)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ है)

$\therefore \quad \Delta OMA = \Delta ONA$ (S.A.S. सर्वांगसमता)

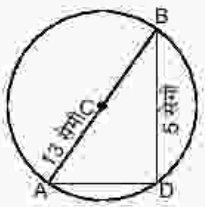
अतः $\angle MAO = \angle NAO$

या $\angle BAO = \angle CAO$

अर्थात् $\angle BAC$ का अर्द्धक AO है जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है। **इति सिद्धम्**

अभ्यास 11.3

1. संलग्न चित्र में, C वृत्त का केन्द्र है। $AB = 13$ सेमी और $BD = 5$ सेमी है, तो AD की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र से स्पष्ट है कि $\angle D$ अर्द्धवृत्त में स्थित कोण है।

अतः $\angle D = 90°$ अर्थात् ΔABD एक समकोण त्रिभुज है।

जिसमे कर्ण $AB = 13$ सेमी,

लम्ब $BD = 5$ सेमी, $AD = ?$

$\therefore$ समकोण ΔABD में, पाइथागोरस प्रमेय से

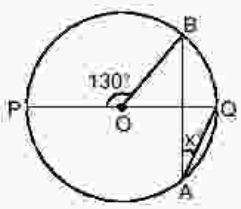
$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad \text{या} \quad AD^2 = AB^2 - BD^2$$

या $$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$$

$$= \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$$

$$= \sqrt{144} = 12 \text{ सेमी}$$ **उत्तर**

2. संलग्न चित्र में, बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है और $\angle BOP = 130°$ है, तो x का अंशमाप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

$\angle POB = 130°$

तथा $\angle POB + \angle BOQ = 180°$

या $130° + \angle BOQ = 180°$

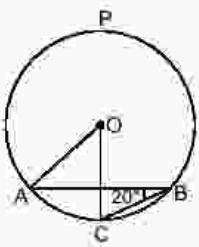
या $\angle BOQ = 180° - 130° = 50°$

$\angle BOQ$ तथा $\angle BAQ$ क्रमशः एक चाप द्वारा केन्द्र और वृत्त पर स्थित कोण हैं। अतः

$\angle BOQ = 2\angle BAQ$ या $\angle BOQ = 2x$

या $$x = \frac{\angle BOQ}{2} = \frac{50°}{2} = 25°$$ **उत्तर**

3. संलग्न चित्र में, O वृत्त $APBC$ का केन्द्र है। यदि $\angle ABC = 20°$ हो, तो $\angle AOC$ की माप ज्ञात कीजिए।



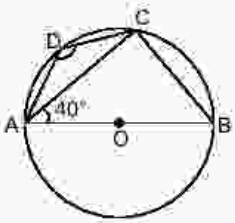
हल– दिए गए चित्रानुसार,

$\angle AOC$ तथा $\angle ABC$ एक ही चाप द्वारा क्रमशः केन्द्र और वृत्त पर अंतरित कोण हैं।

अतः $\angle AOC = 2\angle ABC$

या $\angle AOC = 2 \times 20^\circ = \mathbf{40^\circ}$ **उत्तर**

4. $ABCD$ एक चतुर्भुज है, जिसके सभी शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हैं और भुजा AB, वृत्त के केन्द्र O से होकर जाती है। यदि $\angle CAB = 40^\circ$ हो, तो $\angle CDA$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

$\angle ACB$ अर्द्धवृत्त में स्थित कोण है।

अतः $\angle ACB = 90^\circ$

अब $\triangle ABC$ में,

$\angle ACB + \angle ABC + \angle CAB = 180^\circ$

या $90^\circ + \angle ABC + 40^\circ = 180^\circ$

या $\angle ABC + 130^\circ = 180^\circ$

या $\angle ABC = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

चूँकि चतुर्भुज $ABCD$ के सभी शीर्ष वृत्त पर स्थित है।

अतः चतुर्भुज $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\angle CDA + \angle ABC = 180^\circ$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

या $\angle CDA + 50^\circ = 180^\circ$

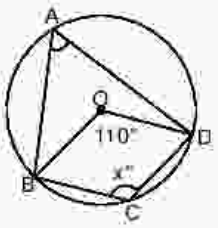
या $\angle CDA = 180^\circ - 50^\circ$

या $\angle CDA = \mathbf{130^\circ}$ **उत्तर**

5. संलग्न चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। कोण x का अंशमाप ज्ञात कीजिए।

हल– दिए गए चित्रानुसार,

$\angle BOD$ और $\angle BAD$ एक ही चाप द्वारा केन्द्र और वृत्त पर अंतरित कोण हैं।



अतः $\angle BOD = 2\angle BAD$

या $\angle BAD = \dfrac{\angle BOD}{2} = \dfrac{110^\circ}{2} = 55^\circ$

अब, $\angle BAD$ और $\angle BCD$ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण हैं।

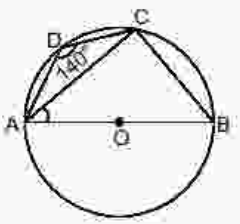
$\therefore \quad \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

या $55^\circ + x = 180^\circ$

या $x = 180^\circ - 55^\circ$

या $x = \mathbf{125^\circ}$ **उत्तर**

6. संलग्न चित्र में, $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसकी भुजा AB शीर्ष A, B, C तथा D से होकर जाने वाले वृत्त का व्यास है। यदि $\angle ADC = 140^\circ$ हो, तो $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार, $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore \quad \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$

या $140^\circ + \angle ABC = 180^\circ$

या $\angle ABC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

तथा $\angle ACB$ अर्द्धवृत्त में स्थित है।

$\therefore \quad \angle ACB = 90°$

अब ΔABC में,

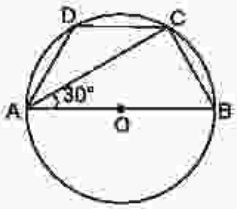
$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180°$

या $\angle BAC + 90° + 40° = 180°$

या $\angle BAC + 130° = 180$

या $\angle BAC = 180° - 130° = 50°$ उत्तर

7. संलग्न चित्र में, वृत्त का केन्द्र O है। यदि $\angle BAC = 30°$ हो, तो $\angle ADC$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार, $\angle ACB$ अर्द्धवृत्त में स्थित कोण है।

$\therefore \quad \angle ACB = 90°$

ΔABC में,

$\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180°$

या $90° + 30° + \angle ABC = 180°$

या $120° + \angle ABC = 180°$

या $\angle ABC = 180° - 120° = 60°$

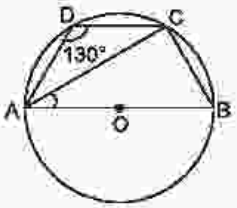
चतुर्भुज $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore \quad \angle ADC + \angle ABC = 180°$

या $\angle ADC + 60° = 180°$

या $\angle ADC = 180° - 60° = \mathbf{120°}$ उत्तर

8. संलग्न चित्र में, बिन्दुओं A, B, C और D से होकर जाने वाले वृत्त का केन्द्र O है। यदि $\angle ADC = 130°$ है, तो $\angle BAC$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

चतुर्भुज $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। जिसका $\angle ADC = 130°$

$\therefore \quad \angle ADC + \angle ABC = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

या $130° + \angle ABC = 180°$

या $\angle ABC = 180° - 130° = 50°$

$\because \angle ACB$ अर्द्धवृत्त में स्थित है।

$\therefore \quad \angle ACB = 90°$

ΔABC में,

$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180°$

या $\angle BAC + 90° + 50° = 180°$

या $\angle BAC + 140° = 180°$

या $\angle BAC = 180° - 140° = 40°$ उत्तर

9. $ABCD$ का एक समलम्ब चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें AD समान्तर BC है। यदि $\angle B = 75°$ हो, तो अन्य कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

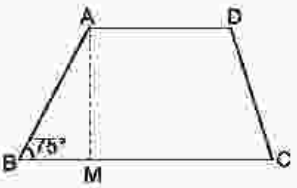
हल– दिया है—$ABCD$ एक समलम्ब चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें, $AD \parallel BC$ तथा $\angle B = 75°$

$\therefore \quad \angle B + \angle D = 180^\circ$

या $\quad 75^\circ + \angle D = 180^\circ$

या $\quad \angle D = 180^\circ - 75^\circ$

$= 105^\circ$



शीर्ष A से भुजा BC पर AM लम्ब डाला।

$\therefore \quad \angle AMB = 90^\circ$

$\triangle ABM$ में,

$\angle ABM + \angle AMB + \angle BAM = 180^\circ$

या $\quad 75^\circ + 90^\circ + \angle BAM = 180^\circ$

या $\quad 165^\circ + \angle BAM = 180^\circ$

या $\quad \angle BAM = 180^\circ - 165^\circ = 15^\circ$

$\angle MAD = \angle AMB = 90^\circ$ (एकान्तर कोण)

अत: $\quad \angle A = \angle BAM + \angle MAD$

$= 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$

अब $\quad \angle A + \angle C = 180^\circ$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

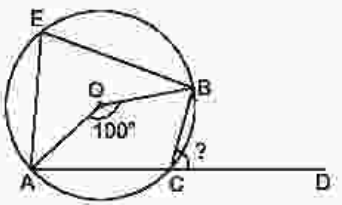
या $\quad 105^\circ + \angle C = 180^\circ$

या $\quad \angle C = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$

अत: दिए गए समलम्ब चक्रीय चतुर्भुज के कोण

$\angle A = 105^\circ$, $\angle C = 75^\circ$ तथा $\angle D = 105^\circ$ **उत्तर**

10. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है तथा $\angle AOB = 100^\circ$ हो, तो $\angle BCD$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र में, $\quad \angle AOB = 100^\circ$

$\because$ $\angle AOB$ तथा $\angle AEB$ एक ही चाप द्वारा क्रमश: केन्द्र और वृत्त पर अंतरित कोण हैं।

$\therefore \quad \angle AOB = 2\angle AEB$

या $\quad \angle AEB = \dfrac{\angle AOB}{2} = \dfrac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

$\angle AEB + \angle ACB = 180^\circ$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

या $\quad 50^\circ + \angle ACB = 180^\circ$

या $\quad \angle ACB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

$\angle ACB + \angle BCD = 180^\circ$

या $\quad 130^\circ + \angle BCD = 180^\circ$

या $\quad \angle BCD = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ **उत्तर**

11. किसी चक्रीय चतुर्भुज में दो सम्मुख कोण इस प्रकार से हैं कि एक कोण दूसरे कोण का तिगुना हो, तो बड़े कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल– माना चक्रीय चतुर्भुज के दो सम्मुख कोण A और B हैं।

तथा $\quad A > B$

प्रश्नानुसार, $\quad A = 3B$ ...(1)

परन्तु, चक्रीय चतुर्भुज के नियमानुसार,

$$A + B = 180^\circ$$

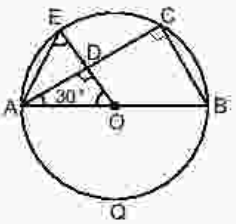
या $3B + B = 180^\circ$ (समीकरण (1) से)

या $4B = 180^\circ$

या $B = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$ (समीकरण (1) में रखने पर)

$A = 3 \times 45^\circ = 135^\circ$ **उत्तर**

12. दिए गए चित्र में, AOB वृत्त का एक व्यास है। वृत्त के केन्द्र O को जीवा AC के मध्य बिन्दु D से मिलाकर आगे बढ़ाया गया है जो वृत्त को बिन्दु E पर मिलाता है। यदि $\angle CAB = 30^\circ$ हो, तो $\angle AED$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र में, $\angle CAB = 30^\circ$

या $\angle DAO = 30^\circ$

$\angle ADO = 90^\circ$ ($\because$ बिन्दु D जीवा AC का मध्य बिन्दु है)

$\therefore \Delta ADO$ में,

$\angle DAO + \angle ADO + \angle AOD = 180^\circ$

या $30^\circ + 90^\circ + AOD = 180^\circ$

या $120^\circ + \angle AOD = 180^\circ$

या $\angle AOD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

या $\angle AOE = 60^\circ$

$OA = OE$ (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या है)

$\therefore$ $\angle AEO = \angle OAE$ (बराबर भुजा के सामने कोण)

ΔAEO में,

$\angle AEO + \angle OAE + \angle AOE = 180^\circ$

$\angle AEO + \angle AEO + 60^\circ = 180^\circ$

या $2\angle AEO = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

या $\angle AEO = \frac{120}{2} = 60^\circ$

या $AED = 60^\circ$ **उत्तर**

13. $PQRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। PR, वृत्त का व्यास है। यदि $PQ = 7$ सेमी, $QR = 6$ सेमी और $RS = 2$ सेमी है तो PS की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

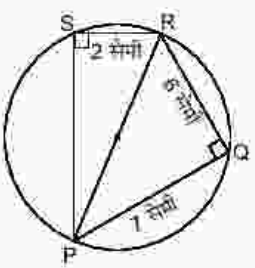
हल– प्रश्नानुसार, $PQRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। PR वृत्त का व्यास है।

भुजा $PQ = 7$ सेमी, $QR = 6$ सेमी तथा $RS = 2$ सेमी है।

$\because$ ΔPQR अर्द्धवृत्त में स्थित है।

$\therefore$ ΔPQR समकोणीय है।

अतः समकोण ΔPQR में, पाइथागोरस प्रमेय से,



$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$= 7^2 + 6^2 = 49 + 36$

$PR^2 = 85$

इसी प्रकार, ΔPSR भी अर्द्धवृत्त में स्थित है।

अतः ΔPSR समकोणीय है।

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PR^2 = RS^2 + PS^2 \quad \text{या} \quad 85 = 2^2 + PS^2$$

या $\quad 85 = 4 + PS^2 \quad$ या $\quad PS^2 = 85 - 4$

या $\quad PS^2 = 85 - 4 = 81$

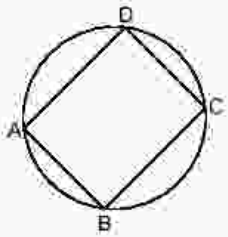
या $\quad PS = \sqrt{81} = 9$ सेमी **उत्तर**

14. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के अन्तर्गत खींचा गया समान्तर चतुर्भुज आयत होता है।

हल– ज्ञात है—$ABCD$ वृत्त के अन्तर्गत खींचा गया समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है—$ABCD$ एक आयत है।

अर्थात् $\quad \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$



उपपत्ति— $\because$ $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\because$ इसके सम्मुख कोण बराबर होंगे।

$$\angle A = \angle C \quad \ldots(1)$$

तथा $\quad \angle B = \angle D \quad \ldots(2)$

$\because$ $ABCD$ वृत्त के अन्तर्गत खींचा गया है।

$\because$ $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग $180°$ होता है।

अतः $\quad \angle A + \angle C = 180°$

या $\quad \angle A + \angle A = 180°$ (समीकरण (1) से)

या $\quad 2\angle A = 180°$

$\angle A = 90° = \angle C$

इसी प्रकार, $\quad \angle B + \angle D = 180°$

या $\quad \angle B + \angle B = 180°$ (समीकरण (2) से)

या $\quad 2\angle B = 180°$

या $\quad \angle B = 90° = \angle D$

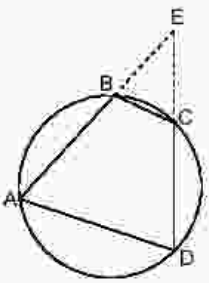
इस प्रकार, चतुर्भुज $ABCD$ में,

$$\angle A = \angle B = \angle C = D = 90°$$

अतः चतुर्भुज **$ABCD$ एक आयत** है। **इति सिद्धम्**

15. चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ की दो सम्मुख भुजाएँ AB और DC बढ़ाने पर एक-दूसरे को बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज EAD और त्रिभुज ECB समरूप हैं।

हल– ज्ञात है—$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसकी भुजाओं AB तथा DC को बढ़ाने पर वे परस्पर एक-दूसरे को बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती है।



सिद्ध करना है—ΔEAD और ΔECB समरूप है।

उपपत्ति—चूँकि $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है और इसकी भुजाओं AB तथा DC को आगे बढ़ाया गया है।

∴ बहिष्कोण $\angle EBC = \angle D$

तथा बहिष्कोण $\angle ECB = \angle A$

ΔEAD तथा ΔECB में,

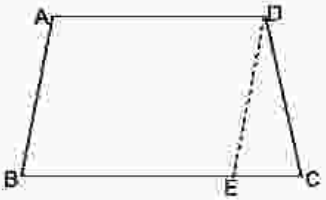
$\angle EBC = \angle D$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$\angle ECB = \angle A$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$\angle E = \angle E$ (उभयनिष्ठ कोण है)

अत: ΔEAD और ΔECB समकोणिक अर्थात् समरूप हैं। **इति सिद्धम्**

16. यदि किसी समलम्ब की दो असमान्तर भुजाएँ समान लम्बाई की हैं, तो सिद्ध कीजिए कि वह समलम्ब एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।



हल– ज्ञात है—समलम्ब $ABCD$ जिसमें

भुजा AB = भुजा DC

सिद्ध करना है—$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

रचना—भुजा AB के समान्तर रेखाखंड DE खींचा।

उपपत्ति—समान्तर चतुर्भुज $ABED$ में,

$\angle DAB = \angle DEB$ ...(1)

$AB = DC$ (ज्ञात है)

$AB = DE$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

अत: $DC = DE$

∴ ΔDCE एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

अत: $\angle DEC = \angle DCE$ ...(2)

अब, $\angle DEC + \angle DEB = 180°$

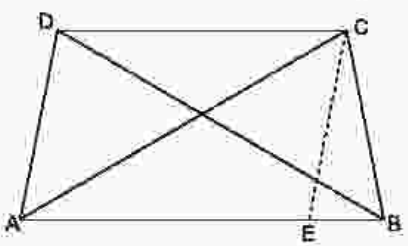
या $\angle DCE + \angle DAB = 180°$ (समीकरण (1) व (2) से)

अर्थात् चतुर्भुज $ABCD$ के दो सम्मुख कोणों का योग $180°$ है।

अत: चतुर्भुज **$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।** **इति सिद्धम्**

17. एक चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ की दो भुजाएँ AB और CD समान्तर हैं। सिद्ध कीजिए कि भुजाएँ AD और BC आपस में बराबर हैं और विकर्ण AC तथा BD भी बराबर हैं।

हल– ज्ञात है—$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें भुजाएँ AB और CD समान्तर हैं।



सिद्ध करना है—भुजा AD = भुजा BC

तथा विकर्ण AC = विकर्ण BD

रचना—भुजा AD के समान्तर रेखाखण्ड CE खींचा।

उपपत्ति—समान्तर चतुर्भुज $AECD$ में

$AD = CE$

तथा $\angle CDA = \angle AEC$ ...(1)

चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ में

$\angle CDA + \angle CBA = 180°$

या $\angle AEC + \angle CBA = 180°$ (समीकरण (1) से)

या $\angle AEC + \angle CBE = 180°$ ...(2)

अब, $\angle AEC + \angle CEB = 180°$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) से

$$\angle AEC + \angle CBE = \angle AEC + \angle CEB$$

$$\angle CBE = \angle CEB$$

अत: $CE = BC$

परन्तु $CE = AD$

अत: $\boldsymbol{AD = BC}$

अब, ΔACD और ΔBDC में,

$AD = BC$ (सिद्ध किया गया है)

$\angle DAC = \angle DBC$

(समान खंड बराबर कोण अंतरित करते हैं)

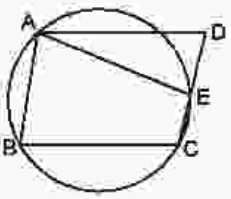
$DC = DC$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ $\Delta ACD \cong \Delta BDC$

अत: $\boldsymbol{AC = BD}$ इति सिद्धम्

18. *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है। शीर्षों *A, B* तथा *C* से जाने वाला वृत्त *CD* को बिन्दु *E* पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि—

$$\boldsymbol{AE = AD}$$



हल– ज्ञात है—$ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके शीर्ष A, B और C से होकर जाने वाला वृत्त भुजा CD को बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है— $AE = AD$

उपपत्ति—$\because$ $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $\angle B = \angle D$ ...(1)

(समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

$\because$ A, B व C से होकर जाने वाला वृत्त CD को बिन्दु E पर काटता है।

$\therefore$ $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

अत: बहिष्कोण $\angle AED = \angle B$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से

$$\angle AED = \angle D \quad (= \angle ADE)$$

ΔADE में,

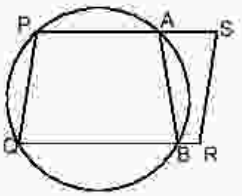
$$\angle AED = \angle ADE$$

अत: भुजा AD = भुजा AE

या $AD = AE$ इति सिद्धम्

19. एक समान्तर चतुर्भुज *PQRS* के शीर्ष *P* तथा *Q* से होकर एक वृत्त खींचा गया है, जो भुजा *PS* को बिन्दु *A* पर और भुजा *QR* को बिन्दु *B* पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि *ABRS* एक चक्रीय चतुर्भुज है।

हल– ज्ञात है—$PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है। शीर्ष P व Q से होकर खींचा गया वृत्त भुजा PS को बिन्दु A पर और भुजा QR को बिन्दु B पर प्रतिच्छेद करता है।



सिद्ध करना है—चतुर्भुज $ABRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति—∵ $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore \quad \angle PQR + \angle SRQ = 180^\circ$

(समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का योग 180° होता है)

या $\quad \angle PQB + \angle SRB = 180^\circ$ ...(1)

P व Q से होकर जाने वाला वृत्त PS को A पर तथा QR को B पर प्रतिच्छेद करता है।

अतः चतुर्भुज $PQBA$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

बहिष्कोण $\quad \angle SAB = \angle PQB$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से

$$\angle SAB + \angle SRB = 180^\circ$$

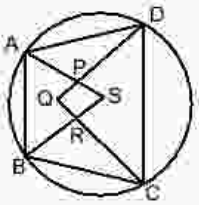
अब चतुर्भुज $ABRS$ में,

$$\angle SAB + \angle SRB = 180^\circ$$

अतः चतुर्भुज **$ABRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज** है। **इति सिद्धम्**

20. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज के अंतःकोण समद्विभाजकों द्वारा बना चतुर्भुज चक्रीय होता है।

हल– ज्ञात है—$ABCD$ एक चतुर्भुज है जिसके कोण समद्विभाजक AS, BS, CQ व DQ परस्पर एक-दूसरे को बिन्दुओं P, Q, R, S पर प्रतिच्छेदित करते हैं।



सिद्ध करना है—चतुर्भुज $PQRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति—∵ AS व BS क्रमशः कोण $\angle A$ व $\angle B$ के समद्विभाजक हैं।

$\therefore \quad \angle SAB = \frac{1}{2}\angle A$

तथा $\quad \angle ABS = \frac{1}{2}\angle B$

ΔABS में,

$$\angle SAB + \angle ABS + \angle S = 180^\circ$$

या $\quad \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \angle S = 180^\circ$

या $\quad \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + \angle S = 180^\circ$

या $\quad 180^\circ - \angle S = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ ...(1)

इसी प्रकार CQ व DQ क्रमशः $\angle C$ व $\angle D$ के समद्विभाजक हैं।

$\therefore \quad \angle QCD = \frac{1}{2}\angle C$

तथा $\quad \angle CDQ = \frac{1}{2}\angle D$

ΔQCD में,

$$\angle QCD + \angle CDQ + \angle Q = 180^\circ$$

या $$\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D + Q = 180^\circ$$

या $$\frac{1}{2}(\angle C + \angle D) = 180^\circ - \angle Q$$

या $$180^\circ - \angle Q = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D) \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$(180^\circ - \angle S) + (180^\circ - \angle Q) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

या $$180^\circ - \angle S + 180^\circ - \angle Q = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$$

या $$360^\circ - (\angle S + \angle Q) = \frac{1}{2} \times 360^\circ$$

या $$360^\circ - (\angle S + \angle Q) = 180^\circ$$

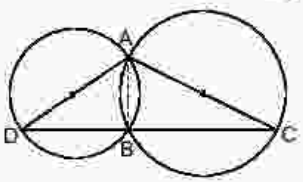
या $$\angle S + \angle Q = 360^\circ - 180^\circ$$

या $$\angle S + \angle Q = 180^\circ$$

या चतुर्भुज $PQRS$ में $\angle S + \angle Q = 180^\circ$

अतः चतुर्भुज ***PQRS* एक चक्रीय चतुर्भुज है।** इति सिद्धम्

21. दो वृत्त बिन्दु *A* व बिन्दु *B* पर प्रतिच्छेदित होते हैं। यदि *AD* व *AC* दोनों वृत्तों के व्यास हैं, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु *B* रेखाखंड *DC* पर पड़ता है।



हल– प्रश्नानुसार, AD व AC वृत्तों के व्यास हैं।

अतः बिन्दु B प्रत्येक वृत्त के अर्द्धवृत्त पर स्थित है।

$\therefore$ $\angle ABD = 90^\circ$ तथा $\angle ABC = 90^\circ$

अतः $$\angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

या $$\angle DBC = 180^\circ$$

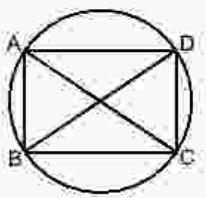
अर्थात् DBC एक ऋजु रेखा है।

अतः **बिन्दु *B* रेखाखंड *DC* पर स्थित है।** इति सिद्धम्

22. यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण चतुर्भुज के शीर्षों से होकर जाने वाले वृत्त के व्यास हैं, तो सिद्ध कीजिए कि यह एक आयत है।

हल– ज्ञात है—$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC व BD शीर्षों A, B, C व D से होकर जाने वाले वृत्त के व्यास हैं।

सिद्ध करना है—चतुर्भुज $ABCD$ एक आयत है।



उपपत्ति—$\because$ $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore$ $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ...(1)

तथा $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ...(2)

$\because$ विकर्ण AC वृत्त का व्यास है।

$\therefore \angle B$ अर्द्धवृत्त पर स्थित है।

अतः $\angle B = 90°$ यह मान समीकरण (2) में रखने पर

$90° + \angle D = 180°$

या $\angle D = 180° - 90° = 90°$

इसी प्रकार विकर्ण BD भी वृत्त का व्यास है।

अतः $\angle A$ अर्द्धवृत्त में स्थित है।

$\therefore$ $\angle A = 90°$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर

$90° + \angle C = 180°$

या $\angle C = 180° - 90° = 90°$

$\because$ चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ में $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

अतः $ABCD$ एक आयत है। इति सिद्धम्

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 219 से 223 का अवलोकन कीजिए।

12

वृत्त की स्पर्श रेखा
(Tangent to a Circle)

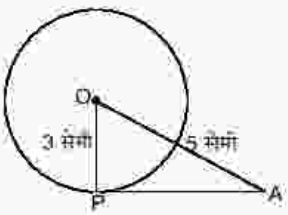
अभ्यास 12.1

1. 3 सेमी त्रिज्या के वृत्त के बाहर केन्द्र से 5 सेमी की दूरी पर स्थित किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की माप ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—वृत्त की त्रिज्या $OP = 3$ सेमी

वृत्त के केन्द्र O से बाह्य बिन्दु A की दूरी $OA = 5$ सेमी

ज्ञात करना है—बाह्य बिन्दु A से वृत्त पर स्थित बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा AP की माप।



हम जानते हैं कि— स्पर्श रेखा बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

अतः समकोण ΔOPA में,

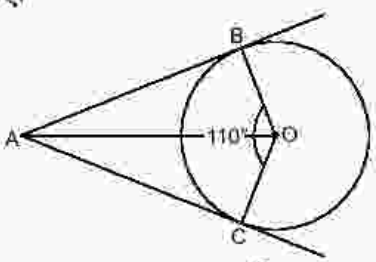
$$OA^2 = OP^2 + AP^2$$

या $$AP^2 = OA^2 - OP^2$$

या $$AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \text{ सेमी}$$ **उत्तर**

2. चित्र (i) में केन्द्र पर $\angle BOC = 110°$, AB तथा AC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle OAB$ की माप ज्ञात कीजिए।



(i)

हल– दिए गए चित्रानुसार,

$$\angle AOB = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 110° = 55°$$

$$\angle ABO = 90°$$ (स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।)

ΔAOB में,

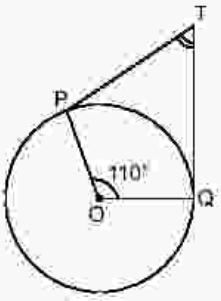
$$\angle OAB + \angle AOB + \angle ABO = 180°$$

या $\angle OAB + 55° + 90° = 180°$

या $\angle OAB + 145° = 180°$

या $\angle OAB = 180° - 145° = 35°$ **उत्तर**

3. चित्र (ii) में, यदि TP और TQ केन्द्र O वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ हैं तथा $\angle POQ = 110°$, तो $\angle PTQ$ का मान ज्ञात कीजिए।



(ii)

हल– ∵ TP व TQ केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ है।

अत: $\angle OPT = OQT = 90°$

$\Rightarrow \angle OPT + \angle OQT = 90° + 90° = 180°$

दिया है— $\angle POQ = 110°$

∴ चतुर्भुज $OPTQ$ में सम्मुख कोण

$\angle POQ + \angle PTQ = 180°$

या $110° + \angle PTQ = 180°$

या $\angle PTQ = 180° - 110° = 70°$ **उत्तर**

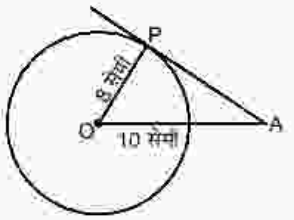
4. 8 सेमी त्रिज्या के वृत्त के बाहर केन्द्र से 10 सेमी की दूरी पर स्थित किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की माप ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—वृत्त की त्रिज्या $OP = 8$ सेमी

वृत्त के केन्द्र O से बाह्य बिन्दु A की दूरी

$OA = 10$ सेमी

$AP = ?$



∵ AP वृत्त की स्पर्श रेखा है।

अत: समकोण OPA में,

$OA^2 = AP^2 + OP^2$

या $AP^2 = OA^2 - OP^2$

या $AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{10^2 - 8^2}$

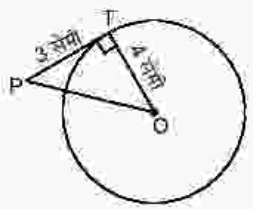
$= \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ सेमी **उत्तर**

5. एक 4 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर किसी बाहरी बिन्दु से स्पर्श रेखा खींची जाती है। यदि स्पर्श रेखा की माप 3 सेमी है, तो बिन्दु की वृत्त के केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—वृत्त की त्रिज्या $OT = 4$ सेमी

बाह्य बिन्दु P से स्पर्श रेखा की माप $PT = 3$ सेमी

वृत्त के केन्द्र O से बाह्य बिन्दु की दूरी $OP = ?$



समकोण ΔOTP में,

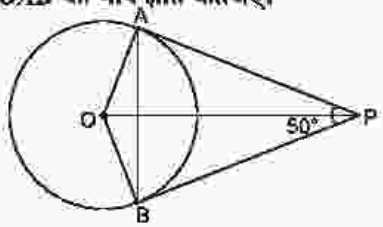
$OP^2 = PT^2 + OT^2$

या $OP = \sqrt{PT^2 + OT^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ सेमी **उत्तर**

6. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है, PA और PB वृत्त की बिन्दु P से स्पर्श रेखाएँ हैं और $\angle APB = 50°$, $\angle OAB$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– चित्रानुसार,

$$\angle APB = 50°$$

$\because$ PA और PB वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore$ $\angle OAP = \angle OBP = 90°$

अतः $\angle OAP + \angle OBP = 90° + 90° = 180°$

$\therefore$ चतुर्भुज $OAPB$ में सम्मुख कोण

$$\angle AOB + \angle APB = 180°$$

या $\angle AOB + 50° = 180°$

या $\angle AOB = 180° - 50° = 130°$

अब, ΔOAB में,

$$\text{भुजा } OA = \text{भुजा } OB \quad \text{(प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)}$$

$\Rightarrow$ $\angle OBA = \angle OAB$ ...(1)

पुनः ΔOAB में,

$\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180°$

या $\angle OAB + \angle OAB + 130° = 180°$

या $2\angle OAB + 130° = 180°$

या $2\angle OAB = 180° - 130°$

या $2\angle OAB = 50°$

या $\angle OAB = \frac{50°}{2} = 25°$ **उत्तर**

7. एक वृत्त की दो स्पर्शियों के बीच का कोण 40° है। बताइए उनके स्पर्श बिन्दुओं से खींची गई त्रिज्याएँ केन्द्र पर कितने अंश का कोण बनाती हैं।

हल– हम जानते हैं कि—

वृत्त की स्पर्शियों के बीच का कोण + स्पर्श बिन्दुओं से खींची गई त्रिज्याओं के बीच का कोण

$= 180°$

या स्पर्श बिन्दुओं से खींची गई त्रिज्याओं के बीच का कोण

$= 180° -$ वृत्त की स्पर्शियों के बीच का कोण

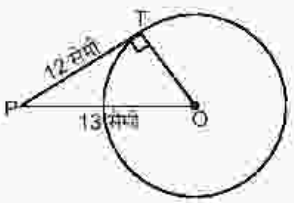
$= 180° - 40° = 140°$ **उत्तर**

8. वृत्त के केन्द्र O से 13 सेमी दूर स्थित बिन्दु P से वृत्त की स्पर्श रेखा की लम्बाई 12 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—वृत्त के केन्द्र O से बिन्दु P की दूरी $OP = 13$ सेमी

तथा वृत्त की स्पर्श रेखा की लम्बाई $PT = 12$ सेमी

वृत्त की त्रिज्या $OT = ?$



समकोण ΔOTP में,

$$OP^2 = OT^2 + PT^2$$

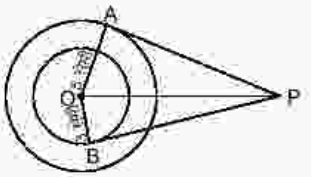
या $$OT^2 = OP^2 - PT^2$$

या $$OT = \sqrt{OP^2 - PT^2}$$

$$= \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ सेमी}$$ उत्तर

9. चित्र में दो संकेन्द्रीय वृत्त जिनका केन्द्र O है तथा जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 5 सेमी तथा 3 सेमी मापों की हैं। बाह्य बिन्दु P से संगत वृत्तों पर खींची गई स्पर्शियाँ क्रमशः PA तथा PB हैं। यदि $PA = 12$ सेमी हो, तो PB की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है—संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ

$$OA = 5 \text{ सेमी} \quad \text{तथा} \quad OB = 3 \text{ सेमी}$$

तथा स्पर्श रेखा $$PA = 12 \text{ सेमी}$$

समकोण ΔOAP में,

$$OP^2 = OA^2 + PA^2$$

या $$OP^2 = \sqrt{OP^2 + PA^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144}$$

$$= \sqrt{169} = 13 \text{ सेमी}$$

अब समकोण ΔOBP में,

$$OP^2 = OB^2 + PB^2$$

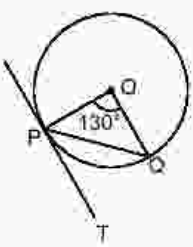
या $$PB^2 = OP^2 - OB^2$$

या $$PB^2 = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{169 - 9}$$

$$= \sqrt{160} = \sqrt{16 \times 10}$$

$$= 4\sqrt{10} \text{ सेमी}$$ उत्तर

10. संलग्न चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। PQ एक जीवा तथा PT स्पर्शी है। यदि $\angle POQ = 130°$ हो, तो $\angle QPT$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

$$\angle POQ = 130°$$

ΔOPQ में,

$$OP = OQ \quad \text{(प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)}$$

$$\Rightarrow \quad \angle OPQ = \angle OQP$$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

परन्तु $\angle POQ + \angle OPQ + \angle OQP = 180°$

या $\angle POQ + \angle OPQ + OPQ = 180°$

या $\angle POQ + 2\angle OPQ = 180°$

या $130° + 2\angle OPQ = 180°$

या $2\angle OPQ = 180° - 130° = 50°$

या $\angle OPQ = \frac{50°}{2} = 25°$

$\because$ PT वृत्त की स्पर्शी है।

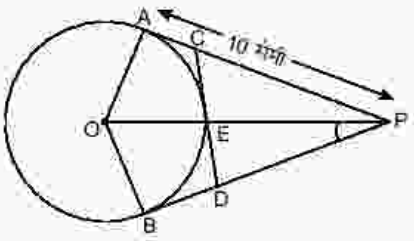
$\therefore$ $\angle OPT = 90°$

या $\angle OPQ + \angle QPT = 90°$

या $25° + \angle QPT = 90°$

या $\angle QPT = 90° - 25° = \mathbf{65°}$ **उत्तर**

11. चित्र में एक बाह्य बिन्दु P से केन्द्र O वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची गई हैं, बिन्दु E पर स्पर्श रेखा CD है। यदि $AP = 10$ सेमी हो, तो ΔPCD का परिमाप ज्ञात कीजिए।



हल—प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

$AP = 10$ सेमी

हम जानते हैं कि— किसी बिन्दु से वृत्त की पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।

अब $PA = PB = 10$

या $PC + CA = PD + DB = 10$ ...(1)

परन्तु $CA = CE$ ...(2) (प्रत्येक बिन्दु C से खींची गई स्पर्शी)

तथा $DE = DB$ ...(3) (प्रत्येक बिन्दु D से खींची गई स्पर्शी)

समीकरण (1), (2) व (3) से

$PC + CE = PD + DE = 10$ ...(4)

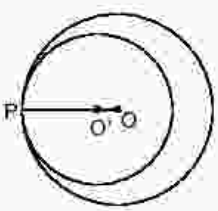
अब ΔPCD का परिमाप $= PC + CD + PD$

$= PC + CE + DE + PD$

$= (PC + CE) + (PD + DE)$

$= 10 + 10 = \mathbf{20}$ **सेमी** **उत्तर**

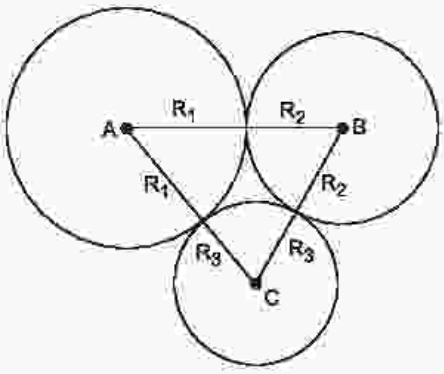
12. दिए गए चित्र में दो वृत्त एक-दूसरे को P बिन्दु पर अन्तः स्पर्श करते हैं। यदि दोनों वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 0.8 सेमी तथा बड़े वृत्त की त्रिज्या 2.6 सेमी हो तो छोटे वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, संकेन्द्रीय वृत्तों के केन्द्र क्रमशः O व O' है
जहाँ O बड़े वृत्त का केन्द्र तथा O' छोटे वृत्त का केन्द्र है।
तथा स्पर्श बिन्दु P है। अतः बड़े वृत्त की त्रिज्या OP तथा छोटे की त्रिज्या $O'P$ है।
दिया है— $OP = 2.6$ सेमी तथा $OP - O'P = 0.8$
या $O'P = OP - 0.8 = 2.6 - 0.8 = 1.8$ सेमी **उत्तर**

13. तीन वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं। वृत्तों के केन्द्र क्रमशः A, B तथा C हैं। यदि $AB = 7$ सेमी, $BC = 5$ सेमी तथा $CA = 6$ सेमी है तो वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—तीन वृत्त जिनके केन्द्र क्रमशः A, B व C हैं, एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं।
माना वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः R_1, R_2, R_3 हैं।



वृत्तों के बीच दूरियाँ त्रिज्याओं के योग के बराबर होगी।

$\therefore$ $R_1 + R_2 = AB = 7$ सेमी ...(1)

$R_2 + R_3 = BC = 5$ सेमी ...(2)

$R_3 + R_1 = CA = 6$ सेमी ...(3)

समीकरण (1), (2) व (3) को जोड़ने पर,

$2(R_1 + R_2 + R_3) = 18$ सेमी

या $R_1 + R_2 + R_3 = 9$ सेमी ...(4)

समीकरण (4) में से समीकरण (1) घटाने पर,

$R_3 = 2$ सेमी

समीकरण (4) में से समीकरण (2) घटाने पर,

$R_1 = 4$ सेमी

तथा समीकरण (4) में से समीकरण (3) घटाने पर,

$R_2 = 3$ सेमी

अतः दिए गए वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः = 4 सेमी, 3 सेमी व 2 सेमी **उत्तर**

14. तीन वृत्तों के केन्द्र क्रमशः A, B तथा C हैं। वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं। यदि $AB = 14$ सेमी, $BC = 10$ सेमी तथा $CA = 12$ सेमी हैं, तो वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—तीन वृत्तों के केन्द्र क्रमशः A, B तथा C हैं।

$AB = 14$ सेमी, $BC = 10$ सेमी, $CA = 12$ सेमी

माना वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः R_1, R_2 व R_3 हैं।

चूँकि वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं।

अतः वृत्तों के बीच की दूरियाँ उनकी त्रिज्याओं के योग के बराबर होंगी।

$\therefore \quad R_1 + R_2 = AB = 14$ सेमी ...(1)

$R_2 + R_3 = BC = 10$ सेमी ...(2)

$R_3 + R_1 = CA = 12$ सेमी ...(3)

जोड़ने पर, $2(R_1 + R_2 + R_3) = 36$

या $R_1 + R_2 + R_3 = 18$ ...(4)

समीकरण (4) में से समीकरण (1) घटाने पर,

$R_3 = 4$ सेमी

समीकरण (4) में से समीकरण (2) घटाने पर,

$R_1 = 8$ सेमी

तथा समीकरण (4) में से समीकरण (3) घटाने पर,

$R_2 = 6$ सेमी

अतः दिए गए वृत्त की त्रिज्याएँ क्रमशः = **8 सेमी, 6 सेमी तथा 4 सेमी** **उत्तर**

15. दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 4.5 सेमी है। वृत्तों की त्रिज्याएँ 6.3 सेमी तथा 1.8 सेमी हैं। ज्ञात कीजिए कि क्या वृत्त एक-दूसरे को स्पर्श करते हैं? यदि हाँ तो स्पर्श बाह्य है अथवा अन्तः?

हल– दिया है—दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी $= 4.5$ सेमी $= OO'$ (माना)

तथा पहले वृत्त की त्रिज्या $(r_1) = 6.3$ सेमी

व दूसरे वृत्त की त्रिज्या $(r_2) = 1.8$ सेमी

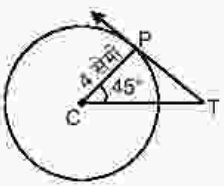
त्रिज्याओं का योगफल $= r_1 + r_2 = 6.3 + 1.8 = 8.1$ सेमी

तथा त्रिज्याओं का अन्तर $= r_1 - r_2 = 6.3 - 1.8 = 4.5$ सेमी

$\because$ वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी = त्रिज्याओं का अन्तर $= 4.5$ सेमी

अतः दोनों वृत्त एक-दूसरे को **अन्तः स्पर्श** करते हैं। **उत्तर**

16. दिए गए चित्र में वृत्त का केन्द्र C तथा वृत्त की त्रिज्या 4 सेमी है। यदि वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्शी PT तथा $\angle PCT = 45°$ है, तो स्पर्शी PT की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, वृत्त का केन्द्र C तथा वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्शी PT है।

अतः $\angle CPT = 90°$ तथा $\angle PCT = 45°$

$\therefore \Delta CPT$ में, $\angle PTC = 180° - (\angle CPT + \angle PCT)$

$= 180° - (90° + 45°)$

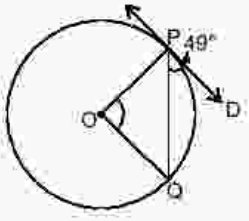
$= 180° - 135° = 45°$

ΔCPT में, $\angle PCT = \angle PTC$

$\therefore \quad PT = CP$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

या $PT = 4$ सेमी **उत्तर**

17. निम्नांकित चित्र में केन्द्र O वाले वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PD है। यदि $\angle QPD = 49°$ है, तो $\angle POQ$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में

$$\angle QPD = 49°$$

∵ PD वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श है।

$$\therefore \quad \angle OPD = 90°$$

$$\angle OPQ = \angle OPD - \angle QPD$$

$$= 90° - 49° = 41°$$

ΔOPQ में, $OP = OQ$ (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या है)

$$\therefore \quad \angle OQP = \angle OPQ = 41°$$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

ΔOPQ में,

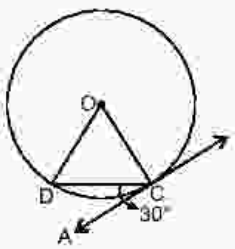
$$\angle POQ + \angle OPQ + \angle OQP = 180°$$

या $\quad \angle POQ + 41° + 41° = 180°$

या $\quad \angle POQ + 82° = 180°$

या $\quad \angle POQ = 180° - 82° = \mathbf{98°}$ **उत्तर**

18. निम्नांकित चित्र में वृत्त का केन्द्र O तथा वृत्त के बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AC है। यदि $\angle ACD = 30°$ है, तो $\angle DOC$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में O वृत्त का केन्द्र तथा वृत्त के बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AC है।

अतः $\quad \angle OCA = 90°$

$$\angle OCD = \angle OCA - \angle ACD$$

$$= 90° - 30° = 60°$$

ΔOCD में, $OC = OD$ (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)

$$\therefore \quad \angle ODC = \angle OCD = 60°$$

पुनः ΔOCD में, $\quad \angle DOC = 180° - (\angle ODC + \angle OCD)$

$$= 180° - (60° + 60°)$$

$$= 180° - 120° = \mathbf{60°}$$ **उत्तर**

19. दो वृत्त एक-दूसरे को अंतः स्पर्श करते हैं। यदि वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 3 सेमी और बड़े वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है तो छोटे वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी = 3 सेमी

बड़े वृत्त की त्रिज्या $(r_1) = 5$ सेमी

माना छोटे वृत्त की त्रिज्या $= r_2$

∵ वृत्त एक-दूसरे को अन्तः स्पर्श करते हैं।

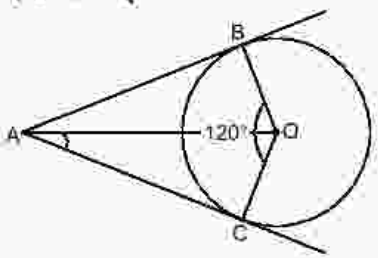
$\therefore$ त्रिज्याओं का अन्तर = केन्द्रों के बीच की दूरी

या $\quad r_1 - r_2 = 3 \quad$ या $\quad 5 - r_2 = 3$

या $5-3=r_2$

या $2=r_2 \Rightarrow r_2=2$ सेमी **उत्तर**

20. निम्नांकित चित्र में केन्द्र का $\angle BOC=120°$ और AB तथा AC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle OAC$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल—चित्रानुसार, $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 120°=60°$

$\because$ AC वृत्त की स्पर्शी है।

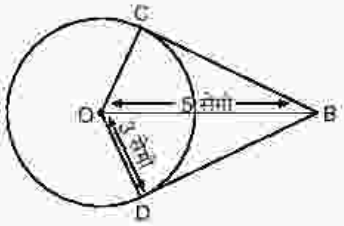
$\therefore$ $\angle OCA=90°$

ΔOAC में, $\angle OAC=180°-(\angle AOC+\angle OCA)$

$=180°-(60°+90°)$

$=180°-150°=\mathbf{30°}$ **उत्तर**

21. दिए गए चित्र में, O केन्द्र के वृत्त की त्रिज्या $OD=3$ सेमी है। यदि $OB=5$ सेमी तो स्पर्श रेखा BC की माप ज्ञात कीजिए।



हल—चित्रानुसार, $OC=OD=3$ सेमी

(प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)

$\because$ BC वृत्त की स्पर्शी है।

$\therefore$ $\angle C=90°$

अतः समकोणीय ΔOBC में,

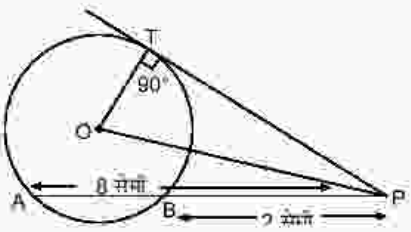
$OB^2=OC^2+BC^2$

या $BC^2=OB^2-OC^2$

या $BC=\sqrt{OB^2-OC^2}=\sqrt{5^2-3^2}$

$=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ सेमी **उत्तर**

22. चित्र में, O वृत्त का केन्द्र है, PBA छेदक रेखा है तथा PT स्पर्श रेखा है। यदि $PB=2$ सेमी एवं $PA=8$ सेमी, तो PT की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल—चित्रानुसार,

दिया है—$AP=8$ सेमी, $BP=2$ सेमी

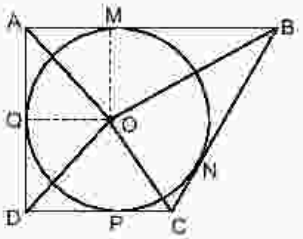
$\because$ $PT^2=AP\times BP$

या $PT^2=8\times 2$

या $PT^2 = 16$

या $PT = \sqrt{16} = 4$ सेमी **उत्तर**

23. वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज खींचा गया है। सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो सम्मुख भुजाओं के केन्द्र पर अंतरित कोणों का योग दो समकोण होता है।



हल– ज्ञात है—एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा जिसके परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ है, जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA वृत्त को क्रमशः M, N, P तथा Q बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है—$\angle AOB + \angle COD = 180°$

रचना—स्पर्श बिन्दु M और Q को केन्द्र O से मिलाया।

उपपत्ति—ΔOAM तथा ΔOAQ में,

$\angle OMA = \angle OQA$ (प्रत्येक समकोण)

$OM = OQ$ (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \quad \Delta OAM \cong \Delta OAQ$

अतः $\angle OAM = \angle OAQ \Rightarrow \angle OAB = \angle OAD$

इसी प्रकार, $\angle OBA = \angle OBC$

$\angle OCB = \angle OCD$ तथा $\angle ODC = \angle ODA$

ΔOAB में, $\angle AOB = 180° - \angle OAB - \angle OBA$ ...(1)

ΔOCD में, $\angle COD = 180° - \angle OCD - \angle ODC$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$\angle AOB + \angle COD = 180° - \angle OAB - \angle OBA + 180° - \angle OCD - \angle ODC$$
$$= 360° - (\angle OAB + \angle OBA + \angle OCD + \angle ODC)$$
$$= 360° - \left(\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D\right)$$
$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$$

परन्तु चतुर्भुज $ABCD$ में $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$\therefore \quad \angle AOB + \angle COD = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$

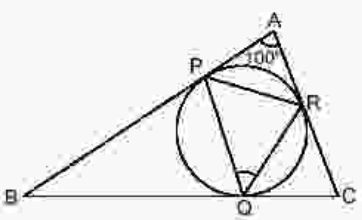
या $\angle AOB + \angle COD = 360° - 180° = \mathbf{180°}$ **इति सिद्धम्**

24. त्रिभुज ABC का अन्तःवृत्त त्रिभुज की भुजाओं AB, BC तथा CA को क्रमशः P, Q तथा R बिन्दुओं पर स्पर्श करता है। यदि $\angle BAC = 100°$ तो $\angle PQR$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—ΔABC के अन्तःवृत्त जो भुजाओं AB, BC तथा CA को क्रमशः P, Q तथा R बिन्दुओं पर स्पर्श करता है तथा $\angle BAC = 100°$

चित्र से, $\angle PAR = \angle BAC = 100°$

$\because$ AP व AR स्पर्श रेखाखंड हैं।



$\therefore \quad AP = AR$

$\Rightarrow \quad \angle ARP = \angle APR$ ...(1)

ΔAPR में,

$\angle PAR + \angle ARP + \angle APR = 180°$

या $100° + \angle APR + \angle APR = 180°$

या $100° + 2\angle APR = 180°$

या $2\angle APR = 180° - 100° = 80°$

या $\angle APR = \frac{80°}{2} = 40°$

$\because$ AB स्पर्श रेखा है जो वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

जीवा PR स्पर्श रेखा AB से बिन्दु P पर $\angle APR = 40°$ बनाती है।

$\therefore$ एकान्तर वृत्तखंड का कोण $\angle PQR = 40°$ उत्तर

25. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 4.5 सेमी तथा 3.2 सेमी हैं। दोनों वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं। वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—दो वृत्तों की त्रिज्याएँ $r_1 = 4.5$ सेमी तथा $r_2 = 3.2$ सेमी

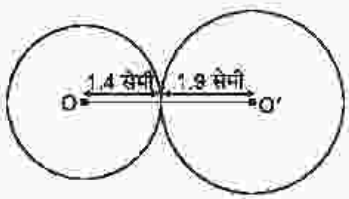
$\because$ वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं।

अत: वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी = त्रिज्याओं का योगफल

$= r_1 + r_2 = 4.5 + 3.2 = 7.7$ सेमी उत्तर

26. केन्द्रों O तथा O' वाले वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमश: 1.4 सेमी तथा 1.9 सेमी हैं। यदि दोनों वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं तो रेखाखंड OO' की माप ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—केन्द्र O वाले वृत्त की त्रिज्या $r_1 = 1.4$ सेमी



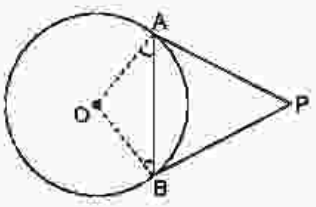
तथा केन्द्र O' वाले वृत्त की त्रिज्या $r_2 = 1.9$ सेमी

अत: रेखाखंड $OO' = r_1 + r_2$

$= 1.4 + 1.9 = 3.3$ सेमी उत्तर

27. सिद्ध कीजिए कि एक बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ संपर्क जीवा के साथ बराबर कोण अंतरित करती हैं।

हल– ज्ञात है—O केन्द्र वाले वृत्त की एक जीवा AB है। बाह्य बिन्दु P से जीवा के सिरों A व B पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB हैं। जो जीवा के साथ क्रमश: $\angle PAB$ तथा $\angle PBA$ बनाती हैं।



सिद्ध करना है— $\angle PAB = \angle PBA$

रचना—OA तथा OB को मिलाया।

उपपत्ति—ΔOAB में,

$$OA = OB \quad \text{(वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

$$\therefore \quad \angle OBA = \angle OAB \quad \text{(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)} \quad ...(1)$$

$\because$ PA तथा PB वृत्त को स्पर्श रेखाएँ और OA व OB वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

$$\therefore \quad \angle OAB = \angle OBP \quad \text{(प्रत्येक समकोण)}$$

$$\text{या} \quad \angle OAB + \angle PAB = \angle OBA + \angle PBA$$

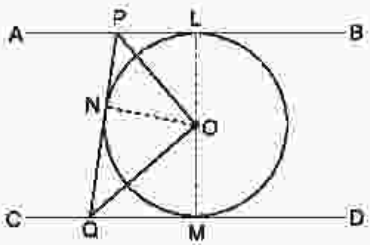
$$\text{या} \quad \angle OAB + \angle PAB = \angle OAB + \angle PBA \quad \text{(समीकरण (1) से)}$$

$$\text{या} \quad \angle PAB = \angle PBA$$

इति सिद्धम्

28. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की दो समांतर स्पर्श रेखाओं के बीच एक स्पर्श रेखा का अन्तःखंड केन्द्र पर समकोण अंतरित करता है।

हल– ज्ञात है— O केन्द्र वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ AB और CD हैं जो परस्पर समान्तर हैं और वृत्त को L व M बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं। इन दो समान्तर रेखाओं के बीच वृत्त की तीसरी स्पर्श रेखा का अन्तःखंड PQ वृत्त को N बिन्दु पर स्पर्श करता है। अन्तःखंड PQ वृत्त के केन्द्र O पर $\angle POQ$ अंतरित करता है।



सिद्ध करना है—$\angle POQ = 90°$

रचना—त्रिज्याएँ OL, OM तथा ON खींचा।

उपपत्ति— $\because$ AB और PQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ तथा OL तथा ON त्रिज्याएँ हैं।

$\therefore OL \perp AB$ तथा $ON \perp PQ$

समकोण ΔONP में तथा ΔOLP में,

$$ON = OL \quad \text{(वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

$$\angle ONP = \angle OLP \quad \text{(प्रत्येक समकोण)}$$

$$OP = OP \quad \text{(उभयनिष्ठ)}$$

$$\therefore \quad \Delta ONP \cong \Delta OLP$$

$$\Rightarrow \quad \angle NPO = \angle LPO \quad \text{अर्थात् } OP, \angle LPN \text{ का अर्द्धक है}$$

$$\therefore \quad \angle NPO = \frac{1}{2}\angle LPN = \frac{1}{2}\angle BPQ \quad ...(1)$$

इसी प्रकार, $\quad \angle OQP = \frac{1}{2}\angle PQD \quad ...(2)$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$\angle NPQ + \angle OQP = \frac{1}{2}(\angle BPQ + \angle PQD) \quad ...(3)$$

$\because$ रेखा $AB \parallel CD$ और PQ तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ तिर्यक रेखा PQ के एक ओर स्थित अन्तः कोणों का योग

$$\angle BPQ + \angle PQD = 180° \quad ...(4)$$

समीकरण (3) व (4) से,

$$\angle NPO + \angle OQP = \frac{1}{2} \times 180^\circ$$

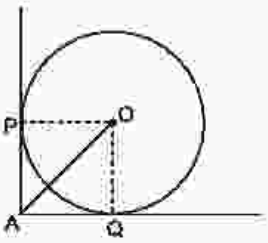
या $\angle NPO + \angle OQP = 90^\circ$

ΔOPQ में,

$$\angle POQ = 180^\circ - (\angle NPO + \angle OQP)$$

या $\angle POQ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ इति सिद्धम्

29. किसी वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ एक-दूसरे को समकोण पर काटती हैं। सिद्ध कीजिए कि स्पर्श रेखाओं तथा इनके स्पर्श बिन्दुओं से जाने वाली त्रिज्याओं द्वारा बना चतुर्भुज एक वर्ग होगा।



हल– ज्ञात है—बाह्य बिन्दु A से केन्द्र O वाले वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ AP तथा AQ खींची, जो परस्पर लम्ब हैं। अर्थात् $\angle PAQ = 90^\circ$

सिद्ध करना है—चतुर्भुज $OPAQ$ एक वर्ग है।

रचना—त्रिज्याएँ OP तथा OQ खींचिए।

उपपत्ति—

$\because$ AP व AQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ तथा OP व OQ त्रिज्याएँ हैं।

$\therefore$ $\angle OPA = \angle OQA = 90^\circ$

केन्द्र O से A को मिलाने वाली रेखा $\angle PAQ$ का अर्द्धक है।

$\therefore$ $\angle OAP = \angle OAQ = \frac{1}{2}\angle PAQ = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$

अब ΔOPA में,

$$\angle POA = 180^\circ - (\angle OPA + \angle OAP)$$
$$= 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ)$$
$$= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$\because$ $\angle OAP = \angle POA$

$\Rightarrow$ $OP = AP$ ...(1)

इसी प्रकार, ΔOQA में,

$$\angle QOA = 180^\circ - (\angle OQA + \angle OAQ)$$
$$= 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ)$$
$$= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$\therefore$ $\angle QOA = \angle OAQ$

$\Rightarrow$ $AQ = OQ$ ...(2)

$OP = OQ$ ...(3) (त्रिज्याएँ)

$AP = AQ$ ...(4)

(बाह्य बिन्दु से वृत्त की स्पर्शियाँ)

समीकरण (1), (2), (3) व (4) से

$$AP = AQ = OQ = OP$$

चतुर्भुज $APOQ$ में,

$$\angle A + \angle P + \angle O + \angle Q = 360°$$

$$90° + 90° + \angle O + 90° = 360°$$

या $$\angle O + 270° = 360°$$

या $$\angle O = 360° - 270° = 90°$$

∵ चतुर्भुज $APOQ$ में,

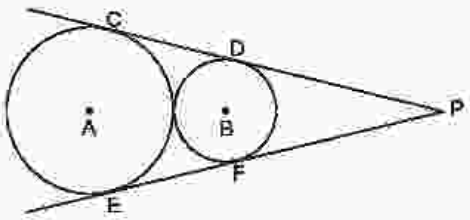
$$\angle A = \angle P = \angle O = \angle Q = 90°$$

तथा $$AP = OQ = OP = OQ$$

अत: चतुर्भुज $APOQ$ एक वर्ग है। इति सिद्धम्

30. चित्र में दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ PDC और PEF हैं। सिद्ध कीजिए कि—

$$CD = EF$$



हल– दिए गए चित्र से स्पष्ट है।

$$PD = PF \quad ...(1)$$

(बाह्य बिन्दु P से B केन्द्र वाले वृत्त की स्पर्शियाँ)

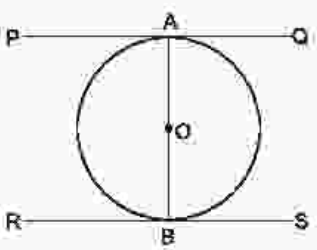
तथा $$PC = PE$$ (बाह्य बिन्दु P से A केन्द्र वाले वृत्त की स्पर्शियाँ)

या $$PD + CD = PF + EF$$

या $$PD + CD = PD + EF$$ या $$CD = EF$$ इति सिद्धम्

31. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के व्यास के अंतिम सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

हल– ज्ञात है—O केन्द्र वाले वृत्त का व्यास AB है। व्यास के सिरों A तथा B से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ PAQ तथा RBS खींची गई हैं।



सिद्ध करना है— $PQ \parallel RS$

उपपत्ति— AB वृत्त का व्यास है और PAQ तथा RBS बिन्दुओं A व B पर स्पर्शियाँ है।

$$\angle PAB = 90°$$

तथ $$\angle ABS = 90°$$

$\angle PAB$ तथा $\angle ABS$ ऋजु रेखाओं PQ तथा RS को तिर्यक रेखा AB द्वारा काटने से बने समान एकान्तर कोण हैं।

अत: $$PQ \parallel RS$$ इति सिद्धम्

32. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु पर डाला गया लम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है।

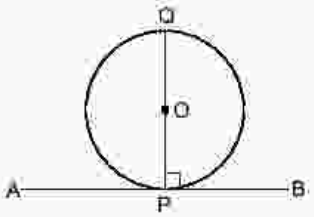
हल– ज्ञात है—O केन्द्र वाला एक वृत्त जिसकी स्पर्श रेखा AB के स्पर्श बिन्दु P से होकर AB पर लम्ब PQ खींचा गया है।

सिद्ध करना है—लम्ब PQ, वृत्त के केन्द्र O से होकर जाता है।

उपपत्ति—$\because$ $PQ \perp AB$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle QPA = 90^\circ$ ...(1)

$\because$ केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखा AB के स्पर्श बिन्दु P से होकर जाने वाली त्रिज्या OP, स्पर्श रेखा AB पर लम्ब होगी अर्थात्



$OP \perp AB$

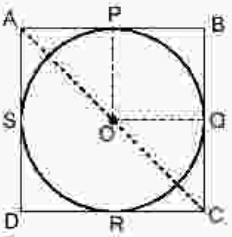
$\therefore$ $\angle OPA = 90^\circ$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से प्रदर्शित होता है कि एक ही बिन्दु P पर बने $\angle QPA$ तथा $\angle OPA$ दोनों ही समकोण हैं, जो केवल तभी सम्भव है जब बिन्दु P, O एवं Q एक ही रेखा पर स्थित हों, जो स्पर्श रेखा AB के लम्बवत है।

अतः लम्ब PQ, वृत्त के केन्द्र O से होकर जाता है। **इति सिद्धम्**

33. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत खींचा गया समांतर चतुर्भुज एक सम-चतुर्भुज होता है।

हल– ज्ञात है—O केन्द्र वाले वृत्त के परिगत खींचा गया समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ जिसकी भुजाएँ वृत्त को क्रमशः P, Q, R तथा S बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं।



सिद्ध करना है—$ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

रचना—AC, OP और OQ को मिलाया।

उपपत्ति—हम जानते है कि किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।

$\therefore$ $AP = AS, BP = BQ, CQ = CR$ तथा $DR = DS$

अब ΔOAP तथा ΔOCQ में,

$OP = OQ$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OAP = \angle OCQ$ (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के अर्द्धक)

$\angle OPA = \angle OQC$ (प्रत्येक समकोण)

$\therefore$ $\Delta OAP \cong \Delta OCQ$

अतः $AP = CQ$

या $AP + BP = CQ + BP$

या $AP + BP = CQ + BQ$ $(\because BP = BQ)$

या $AB = BC$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि—

$AD = AB$ तथा $BC = CD$

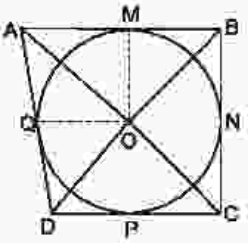
∴ समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में,

$$AB = BC = CD = AD$$

अतः चतुर्भुज $ABCD$ एक समचतुर्भुज है। इति सिद्धम्

34. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत चतुर्भुज की विपरीत भुजाएँ वृत्त के केन्द्र पर सम्पूरक कोण अंतरित करती है।

हल– ज्ञात है—केन्द्र O वाले वृत्त के परिगत चतुर्भुज $ABCD$ खींचा गया है, जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD व DA वृत्त को क्रमशः बिन्दुओं M, N, P तथा Q बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं।



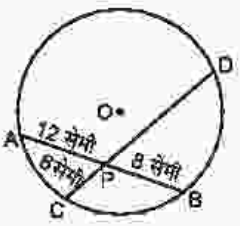
सिद्ध करना है— $\angle AOB + \angle COD = 180°$

रचना—स्पर्श बिन्दु M और Q को केन्द्र O से मिलाया।

उपपत्ति—प्रश्न संख्या 23 की भाँति स्वयं लिखिए।

अभ्यास 12.2

1. संलग्न चित्र में, वृत्त का केन्द्र O है। वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को वृत्त के अन्दर बिन्दु P पर काटती हैं। यदि $AP = 12$ सेमी, $PB = 8$ सेमी तथा $CP = 6$ सेमी है, तो रेखाखंड PD की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है—चित्रानुसार, $AP = 12$ सेमी, $PB = 8$ सेमी

तथा $CP = 6$ सेमी

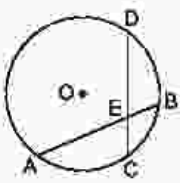
चूँकि वृत्त की जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती है। अतः

$$AP \times PB = CP \times PD \quad \text{या} \quad 12 \times 8 = 6 \times PD$$

या $$96 = 6PD$$

या $$PD = \frac{96}{6} = 16 \text{ सेमी}$$ उत्तर

2. दिए गए चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को बिन्दु E पर काटती हैं। यदि $DE = 4$ सेमी तथा $EC = 2.5$ सेमी हैं, तो रेखाखंडों AE तथा EB से निर्मित आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



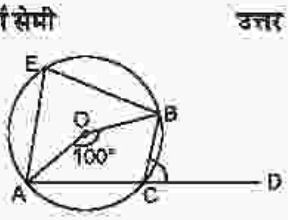
हल— रेखाखंड AE तथा EB द्वारा निर्मित आयत का क्षेत्रफल $= AE \times EB$

चूँकि जीवा AB तथा CD वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो एक-दूसरे को बिन्दु E पर काटती है।

अतः $$AE \times EB = DE \times EC$$

$$= 4 \times 2.5 = 10.0 \text{ वर्ग सेमी}$$ उत्तर

3. दिए गए चित्र में, O वृत्त का केन्द्र है। $\angle AOB = 100°$ है, तो $\angle BCD$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र से स्पष्ट है कि $\angle AOB$ तथा $\angle AEB$ चाप ACB द्वारा क्रमशः केन्द्र तथा वृत्त पर अंतरित कोण है।

अतः $$\angle AEB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

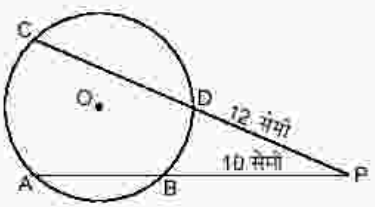
$$= \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$$

∵ बिन्दु A, E, B व C से होकर वृत्त खींचा गया है।

∴ $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

बहिष्कोण $\angle BCD = \angle AEB = \mathbf{50^\circ}$ **उत्तर**

4. दिए गए चित्र में केन्द्र O वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को वृत्त के बाहर बिन्दु P पर काटती हैं। यदि $AP = 24$ सेमी, $BP = 10$ सेमी तथा $DP = 12$ सेमी है तो जीवा CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल– चित्रानुसार, AB व CD वृत्त की दो जीवाएँ वृत्त के बाहर एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती है।

तथा दिया है— $AP = 24$ सेमी, $BP = 10$ सेमी, $DP = 12$ सेमी

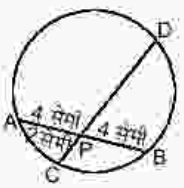
हम जानते हैं कि वृत्त के बाहर परस्पर प्रतिच्छेद करने वाली दो जीवाओं के खंडों से निर्मित आयत बराबर होते हैं।

अर्थात् $AP \times BP = CP \times DP$ या $CP = \dfrac{AP \times BP}{DP}$

या $CP = \dfrac{24 \times 10}{12}$ या $CP = 20$

$CD = CP - DP = 20 - 12 = \mathbf{8}$ **सेमी** **उत्तर**

5. संलग्न चित्र में, वृत्त की जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती हैं। यदि $AP = PB = 4$ सेमी तथा $CP = 2$ सेमी है, तो रेखाखंड PD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



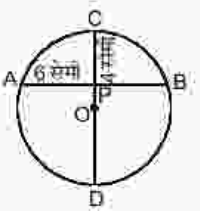
हल— दिए गए चित्र में, $AP = PB = 4$ सेमी तथा $CP = 2$ सेमी

चूँकि जीवाएँ AB व CD एक-दूसरे को वृत्त के अन्दर बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित करती हैं।

अत: $AP \times PB = CP \times PD$

या $PD = \dfrac{AP \times PB}{CP} = \dfrac{4 \times 4}{2} = \mathbf{8}$ **सेमी** **उत्तर**

6. संलग्न चित्र में, वृत्त का व्यास CD जीवा AB को समकोण पर बिन्दु P पर समद्विभाजित करता है। यदि $AP = 6$ सेमी तथा $CP = 4$ सेमी है, तो रेखाखंड PD की माप ज्ञात कीजिए।



हल— चूँकि व्यास CD जीवा AB को बिन्दु P पर समद्विभाजित करता है।

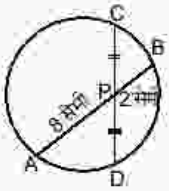
अत: $AP = PB = 6$ सेमी

अब, जीवा AB तथा जीवा CD एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती है।

$\therefore$ $AP \times PB = CP \times PD$

या $PD = \dfrac{AP \times PB}{CP} = \dfrac{6 \times 6}{4} = \mathbf{9}$ **सेमी** **उत्तर**

7. संलग्न चित्र में, वृत्त की दो जीवाएँ AB व CD एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती हैं। जीवा CD का मध्य-बिन्दु P है। यदि $AP=8$ सेमी तथा $PB=2$ सेमी है, तो जीवा CD की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है—जीवा CD का मध्य बिन्दु P है।

अतः $CP=PD$ तथा $AP=8$ सेमी, $PB=2$ सेमी

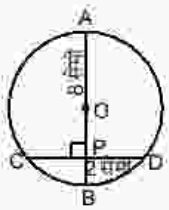
∵ जीवा AB व CD एक-दूसरे के बिन्दु P पर काटती है।

$\therefore \quad AP\times PB=CP\times PD \quad$ या $\quad 8\times 2=CP\times CP$

या $\quad 16=CP^2 \Rightarrow CP=\sqrt{16}=4=PD$

$CD=CP+PD=4+4=$ **8 सेमी** **उत्तर**

8. संलग्न चित्र में, $AP=8$ सेमी, $BP=2$ सेमी तथा $\angle CPA=90^\circ$ हैं। जीवा CD की माप ज्ञात कीजिए।



हल– हम जानते हैं कि वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

यहाँ $\quad OP\perp CD$

अतः $\quad CP=PD=?$

अब जीवा AB व जीवा CD परस्पर एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती हैं।

अतः $\quad AP\times PB=CP\times PD$

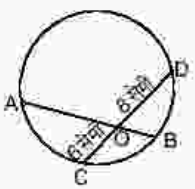
या $\quad AP\times PB=CP\times CP$

या $\quad CP^2=AP\times PB \quad$ या $\quad CP^2=8\times 2=16$

या $\quad CP=\sqrt{16}=4=PD$

$CD=CP+PD=4+4=$ **8 सेमी** **उत्तर**

9. संलग्न चित्र में, वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटती हैं। $AB=16$ सेमी, $OC=6$ सेमी तथा $OD=8$ सेमी है। यदि $OB<OA$ है, तो रेखाखंड OB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल—प्रश्नानुसार, $\quad AB=16$ सेमी

या $\quad AO+OB=16$

$\Rightarrow \quad OA=(16-OB) \quad ...(1)$

चूँकि जीवा AB व जीवा CD एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटती हैं।

अतः $\quad AO\times OB=CO\times OD \quad$ या $\quad AO\times OB=6\times 8$

या $\quad AO\times OB=48 \quad ...(2)$

या $\quad (16-OB)OB=48 \quad$ या $\quad 16OB-OB^2=48$

या $\quad OB^2-16OB+48=0$

या $\quad OB^2-12OB-4OB+48=0$

या $\quad OB(OB-12)-4(OB-12)=0$

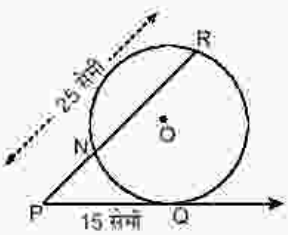
या $\quad (OB-12)(OB-4)=0$

अब, यदि $OB-12=0$ तो $OB=12$ तब $OA=16-12=4$ सेमी

तथा यदि $OB-4=0$ तो $OB=4$ तब $OA=16-4=12$ सेमी

चूँकि $OB < OA$ अतः $OB = 4$ सेमी **उत्तर**

10. संलग्न चित्र में, वृत्त की स्पर्शी PQ है। छेदक-रेखा PNR, वृत्त को बिन्दुओं N तथा R पर काटती है। $PQ = 15$ सेमी तथा $PR = 25$ सेमी है, तो रेखाखंड PN की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में $PQ = 15$ सेमी, $PR = 25$ सेमी तथा PQ वृत्त की स्पर्श रेखा तथा PNR बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर खींची गई छेदक-रेखा है।

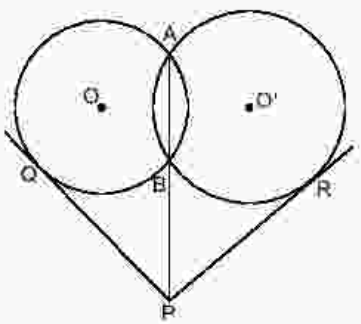
अतः $PN \times PR = PQ^2$ या $PN \times 25 = 15^2$

या $PN \times 25 = 225$ या $PN = \frac{225}{25} = 9$ सेमी **उत्तर**

11. दो वृत्त एक-दूसरे को बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं। वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा AB के बढ़ाए हुए भाग पर स्थित एक बिन्दु P से दोनों वृत्तों पर स्पर्श रेखाएँ PQ तथा PR खींची गई हैं, जो वृत्तों को बिन्दुओं Q तथा R पर स्पर्श करती हैं। सिद्ध कीजिए कि—

$$PQ = PR$$

हल– ज्ञात है—दो वृत्त जिनके केन्द्र O व O' हैं, एक-दूसरे को बिन्दुओं A व B पर काटते हैं। उभयनिष्ठ जीवा AB के बढ़ाए हुए भाग पर स्थित बिन्दु P से वृत्तों पर स्पर्श रेखाएँ PQ व PR खींची गई है।



सिद्ध करना है— $PQ = PR$

उपपत्ति— ∵ केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखा PQ तथा छेदक-रेखा PBA है।

अतः $PB \times PA = PQ^2$ ...(1)

इसी प्रकार, केन्द्र O' वाले वृत्त की स्पर्श रेखा PR तथा छेदक-रेखा PBA है।

अतः $PB \times PA = PR^2$ ...(2)

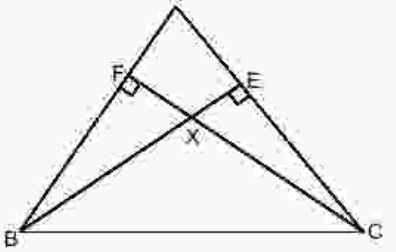
समीकरण (1) व (2) से

$PQ^2 = PR^2$ या $PQ = PR$ **इति सिद्धम्**

12. एक ΔABC के शीर्षों B तथा C के सम्मुख भुजाओं CA तथा AB पर डाले गए लम्ब क्रमशः BE तथा CF एक-दूसरे को बिन्दु X पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि—

$$BX \,.\, XE = CX \,.\, XF$$

हल– ज्ञात है—ΔABC के शीर्षों B तथा C से सम्मुख भुजाओं पर डाले लम्ब क्रमशः BE तथा CF हैं, जो एक-दूसरे को बिन्दु X पर प्रतिच्छेद करते हैं।



सिद्ध करना है—

$BX \,.\, XE = CX \,.\, XF$

उपपत्ति— ΔBXF तथा ΔCXE में,

$\angle BXF = \angle CXE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle XFB = \angle XEC$ (प्रत्येक समकोण)

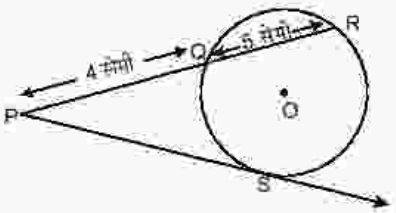
अत: $\angle FBX$ स्वत: ही $\angle XEC$ के बराबर होगा।

$\therefore \Delta BXF$ और ΔCXE समरूप त्रिभुज हैं।

$\Rightarrow \quad \frac{BX}{XF} = \frac{CX}{XE}$ (समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपात में होती हैं)

या $\quad BX \cdot XE = CX \cdot XF$ **इति सिद्धम्**

13. दिए गए चित्र में, वृत्त की स्पर्श रेखा PS तथा छेदक रेखा PQR है। यदि $PQ = 4$ सेमी तथा $QR = 5$ सेमी है तो स्पर्श रेखा PS की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, चित्र में

$PQ = 4$ सेमी,

$QR = 5$ सेमी

अत: $\quad PR = PQ + QR = 4 + 5 = 9$ सेमी

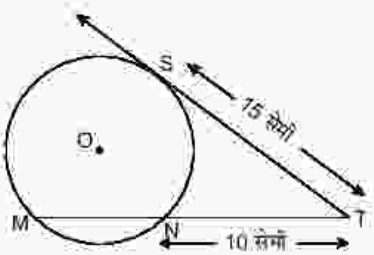
∵ वृत्त की स्पर्श रेखा PS तथा छेदक-रेखा PQR है।

$\therefore \quad PQ \times PR = PS^2$ या $PS^2 = PQ \times PR$

या $\quad PS^2 = 4 \times 9 = 36$

या $\quad PS = \sqrt{36} = \mathbf{6}$ **सेमी** **उत्तर**

14. दिए गए चित्र में, O केन्द्र वाला एक वृत्त है, जिसकी एक छेदक रेखा MNT तथा TS एक स्पर्श रेखा है। यदि $TS = 15$ सेमी तथा $TN = 10$ सेमी है तो जीवा MN की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

$TS = 15$ सेमी

तथा $\quad TN = 10$ सेमी

चूँकि MNT वृत्त की छेदक-रेखा तथा TS स्पर्श रेखा है।

अत: $\quad MT \times TN = TS^2$

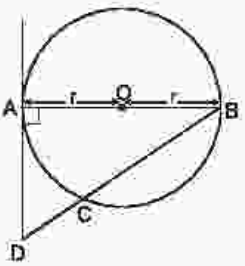
या $\quad MT = \frac{TS^2}{TN} = \frac{15^2}{10} = \frac{225}{10} = 22.5$ सेमी

$MN = MT - TN = 22.5 - 10 = \mathbf{12.5}$ **सेमी** **उत्तर**

15. एक वृत्त का व्यास AB है। बिन्दु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा AD तथा बिन्दु B से खींची गई वृत्त की एक छेदक रेखा BD परस्पर बिन्दु D पर मिलती हैं। छेदक रेखा BD, वृत्त को बिन्दु C पर काटती है। यदि वृत्त की त्रिज्या r है, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$BD \times BC = 4r^2$$

हल– ज्ञात है—केन्द्र O वाले वृत्त का व्यास AB है, जिसके बिन्दु A से खींची गई स्पर्श रेखा AD तथा बिन्दु B से खींची गई छेदक रेखा परस्पर बिन्दु D पर मिलती है। वृत्त की त्रिज्या $\left(\frac{AB}{2}\right)=r$ है।



सिद्ध करना है— $BD\times BC=4r^2$

उपपत्ति—चूँकि AD वृत्त की स्पर्शी तथा BD छेदक रेखा है।

अत:

$$AD^2=DC\times BD \qquad ...(1)$$

चूँकि स्पर्श बिन्दु पर वृत्त का व्यास स्पर्श रेखा के लम्बवत् होता है।

अत: ΔABD समकोणीय है।

$\therefore$ समकोण ΔABD में, $BD^2=AD^2+AB^2$

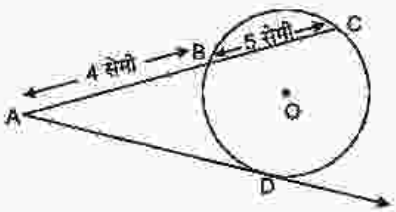
या $BD^2=DC\times BD+(2r)^2$

या $BD^2-DC\times BD=4r^2$

या $BD(BD-DC)=4r^2$

या $BD\times BC=4r^2$ **इति सिद्धम्**

16. संलग्न चित्र में, वृत्त की स्पर्श रेखा AD तथा छेदक रेखा ABC है। यदि $AB=4$ सेमी तथा $BC=5$ सेमी है, तो स्पर्श रेखा AD की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, $AB=4$ सेमी, $BC=5$ सेमी

अत: $AC=AB+BC$

$=4+5=9$ सेमी

$\because$ दिए गए वृत्त की स्पर्श रेखा AD तथा छेदक-रेखा AC है।

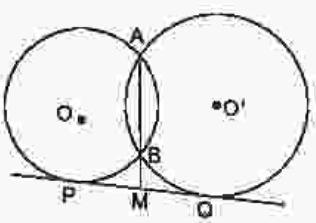
$\therefore$ $AD^2=AB\times AC$ या $AD^2=4\times 9$

या $AD^2=36 \Rightarrow AD=\sqrt{36}=6$ सेमी **उत्तर**

17. दो वृत्त एक-दूसरे को दो बिन्दुओं पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा वाली रेखा वृत्तों के उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाखंड को समद्विभाजित करती है।

हल– ज्ञात है—केन्द्र O व O' वाले दो वृत्त जो परस्पर एक-दूसरे को बिन्दुओं A व B पर काटते हैं। उभयनिष्ठ जीवा AB वाली रेखा उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाखण्ड को बिन्दु M पर मिलती है।

सिद्ध करना है— $MP=MQ$



उपपत्ति— ∵ केन्द्र O वाले वृत्त की छेदक रेखा MA तथा स्पर्श रेखा MP है।

$\therefore \quad MP^2 = MB \times MA$ ...(1)

∵ केन्द्र O' वाले वृत्त की छेदक-रेखा MA तथा स्पर्श रेखा MQ है।

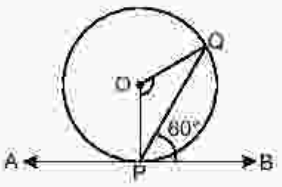
$\therefore \quad MQ^2 = MB \times MA$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$MP^2 = MQ^2$ या $MP = MQ$ **इति सिद्धम्**

अभ्यास 12.3

1. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। वृत्त के बिन्दु P पर APB स्पर्श रेखा है। यदि $\angle QPB = 60°$ तो $\angle POQ$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा APB है।

हम जानते हैं कि वृत्त की त्रिज्या स्पर्श बिन्दु पर लम्बवत होती है।

अत: $\angle OPB = 90°$

$\angle OPQ = \angle OPB - \angle QPB$

$= 90° - 60° = 30°$

ΔOPQ में,

$OP = OQ$ (वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$\therefore \quad \angle OQP = \angle OPQ$ या $\angle OQP = 30°$

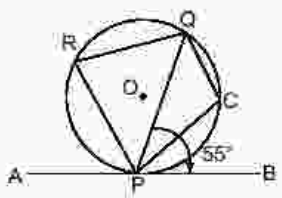
पुन: ΔOPQ में,

$\angle POQ = 180° - (\angle OPQ + \angle OQP)$

$= 180° - (30° + 30°)$

$= 180° - 60° = \mathbf{120°}$ **उत्तर**

2. चित्र में, वृत्त की जीवा PQ तथा बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा APB है। यदि $\angle QPB = 55°$ है तो $\angle PRQ$ तथा $\angle PCQ$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल—चित्रानुसार, $\angle QPA + \angle QPB = 180°$

$\angle QPA + 55° = 180°$

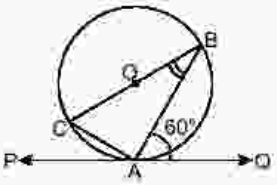
$\angle QPA = 180° - 55° = 125°$

$\angle PRQ = \angle QPB = \mathbf{55°}$ (∵ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)

$\angle PCQ = \angle QPA = \mathbf{125°}$ (∵ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)

उत्तर

3. चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। वृत्त के बिन्दु A पर स्पर्श रेखा PAQ है। वृत्त का व्यास BOC है। यदि $\angle BAQ = 60°$ तो $\angle ABC$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, $\angle BAQ = 60°$

$\angle BCA = \angle BAQ = 60°$ ($\because$ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)

$\because$ $\angle BAC$ अर्द्धवृत्त में स्थित कोण है।

$\therefore$ $\angle BAC = 90°$

अब, ΔABC में,

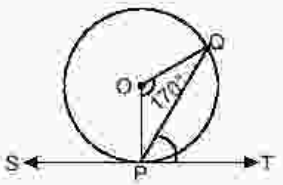
$\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 180°$

या $\angle ABC + 60° + 90° = 180°$

या $\angle ABC + 150° = 180°$

या $\angle ABC = 180° - 150° = \mathbf{30°}$ **उत्तर**

4. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। स्पर्श रेखा SPT वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है। वृत्त की जीवा PQ है। यदि $\angle POQ = 170°$ तब $\angle QPT$ ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखा SPT वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

अतः $OP \perp SPT$

$\therefore$ $\angle OPT = 90°$

ΔOPQ में,

$OQ = OP$ (वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$\therefore$ $\angle OPQ = \angle OQP$ ...(1)

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

पुनः ΔOPQ में,

$\angle OPQ + \angle OQP + \angle POQ = 180°$

या $\angle OPQ + \angle OPQ + \angle POQ = 180°$ (समीकरण (1) से)

या $2\angle OPQ + \angle POQ = 180°$

या $2\angle OPQ + 170° = 180°$

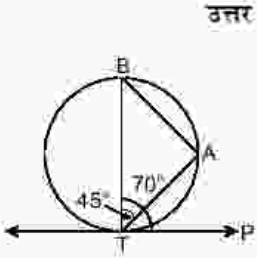
या $2\angle OPQ = 180° - 170° = 10°$

या $\angle OPQ = 5°$

परन्तु $\angle QPT = \angle OPT - \angle OPQ$

$= 90° - 5° = \mathbf{85°}$ **उत्तर**

5. संलग्न चित्र में, PT एक वृत्त की स्पर्शी है। यदि $\angle BTA = 45°$ तथा $\angle PTB = 70°$ हो, तो $\angle ABT$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

$\angle BTA = 45°$

तथा $\angle PTB = 70°$

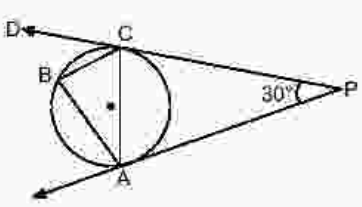
अतः $\angle PTA = \angle PTB - BTA$

$= 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ$

$\angle ABT = \angle PTA = \mathbf{25^\circ}$ ($\because$ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)

उत्तर

6. संलग्न चित्र में वृत्त के बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PC खींची गई हैं जिनके बीच के $\angle APC$ की माप 30° है। बिन्दु C से स्पर्श रेखा PA के समान्तर वृत्त की जीवा CB खींची गई है। $\angle BAC$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, बिन्दु P से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ PA व PC हैं।

अतः $PA = PC$

ΔAPC में,

$PA = PC \Rightarrow \angle PCA = \angle PAC$

पुनः ΔAPC में,

$\angle PCA + \angle PAC + \angle APC = 180^\circ$

या $\angle PAC + \angle PAC + \angle APC = 180^\circ$

या $2\angle PAC + \angle APC = 180^\circ$

या $2\angle PAC + 30^\circ = 180^\circ$

या $2\angle PAC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

या $\angle PAC = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$

प्रश्नानुसार, $CB \parallel PA$ तथा CA इनकी तिर्यक रेखा है।

अतः $\angle BCA = \angle PAC$ (एकान्तर कोण)

या $\angle BCA = 75^\circ$

तथा $\angle ABC = \angle PAC$ ($\because$ एकान्तर वृत्तखंड के कोण हैं)

$= 75^\circ$

ΔABC में,

$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$

या $\angle BAC + 75^\circ + 75^\circ = 180^\circ$

या $\angle BAC + 150^\circ = 180^\circ$

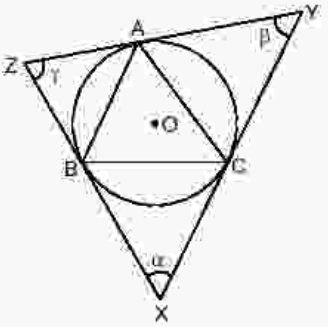
या $\angle BAC = 180^\circ - 150^\circ = \mathbf{30^\circ}$ **उत्तर**

7. एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, पर बिन्दु A, B और C हैं। इन बिन्दुओं पर वृत्त की खींची गई स्पर्श रेखाओं से एक त्रिभुज XYZ बनता है। यदि ΔXYZ के $\angle X = \alpha$, $\angle Y = \beta$ तथा $\angle Z = \gamma$ तब ΔABC के कोण ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार, केन्द्र O वाले वृत्त पर बिन्दु A, B तथा C स्थित हैं। इन बिन्दुओं से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ एक ΔXYZ बनाती हैं।

ΔXYZ के कोण α, β व γ हैं, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है।

∵ बिन्दु Y से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ YB तथा YC हैं।



$\therefore$ $YB = YC$

ΔBXC में, $XB = XC$

$\Rightarrow$ $\angle XCB = \angle XBC$ ...(1)

पुनः ΔBXC में,

$\angle XBC + \angle XCB + \angle BXC = 180°$

या $\angle XBC + \angle XBC + \angle BXC = 180°$

(समीकरण (1) से)

या $2\angle XBC = 180° - \alpha$

या $\angle XBC = \frac{180° - \alpha}{2}$

या $\angle XBC = \frac{180°}{2} - \frac{\alpha}{2}$

या $\angle XBC = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$\angle BAC = \angle XBC = 90° - \frac{\alpha}{2}$

(∵ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण है)

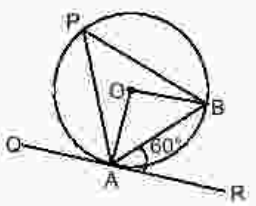
इसी प्रकार, ज्ञात किया जा सकता है कि

$\angle ABC = 90° - \frac{\beta}{2}$

$\angle BCA = 90° - \frac{\gamma}{2}$

अतः ΔABC के कोण क्रमशः $\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right), \left(90° - \frac{\beta}{2}\right)$ तथा $\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$ हैं। **उत्तर**

8. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। रेखा QAR वृत्त की बिन्दु A पर स्पर्श रेखा और AB जीवा है। यदि $\angle BAR = 60°$ तो $\angle AOB$ तथा $\angle OBA$ के मान ज्ञात कीजिए।



हल—प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

$\angle BAR = 60°$

$\angle APB = \angle BAR = 60°$

(∵ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण है)

∵ $\angle AOB$ तथा $\angle APB$ जीवा AB द्वारा क्रमशः केन्द्र और वृत्त पर अंतरित कोण हैं।

$\therefore$ $\angle AOB = 2\angle APB = 2 \times 60° = 120°$

ΔOAB में, $OA = OB$ (वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$\Rightarrow$ $\angle OBA = \angle OAB$ ...(1)

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण हैं)

पुनः ΔOAB में,

$\angle OBA + \angle OAB + \angle AOB = 180^\circ$ (समीकरण (1) से)

या $\angle OBA + \angle OBA + \angle AOB = 180^\circ$

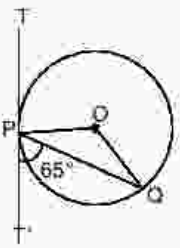
या $2\angle OBA + 120^\circ = 180^\circ$

या $2\angle OBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

या $\angle OBA = 30^\circ$

अतः $\angle ABO = 120^\circ$ तथा $\angle OBA = 30^\circ$ **उत्तर**

9. दिए गए चित्र में TPT' वृत्त की स्पर्श रेखा है। $\angle QPT' = 65^\circ$ हो, तो $\angle POQ$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल—प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

$\angle QPT' = 65^\circ$, OP वृत्त की त्रिज्या तथा TPT' स्पर्श रेखा है।

चूँकि वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

$\therefore \quad \angle OPT' = 90^\circ$

$\angle OPQ = \angle OPT' - \angle QPT'$

$= 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$

ΔOPQ में, $OP = OQ$ (वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$\Rightarrow \quad \angle OQP = \angle OPQ$

$= 25^\circ$

पुनः ΔOPQ में,

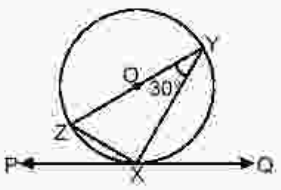
$\angle POQ + \angle OQP + \angle OPQ = 180^\circ$

या $\angle POQ + 25^\circ + 25^\circ = 180^\circ$

या $\angle POQ + 50^\circ = 180^\circ$

या $\angle POQ = 180^\circ - 50^\circ = \mathbf{130^\circ}$ **उत्तर**

10. संलग्न चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। PXQ वृत्त की स्पर्श रेखा है। YOZ वृत्त का व्यास है। यदि $\angle XYZ = 30^\circ$ हो, तो $\angle YXQ$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल—प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, YOZ वृत्त का व्यास है।

अतः $\angle YXZ$ अर्द्धवृत्त में निर्मित कोण है।

$\therefore \quad \angle YXZ = 90^\circ$

ΔXYZ में,

$\angle YZX + \angle YXZ + \angle XYZ = 180^\circ$

या $\angle YZX + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$

या $\angle YZX + 120^\circ = 180^\circ$

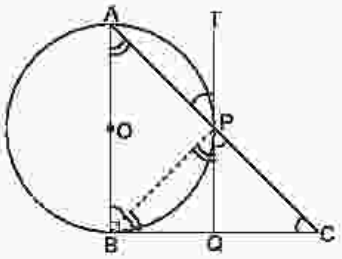
या $\angle YZX = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\because \angle YXQ$ तथा $\angle YZX$ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण हैं।

$\therefore \quad \angle YXQ = \angle YZX = \mathbf{60^\circ}$ **उत्तर**

11. एक समकोण त्रिभुज ABC में भुजा AB को व्यास मानकर एक वृत्त खींचा गया है, जो कर्ण AC को P पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा भुजा BC को समद्विभाजित करती है।

हल– ज्ञात है—समकोण ΔABC जिसमें $\angle B = 90°$ है। भुजा AB को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त कर्ण AC को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करता है। बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श TPQ भुजा BC को बिन्दु Q पर मिलती है।



सिद्ध करना है—Q, भुजा BC का मध्य-बिन्दु है।

अर्थात् $BQ = QC$

रचना—बिन्दु B व P को मिलाया।

उपपत्ति—

$\angle APB = 90°$ (अर्द्धवृत्त में स्थित कोण)

तथा $\angle APT = \angle ABP$ (एकान्तर वृत्तखंड के कोण)

परन्तु $\angle APT = \angle CPQ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore$ $\angle APT = \angle ABP = \angle CPQ$ ...(1)

बिन्दु Q से वृत्त की दो स्पर्शियाँ QP व QB हैं।

अत: $QB = QP$ ...(2)

ΔABP तथा ΔBPC में,

$\angle BAP = \angle PBC$ (एकान्तर वृत्तखंड के कोण)

$\angle APB = \angle BPC = 90°$ (प्रत्येक समकोण)

अत: शेष $\angle ABP$ = शेष $\angle BCP$

या $\angle ABP = \angle QCP$ ...(3)

समीकरण (1) व (3) से

$\angle CPQ = \angle QCP$

$\Rightarrow$ $QC = QP$ ...(4)

(बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

समीकरण (2) व (4) से

$QB = QC$

या $BQ = QC$ **इति सिद्धम्**

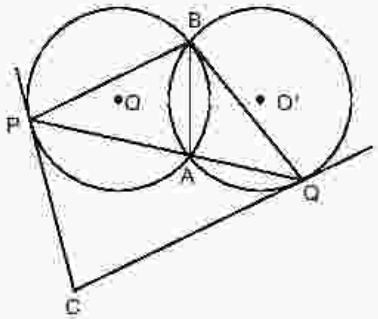
12. दो वृत्त एक-दूसरे को बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं। एक वृत्त के बिन्दु P से खींची गई सरल रेखा PAQ दूसरे वृत्त के बिन्दु Q पर मिलती है, यदि बिन्दुओं P तथा Q पर खींची गई वृत्तों की स्पर्श रेखाएँ एक-दूसरे को बिन्दु C पर काटती हैं तो सिद्ध कीजिए P, B, Q और C एकवृत्तीय हैं।

हल– ज्ञात है—दो वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं, एक-दूसरे को बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं। एक वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु P से एक छेदक रेखा PAQ खींची गई जो दूसरे वृत्त को बिन्दु Q पर मिलती है। बिन्दुओं P तथा Q से वृत्तों पर क्रमश: PC तथा QC स्पर्श रेखाएँ खींची गई जो परस्पर बिन्दु C पर मिलती है।

सिद्ध करना है—बिन्दु P, B, Q और C एकवृत्तीय

अर्थात् चतुर्भुज $PBQC$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति—केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखा PC तथा जीवा PA है।



$\therefore \quad \angle APC = \angle PBA$ (एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)

या $\quad \angle QPC = \angle PBA$ ...(1)

केन्द्र O' वाले वृत्त की स्पर्श रेखा QC तथा जीवा QA है।

$\therefore \quad \angle AQC = \angle QBA$ (एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)

या $\quad PQC = \angle QBA$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$\angle QPC + \angle PQC = \angle PBA + \angle QBA$$

या $\quad \angle QPC + \angle PQC = \angle PBQ$ ...(3)

परन्तु ΔPCQ में,

$$\angle QPC + \angle PQC + \angle C = 180^\circ$$

या $\quad \angle QPC + \angle PQC = 180^\circ - \angle C$ ...(4)

समीकरण (3) व (4) से,

$$\angle PBQ = 180^\circ - \angle C \quad \text{या} \quad \angle PBQ + \angle C = 180^\circ$$

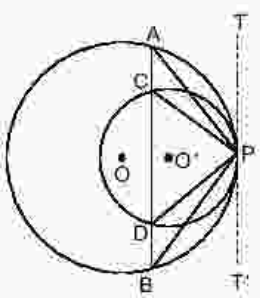
अर्थात् $\angle PBQ$ व $\angle C$ एक-दूसरे के सम्पूरक हैं।

$\therefore$ चतुर्भुज $PBQC$ चक्रीय है।

अतः बिन्दु P, B, Q और C वृत्तीय है। **इति सिद्धम्**

13. दो वृत्त एक-दूसरे को बिन्दु P पर अन्तः स्पर्श करते हैं। बाह्य वृत्त की एक जीवा AB अन्तः वृत्त को बिन्दुओं C तथा D पर काटती है। सिद्ध कीजिए कि रेखाखंड AC तथा रेखाखंड DB बिन्दु P पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।

हल— ज्ञात है—दो वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं, एक-दूसरे को बिन्दु P पर अन्तःस्पर्श करते हैं। बाह्य वृत्त की जीवा AB अन्तः वृत्त को बिन्दु C व D पर काटती है।



सिद्ध करना है— $\quad \angle APC = \angle BPD$

रचना—बिन्दु P से वृत्तों की एक स्पर्श रेखा TPT' खींचिए।

उपपत्ति—छोटे वृत्त की जीवा CP तथा स्पर्श रेखा TPT' के बीच का कोण

$$\angle TPC = \angle CDP \quad ...(1)$$

(एकान्तर वृत्तखंड के कोण)

बड़े वृत्त की जीवा AP तथा स्पर्श रेखा TPT' के बीच का कोण

$$\angle TPA = ABP \quad ...(2) \quad \text{(एकान्तर वृत्तखंड का कोण)}$$

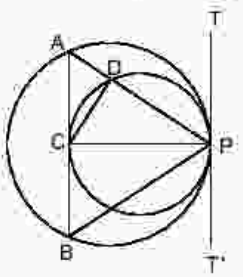
समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर,

$$\angle TPC - \angle TPA = \angle CDP - \angle ABP$$

या $$\angle APC = \angle BPD \quad [\because \text{बहिष्कोण } CDP = \angle ABP + \angle BDP]$$

इति सिद्धम्

14. दो वृत्त एक-दूसरे को किसी बिन्दु P पर अन्तः स्पर्श करते हैं। बड़े वृत्त की कोई जीवा AB खींची जाती है, जो छोटे वृत्त को बिन्दु C पर स्पर्श करती है। सिद्ध कीजिए कि रेखाखंड CP, $\angle APB$ का अर्द्धक है।



हल– ज्ञात है—दो वृत्त जो एक-दूसरे को बिन्दु P पर अन्तः स्पर्श करते हैं। बड़े वृत्त की जीवा AB, छोटे वृत्त को बिन्दु C पर स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है—रेखाखंड CP, $\angle APB$ का अर्द्धक है।

अर्थात् $$\angle APC = \angle BPC$$

रचना—छोटे वृत्त की जीवा CD खींची तथा स्पर्श बिन्दु P पर एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा TPT' खींची।

उपपत्ति—∵ बिन्दु P पर छोटे वृत्त की जीवा PD तथा स्पर्श रेखा PT है।

$$\therefore \quad \angle TPD = \angle PCD \quad ...(1) \quad \text{(एकान्तर वृत्तखंड का कोण)}$$

∵ बिन्दु P पर बड़े वृत्त की जीवा PA तथा स्पर्श रेखा PT है,

$$\therefore \quad \angle TPA = \angle ABP \quad \text{(एकान्तर वृत्तखंड का कोण)}$$

या $$\angle TPD = \angle CBP$$

या $$\angle PCD = \angle CBP \quad ...(2) \quad \text{(समीकरण (1) से)}$$

∵ बिन्दु C पर छोटे वृत्त की जीवा CP तथा स्पर्श रेखा BC है।

$$\therefore \quad \angle BCP = \angle CDP \quad ...(3)$$

अब, ΔPDC और PBC में,

$$\angle PCD = \angle CBP \quad \text{(सिद्ध किया गया है)}$$

$$\angle CDP = \angle BCP \quad \text{(सिद्ध किया गया है)}$$

शेष $\angle DPC =$ शेष $\angle BPC$

या $$\angle APC = \angle BPC$$

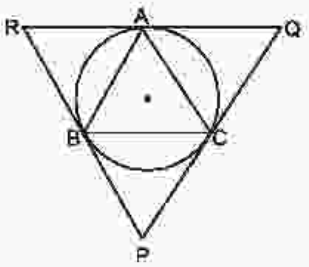
अर्थात् **रेखाखंड CP, $\angle APB$ का अर्द्धक है।** **इति सिद्धम्**

15. एक वृत्त पर तीन बिन्दु A, B व C स्थित हैं। इन बिन्दुओं पर वृत्त की स्पर्श रेखाएँ क्रमशः QR, RP तथा PQ खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए—

$$\angle CAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle QPR$$

हल– ज्ञात है—एक वृत्त जिस पर तीन बिन्दु A, B व C स्थित हैं। इन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ QR, RP तथा PQ खींची गई हैं।

सिद्ध करना है— $$\angle CAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle QPR$$



उपपत्ति— ∵ स्पर्श रेखाएँ PQ व PR वृत्त के बिन्दुओं C व B पर स्पर्श करती हैं।

$\therefore \quad PC = PB$

$\Rightarrow \quad \angle PBC = \angle PCB \quad ...(1)$

परन्तु ΔPBC में,

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180°$

या $\quad \angle BPC + \angle PCB + \angle PCB = 180°$

(समीकरण (1) से)

या $\quad \angle BPC + 2\angle PCB = 180°$

या $\quad 2\angle PCB = 180° - \angle BPC$

या $\quad \angle PCB = 90° - \dfrac{\angle BPC}{2} \quad ...(2)$

∵ PQ स्पर्श रेखा है और स्पर्श बिन्दु C से जीवा BC है।

$\therefore \angle PCB$ = एकान्तर वृत्तखंड में बना कोण $= \angle CAB$

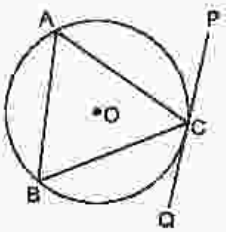
या $\quad \angle CAB = \angle PCB$

या $\quad \angle CAB = 90° - \dfrac{\angle BPC}{2}$

या $\quad \angle CAB = 90° - \dfrac{\angle QPR}{2} \quad (\because \angle BPC = \angle QPR)$

इति सिद्धम्

16. किसी वृत्त की एक जीवा AB, वृत्त के बिन्दु C पर खींची गई स्पर्श रेखा PCQ के समान्तर हैं। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु C, चाप ACB को समद्विभाजित करता है।



हल— **ज्ञात है**—केन्द्र O वाला एक वृत्त है जिसकी एक जीवा AB, वृत्त के बिन्दु C पर खींची गई स्पर्श रेखा PCQ के समान्तर है।

सिद्ध करना है—बिन्दु C, चाप ACB को समद्विभाजित करता है।

अर्थात् $\quad$ चाप BC = चाप AC

रचना—जीवाएँ AC तथा BC खींची।

उपपत्ति— ∵ $AB \parallel PQ$ तथा AC तिर्यक रेखा है।

$\therefore \quad \angle BAC = \angle PCA \quad ...(1)$ (एकान्तर कोण)

वृत्त के बिन्दु C पर स्पर्श रेखा PQ तथा जीवा AC है।

अत: $\quad \angle PCA = \angle ABC \quad ...(2)$ (एकान्तर वृत्त खण्ड के कोण)

समीकरण (1) व (2) से,

$\angle BAC = \angle ABC$

अब, ΔABC में, $\quad \angle BAC = \angle ABC$ (सिद्ध किया गया है)

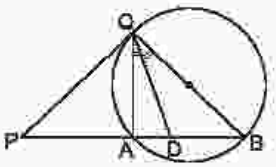
$\Rightarrow \quad BC = AC$

∵ किसी वृत्त में समान जीवाएँ समान चाप अंतरित करती हैं।

$\therefore \quad$ चाप BC = चाप AC

अत: **बिन्दु C चाप ACB का मध्य बिन्दु है। अर्थात् बिन्दु C, चाप ACB को समद्विभाजित करता है।** इति सिद्धम्

17. दिए गए चित्र में, PAB वृत्त की एक छेदक रेखा है तथा PQ स्पर्श रेखा है। यदि $\angle AQB$ का अर्द्धक, AB को D पर काटे तो सिद्ध कीजिए— $PQ = PD$



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, वृत्त की स्पर्शी PQ तथा QA एक जीवा है।

$\therefore \quad \angle PQA = \angle QBD$ ...(1)

$\because$ QD, $\angle AQB$ का अर्द्धक है।

$\therefore \quad \angle AQD = \angle BQD$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$\angle PQA + \angle AQD = \angle QBD + \angle BQD$

या $\quad \angle PQD = \angle QBD + \angle BQD$ ...(3)

$\because$ ΔBQD का बहिष्कोण $\angle QDP$ है।

$\therefore \quad \angle QDP = \angle QBD + \angle BQD$ ...(4)

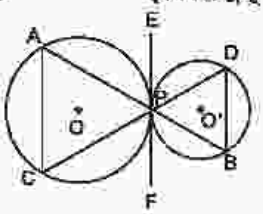
समीकरण (3) व (4) से,

$\angle PQD = \angle QDP$

ΔPQD में, $\quad \angle PQD = \angle QDP$

$\Rightarrow \quad PD = PQ \Rightarrow PQ = PD$ इति सिद्धम्

18. दिए गए चित्र में, दो वृत्त एक-दूसरे को बिन्दु P पर बाह्यतः स्पर्श करते हैं। बिन्दु P से दो छेदक रेखाएँ APB और CPD खींची जाती हैं, जो वृत्तों को A, B, C तथा D पर काटती हैं। सिद्ध कीजिए— $AC \parallel BD$



हल—दिए गए चित्र में,

$\angle APE = \angle BPF$ ...(1) (सम्मुख कोण)

$\because$ केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्शी EP तथा एक जीवा AP है।

$\therefore \quad \angle APE = \angle ACP$ (एकान्तर वृत्तखंड के कोण)

या $\quad \angle APE = \angle ACD$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$\angle BPF = \angle ACD$ ...(3)

$\because$ केन्द्र O' वाले वृत्त की स्पर्शी FP तथा एक जीवा BP है।

$\therefore \quad \angle BPF = \angle BDP$

या $\quad \angle BPF = \angle BDC$ ...(4)

समीकरण (3) व (4) से,

$\angle ACD = \angle BDC$

$\Rightarrow \quad AC \parallel BD$ इति सिद्धम्

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 249 से 251 तक का अवलोकन कीजिए।

13

ज्यामितीय रचनाएँ
(Geometrical Constructions)

अभ्यास 13.1

1. एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ 4.0 सेमी, 5.0 सेमी, और 6.0 सेमी हैं। इसके परिवृत्त की रचना कीजिए और त्रिज्या नापिए।

हल– दिया है— ΔABC में $AB = 4.0$ सेमी, $BC = 5.0$ सेमी, तथा $CA = 6.0$ सेमी

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिवृत्त की।

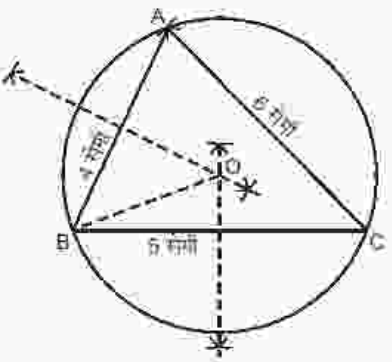
त्रिभुज की रचना के चरण— (i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5.0$ सेमी खींचा।

(ii) B को केन्द्र मानकर 4.0 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप खींचा।

(iii) C को केन्द्र मानकर 6.0 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से बिन्दु B और C को मिलाया।

इस प्रकार प्राप्त ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(v) ΔABC की दो भुजाओं AB तथा BC के लम्ब अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(vi) O को केन्द्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

यही अभीष्ट परिवृत्त है, जो ΔABC के तीनों शीर्षों से होकर जाता है। परिवृत्त की त्रिज्या मापने पर $OB = OC = OA = 2.7$ सेमी प्राप्त होती है।

2. 3.5 सेमी भुजा के एक समबाहु त्रिभुज का परिवृत्त खींचिए।

हल– ज्ञात है— समबाहु ΔABC जिसकी भुजा 3.5 सेमी है।

रचना करनी है— समबाहु ΔABC एवं इसके परिवृत्त की।

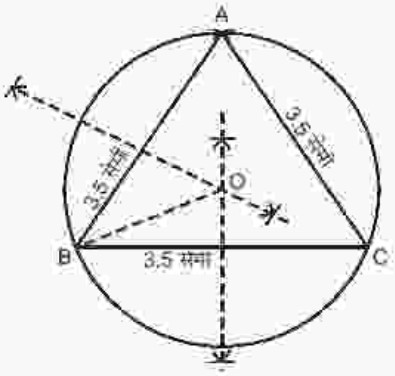
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 3.5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी की त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से B तथा C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 3.5 सेमी है।



त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) प्राप्त ΔABC की दो भुजाओं AB व BC के लम्ब अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो समबाहु ΔABC के शीर्षों से होकर जाता है। यही अभीष्ट परिवृत्त है।

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 8.0 सेमी तथा बराबर भुजाओं में से प्रत्येक 6.0 सेमी हो। इसके परिगत वृत्त की रचना कीजिए।

हल— ज्ञात है— समद्विबाहु ΔABC, जिसका आधार $BC = 8.0$ सेमी तथा बराबर भुजाएँ $AB = AC = 6.0$ सेमी

रचना करनी है— समद्विबाहु ΔABC एवं इसके परिगत वृत्त की।

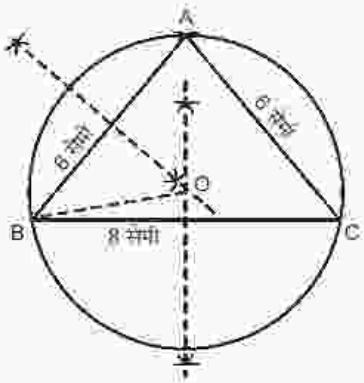
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 8.0$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 6.0 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 6.0 सेमी त्रिज्या का दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से बिन्दु B व C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज ABC के परिगत वृत्त की रचना के चरण—

(i) समद्विबाहु ΔABC की दो भुजाओं AB व BC के लम्ब अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो बिन्दुओं A, B तथा C से होकर जाता है। यही अभीष्ट परिगत वृत्त है।

4. एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा की माप 3 सेमी है। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए।

हल— ज्ञात है— 3 सेमी भुजा का एक समबाहु ΔPQR।

रचना करनी है— ΔPQR एवं इसके परिगत वृत्त की।

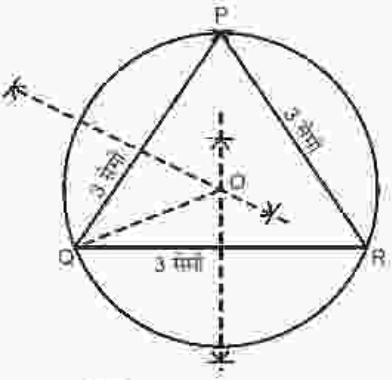
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $QR = 3$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु R को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु Q को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु P पर काटता है।

(iv) बिन्दु P से बिन्दु R व Q को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔPQR अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज PQR के परिगत वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔPQR की दो भुजाओं PQ तथा QR के लम्ब अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OQ त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो बिन्दुओं P, Q तथा R से होकर जाता है। यही ΔPQR का अभीष्ट परिगत वृत्त है।

5. ΔABC और उसके परिवृत्त की रचना कीजिए जबकि $BC = 6$ सेमी तथा $\angle B = 55°$ तथा $\angle C = 70°$।

हल— ज्ञात है— ΔABC जिसमें भुजा $BC = 6.0$ सेमी, $\angle B = 55°$ तथा $\angle C = 70°$।

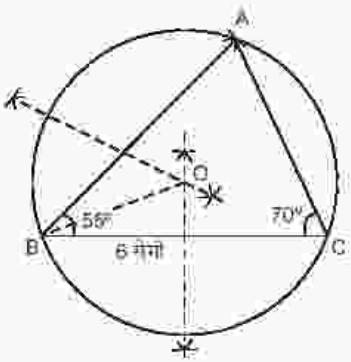
रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिवृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 6.0$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B पर $55°$ का कोण बनाता हुआ एक रेखाखंड खींचा।

(iii) बिन्दु C पर $70°$ का कोण बनाता हुआ एक रेखाखंड खींचा, जो बिन्दु B पर खींचे गए रेखाखंड को बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करता है। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज ABC के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) रेखाखंड AB और BC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर एवं OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो बिन्दुओं A व C से भी होकर जाता है। यह ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त है।

6. 4 सेमी भुजा के समबाहु त्रिभुज की रचना कर उसके परिवृत्त की रचना कीजिए।

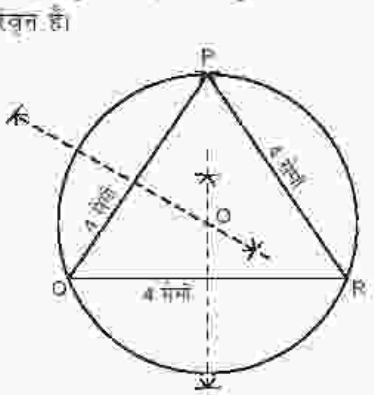
हल— ज्ञात है— समबाहु ΔPQR, जिसकी भुजा 4 सेमी है।

रचना करनी है— ΔPQR एवं इसके परिवृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $QR = 4$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु Q को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या का एक चाप लगाया गया।



(iii) बिन्दु R को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया जो पहले चाप को बिन्दु P पर काटता है।

(iv) बिन्दु P को बिन्दु Q व R से मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔPQR अभीष्ट त्रिभुज है।

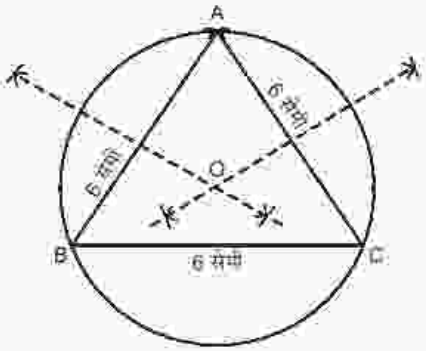
त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) भुजा PQ तथा QR के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OQ त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जो बिन्दु P, Q तथा R से होकर जाता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔPQR का अभीष्ट परिवृत्त है।

7. 6 सेमी भुजा के समबाहु त्रिभुज की रचना कर उसके परिवृत्त की रचना कीजिए।

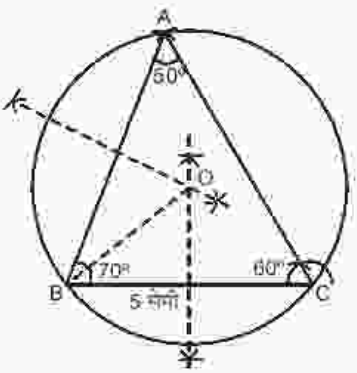
हल– रचना के चरण प्रश्न-6 के हल की भाँति लिखिए।



8. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 5$ सेमी, $\angle ACB = 60°$ और $\angle BAC = 50°$ है। ΔABC के परिवृत्त खींचिए।

हल– ज्ञात है— ΔABC, जिसमें भुजा $BC = 5$ सेमी, $\angle ACB = 60°$ तथा $\angle BAC = 50°$।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिवृत्त की।



त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु C पर $60°$ का कोण बनाता हुआ एक रेखाखंड खींचा।

(iii) बिन्दु B पर $180° - (60° + 50°) = 180° - 110° = 70°$ कोण बनाता हुआ रेखाखंड खींचा जो पहले रेखाखंड को बिन्दु A पर काटता है। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के रचण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB तथा BC पर लम्बअर्द्ध खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जो बिन्दुओं A, B व C से होकर जाता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त है।

9. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें शीर्ष A से भुजा BC पर खींचा गया लम्ब = 4.2 सेमी, $\angle B = 44°$, $\angle C = 56°$। ΔABC के परिवृत्त की रचना कीजिए। ΔABC के परिवृत्त की त्रिज्या की माप बताइए।

हल—ज्ञात है— ΔABC में $\angle B = 44°$, $\angle C = 56°$ तथा शीर्ष A से भुजा BC पर लम्ब $AD = 4.2$ सेमी।

रचना करनी है—ΔABC एवं इसके परिवृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड XY खींचा।

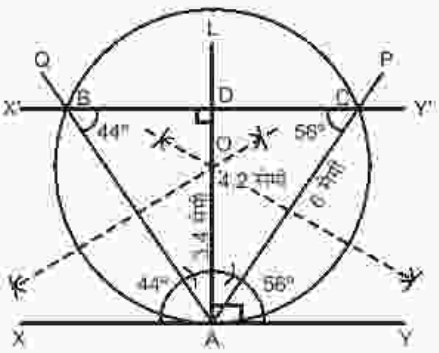
(ii) रेखाखंड XY पर बिन्दु A लिया।

(iii) बिन्दु A पर लम्ब रेखाखंड LA खींचा।

(iv) लम्ब रेखाखंड AL पर एक बिन्दु D इस प्रकार लिया कि $AD = 4.2$ सेमी।

(v) बिन्दु D से होकर एक ऋजु रेखा $X'Y' \parallel XY$ खींची।

(vi) बिन्दु A से $\angle XAQ = 44° = \angle B$ तथा $\angle YAP = 56° = \angle C$ बनाते हुए रेखाखंड खींचे, जो रेखा $X'Y'$ को क्रमशः बिन्दु B व C पर काटते हैं। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) भुजाओं AB तथा AC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जो ΔABC के शीर्षों से होकर जाता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त दिए गए ΔABC का अभीष्ट परिगत वृत्त है, जिसकी त्रिज्या मापने पर 3.4 सेमी आती है।

10. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें भुजा $AB = 4.9$ सेमी, $BC = 6.0$ सेमी तथा $CA = 7.0$ सेमी है। इस त्रिभुज का अन्तः वृत्त खींचिए और इसकी त्रिज्या नापिए।

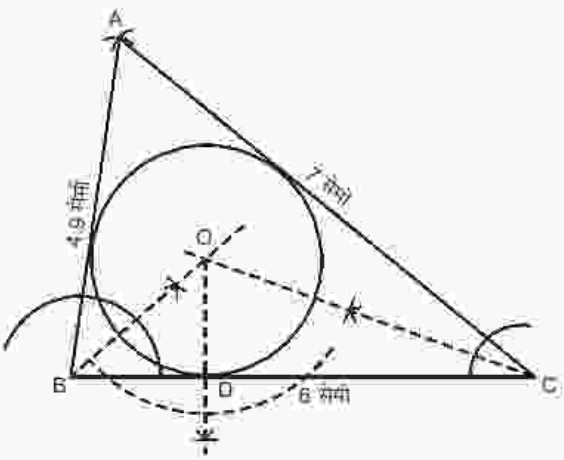
हल—ज्ञात है— ΔABC में, भुजा $AB = 4.9$ सेमी, $BC = 6.0$ सेमी तथा $CA = 7.0$ सेमी।

रचना करनी है—ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 6.0$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 4.9 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।



(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A को बिन्दु B व C से मिलाया।

इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट Δ है।

त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC के $\angle B$ व $\angle C$ के अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर भुजा BC पर लम्ब खींचा जो BC को बिन्दु D पर काटता है।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अन्तः वृत्त है। जिसकी त्रिज्या मापने पर 1.4 सेमी प्राप्त होती है।

11. 5 सेमी भुजा वाला समबाहु त्रिभुज खींचकर इसके अन्तः वृत्त की रचना कीजिए।

हल– ज्ञात है— 5 सेमी भुजा वाला समबाहु ΔABC

रचना करनी है— समबाहु ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

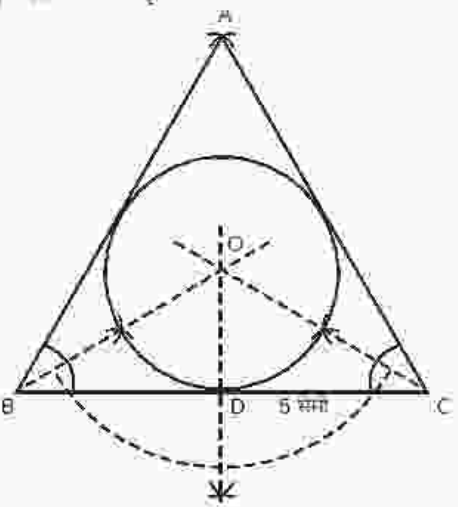
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 5 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 5 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से बिन्दु B व C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज अभीष्ट समबाहु त्रिभुज है।



त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) समबाहु ΔABC के $\angle B$ व $\angle C$ के अर्द्ध खींचे जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर भुजा BC पर लम्ब खींचा, जो भुजा BC को बिन्दु D पर काटता है।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा, जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अभीष्ट अन्तः वृत्त है।

12. ΔABC की रचना कीजिए, जिसकी भुजा $AB = 4.4$ सेमी, $BC = 5.2$ सेमी तथा $\angle ABC = 55°$ है। इस त्रिभुज का परिवृत्त खींचिए।

हल– ज्ञात है— ΔABC, जिसकी भुजा $AB = 4.4$ सेमी, $BC = 5.2$ सेमी तथा $\angle ABC = 55°$।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिवृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

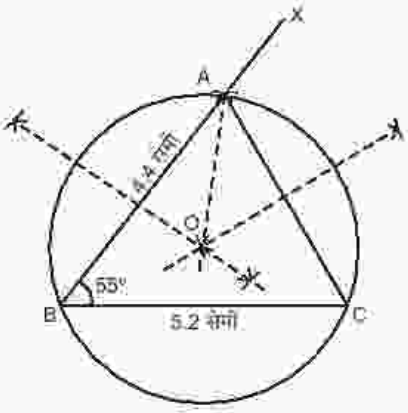
(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5.2$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B से $55°$ बनाती हुई रेखा BX खींची।

(iii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 4.4 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया जो रेखा BX को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A को C से मिलाया।

इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB व AC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा। जो ΔABC के तीनों शीर्षों से होकर जाता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त है।

13. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 5$ सेमी, $\angle B = 90°$ और भुजा $CA = 7$ सेमी है। इस त्रिभुज का परिवृत्त खींचिए।

हल— ज्ञात है— ΔABC जिसमें भुजा $BC = 5$ सेमी, $\angle B = 90°$ और भुजा $CA = 7$ सेमी।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिवृत्त की।

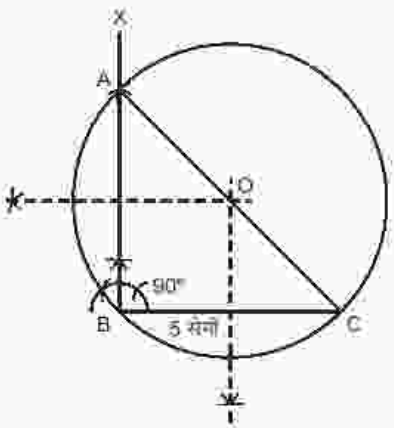
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B से $90°$ का कोण बनाती हुई रेखा BX खींची।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया जो रेखा BX को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A को बिन्दु C से मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB व BC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC के शीर्षों से होकर जाता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त है।

14. ΔABC की रचना कीजिए, जिसका आधार $AB = 8.0$ सेमी, ऊँचाई $= 3.5$ सेमी और शीर्ष $\angle ACB = 90°$। इसके अन्तः वृत्त की रचना कीजिए।

हल— ज्ञात है— ΔABC, जिसका आधार $AB = 8.0$ सेमी, ऊँचाई $= 3.5$ सेमी तथा शीर्ष $\angle ACB = 90°$

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम एक ऋजु रेखा XY खींची।

(ii) ऋजु रेखा XY पर एक बिन्दु C लिया।

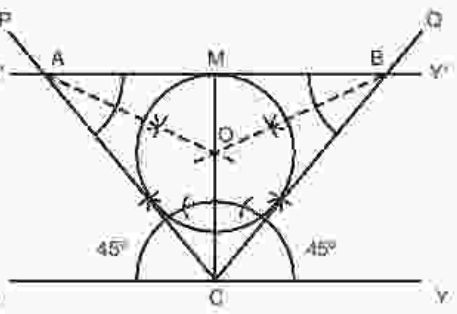
(iii) बिन्दु C से XY पर लम्ब CM इस प्रकार खींचा कि $CM = 3.5$ सेमी हो।

(iv) बिन्दु M से होकर ऋजु रेखा $X'Y' \perp XY$ खींची।

(v) बिन्दु C से $\angle XCP = 45°$ का कोण बनाती हुई रेखा CP खींची जो रेखा $X'Y'$ को बिन्दु A पर काटती है।

(vi) पुनः बिन्दु C से $\angle YCQ = 45°$ का कोण बनाती हुई रेखा CQ खींची।

इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज ABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC के $\angle A$ तथा $\angle C$ के अर्द्धक खींचे जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से ΔABC के आधार AB पर लम्ब OM डाला।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OM त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। यह ΔABC का अभीष्ट अन्तः वृत्त है।

15. एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसमें $BC = 5.0$ सेमी, $\angle A = 60°$ और $\angle B = 40°$। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए।

हल— ज्ञात है— ΔABC, जिसमें भुजा $BC = 5.0$ सेमी, $\angle A = 60°$ तथा $\angle B = 40°$।

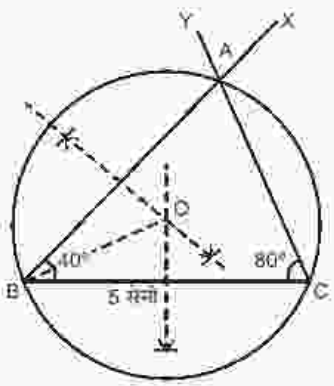
रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिगत वृत्त को।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5.0$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B से $40°$ का कोण बनाती हुई रेखा BX खींची।

(iii) बिन्दु C से $180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (60° + 40°) = 180° - 100° = 80°$ का कोण बनाती हुई रेखा CY खींची जो रेखा BX को बिन्दु A पर काटती है। यह ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB तथा BC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जो ΔABC के शीर्षों से होकर जाता है। यही ΔABC का अभीष्ट परिगत वृत्त है।

16. एक ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle A = 90°$, $AB = 3$ सेमी, $BC = 6$ सेमी है। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए। वृत्त की त्रिज्या मापकर लिखिए।

हल— ज्ञात है— ΔABC जिसमें $\angle A = 90°$, भुजा $AB = 3$ सेमी तथा $BC = 6$ सेमी।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिगत वृत्त की।

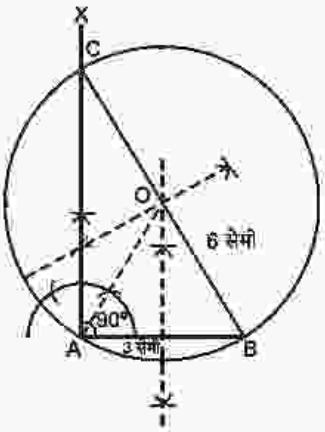
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 3$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु A से $90°$ का कोण बनाती हुई रेखा AX खींची।

(iii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 6 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया, जो रेखा AX को बिन्दु C पर काटता है।

(iv) बिन्दु C से B को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB व BC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जो त्रिभुज ABC के शीर्षों से होकर जाता है। यही वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिगत वृत्त है, जिसकी त्रिज्या मापने पर 3 सेमी प्राप्त होती है।

17. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं की माप $AB = 4$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, $CA = 4$ सेमी है। त्रिभुज एवं उसके परिवृत्त की रचना कीजिए।

हल– ज्ञात है— ΔABC जिसमें भुजा $AB = 4$ सेमी, $BC = 6$ सेमी तथा $CA = 4$ सेमी।

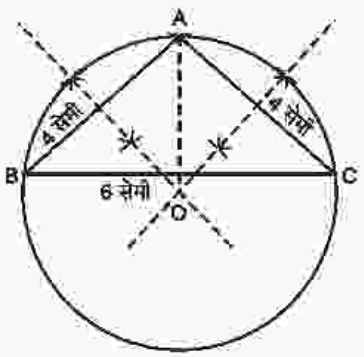
रचना करनी है— ΔABC एवं उसके परिवृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 6$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।



(iv) बिन्दु A से बिन्दु B व C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB व AC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC के शीर्षों से होकर जाता है। यही वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त है।

18. एक त्रिभुज ABC, की रचना कीजिए, जहाँ $AB = 3.6$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, तथा $CA = 4.8$ सेमी त्रिभुज का परिकेन्द्र ज्ञात कीजिए। रचना भी लिखिए।

हल– ज्ञात है— ΔABC, जिसमें भुजा $AB = 3.6$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, तथा $CA = 4.8$ सेमी।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसका परिकेन्द्र ज्ञात करना।

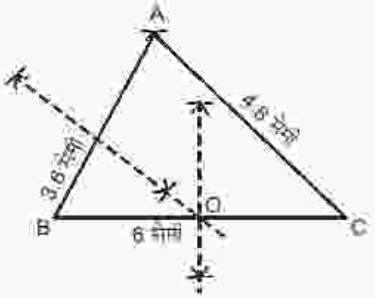
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 6$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 3.6 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 4.8 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से बिन्दु B व C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



(v) ΔABC की भुजाओं AB व BC के लम्ब अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं। यह बिन्दु O, ΔABC का अभीष्ट परिकेन्द्र है।

19. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 8 सेमी तथा आधार 4.8 सेमी है। इस त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना कीजिए।

हल— ज्ञात है— ΔABC में कर्ण $AC = 8$ सेमी, आधार $BC = 4.8$ सेमी $\angle B =$ समकोण।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

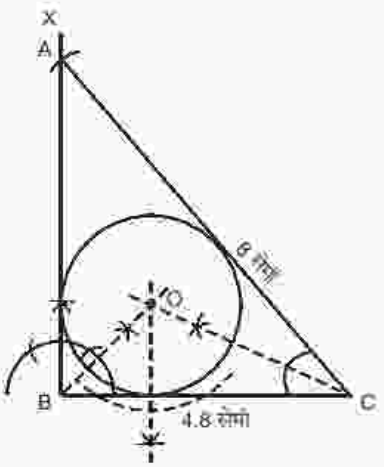
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 4.8$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B पर समकोण बनाती हुई रेखा BX खींची।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 8 सेमी त्रिज्या लेकर चाप लगाया, जो रेखा BX को बिन्दु A पर काटती है।

(iv) बिन्दु A से C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC के $\angle B$ व $\angle C$ के समद्विभाजक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर जाने वाला तथा भुजा BC पर लम्ब OD खींचा।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा। जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अभीष्ट अन्तः वृत्त है।

20. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 6$ सेमी, $\angle A = 50°$ तथा $\angle B = 60°$ है। इस Δ का अन्तः वृत्त खींचिए। रचना विधि भी लिखिए। वृत्त की त्रिज्या नापकर लिखिए।

हल— ज्ञात है— जिसमें भुजा $AB = 6$ सेमी, $\angle A = 50°$ तथा $\angle B = 60°$ है।

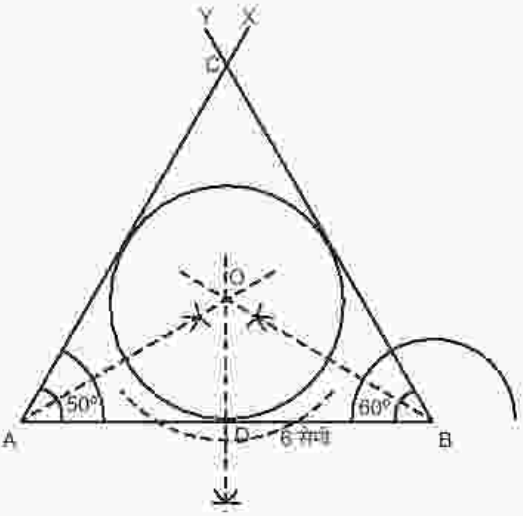
रचना करनी है— ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 6$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु A पर $50°$ का कोण बनाती हुई रेखा XA खींची।

(iii) बिन्दु B पर $60°$ का कोण बनाती हुई रेखा YB खींची, जो रेखा XA को बिन्दु C पर काटती है। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC के $\angle A$ तथा $\angle B$ के समद्विभाजक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर जाने वाला तथा भुजा AB पर लम्ब OD खींचा।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त, ΔABC का अभीष्ट अन्तः वृत्त है। त्रिज्या मापने पर 1.5 सेमी प्राप्त होती है।

21. 4 सेमी भुजा के समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए। इस वृत्त के अन्तः वृत्त की रचना भी कीजिए।

हल– ज्ञात है— 4 सेमी भुजा का समबाहु ΔABC।

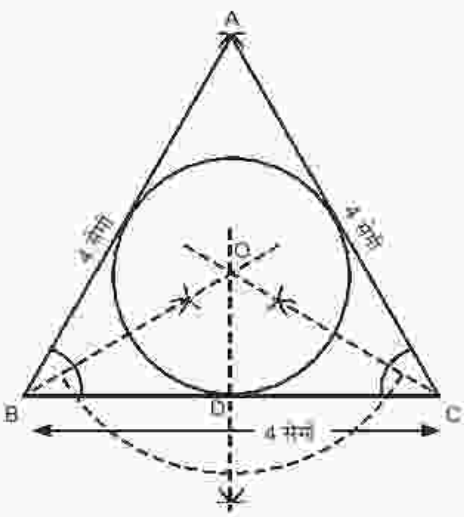
रचना करनी है— ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 4$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।



(iv) बिन्दु A को बिन्दु B तथा C से मिलाया। इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC के $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर जाने वाला तथा भुजा BC पर लम्ब OD खींचा।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस प्रकार प्राप्त यह वृत्त ही ΔABC का अभीष्ट अन्तः वृत्त है।

22. ΔPQR का अन्तः वृत्त खींचिए, जहाँ $PQ = 5.8$ सेमी, $\angle Q = 60°$ तथा $\angle R = 65°$ वृत्त की त्रिज्या भी मापकर लिखिए।

हल– ज्ञात है— ΔPQR जिसमें $PQ = 5.8$ सेमी, $\angle Q = 60°$ तथा $\angle R = 65°$।

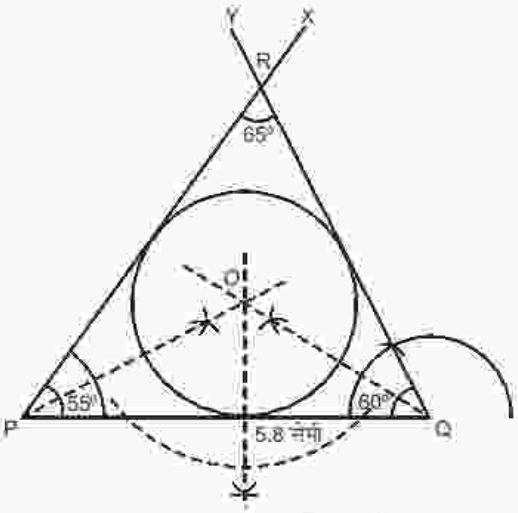
रचना करनी है— ΔPQR एवं इसका अन्तः वृत्त।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $PQ = 5.8$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु Q से $60°$ का कोण बनाती हुई रेखा QY खींची।

(iii) बिन्दु P से $180° - (60° + 65°) = 180° - 125° = 55°$ का कोण बनाती हुई रेखा PX खींची, जो रेखा QY को बिन्दु R पर काटती है। इस प्रकार प्राप्त ΔPQR अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔPQR के $\angle P$ तथा $\angle Q$ के समद्विभाजक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर जाने वाला भुजा PQ पर लम्ब OD खींचा।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔPQR की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। यह वृत्त ही ΔPQR का अभीष्ट अन्तः वृत्त है। अन्तः वृत्त की त्रिज्या मापने पर 1.6 सेमी प्राप्त होती है।

अभ्यास 13.2

1. 6.0 सेमी व्यास का एक वृत्त खींचिए। बिना वृत्त के केन्द्र का प्रयोग किए वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा खींचिए।

हल– ज्ञात है— केन्द्र O वाला एक वृत्त जिसका व्यास 6 सेमी है अर्थात् वृत्त की त्रिज्या $= 3$ सेमी,

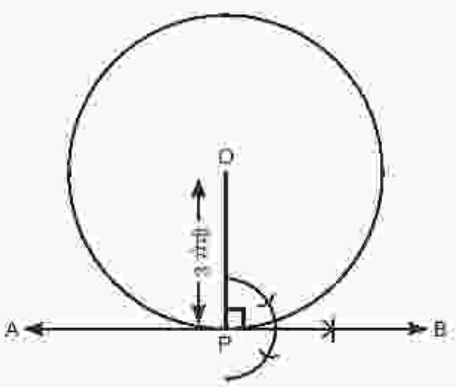
रचना करनी है— 6 सेमी व्यास या 3 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की स्पर्श खींचनी है।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम एक बिन्दु O लिया।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) वृत्त पर कोई बिन्दु P लिया तथा बिन्दु O को P से मिलाया।



(iv) बिन्दु P पर त्रिज्या OP के साथ $90°$ का कोण बनाती रेखा APB खींची। रेखा APB ही दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखा है।

2. 6.0 सेमी व्यास के एक वृत्त की रचना कीजिए और वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा खींचिए और रचना-विधि लिखिए।

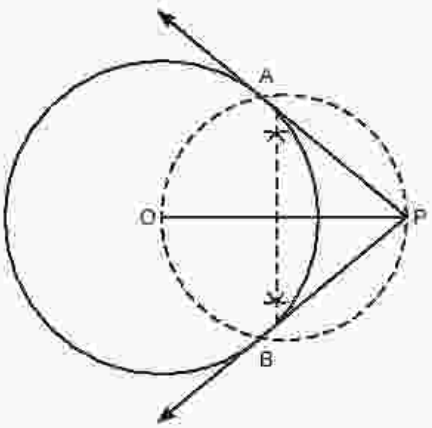
या 3.0 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए और उसके किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

हल– प्रश्न संख्या 1 के हल को भाँति कीजिए।

3. एक वृत्त की रचना कीजिए जिसकी त्रिज्या = 3.0 सेमी है। वृत्त के केन्द्र से 5.0 सेमी दूरी पर एक बिन्दु लीजिए और उससे वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए। प्रत्येक स्पर्श रेखा की लम्बाई की माप बताइए।

हल– ज्ञात है— 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त जिसका केन्द्र O है।

रचना करनी है— 3 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की रचना तथा वृत्त के केन्द्र O से 5 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दु (P) से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ।



रचना के चरण—

(i) बिन्दु को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(ii) वृत्त के केन्द्र O से 5 सेमी दूरी पर एक बिन्दु P लिया।

(iii) OP को व्यास मानकर दूसरा वृत्त खींचा, जो पहले वृत्त को बिन्दु A व B पर काटता है।

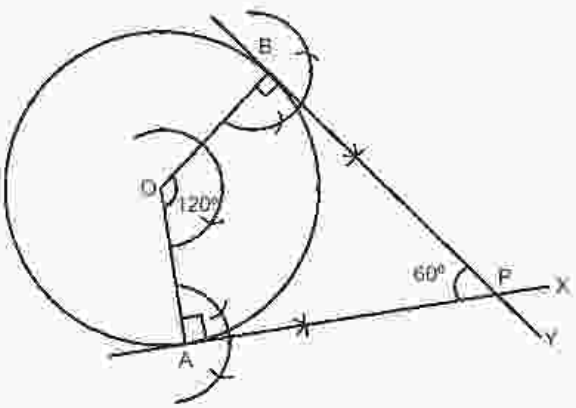
(iv) बिन्दु P से बिन्दु A व B को मिलाया।

इस प्रकार रेखाखंड PA तथा PB ही बिन्दु P से वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं। प्रत्येक स्पर्श रेखा की लम्बाई मापने पर 4 सेमी प्राप्त होती है।

4. 6 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की बाह्य बिन्दु से दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए, जो एक-दूसरे के साथ $60°$ का कोण बनाती हैं।

हल– ज्ञात है— 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त जिसका केन्द्र O है।

रचना करनी है— 6 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के किसी बाह्य बिन्दु P से वृत्त की दो स्पर्श जिनके बीच का कोण $60°$ है।



रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 6

सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा। यह वृत्त ही 6 सेमी त्रिज्या का अभीष्ट वृत्त है।

(ii) वृत्त पर कोई बिन्दु A लिया तथा OA को मिलाया।

(iii) केन्द्र O पर $120°$ का कोण बनाती हुई रेखा खींची, जो वृत्त को बिन्दु B पर मिलती है।

(iv) त्रिज्या OA के साथ बिन्दु A पर $90°$ का कोण बनाती हुई रेखा AX खींची।

(v) त्रिज्या OB के साथ बिन्दु B पर $90°$ का कोण बनाती हुई रेखा BY खींची, जो रेखा AX को बिन्दु P पर काटती है।

इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ PA एवं PB दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

5. 4.0 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इसके केन्द्र से 7.0 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दु से वृत्त पर स्पर्शी युग्म खींचिए।

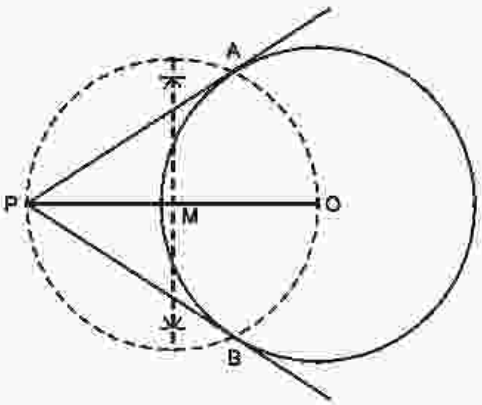
हल— ज्ञात है— केन्द्र O तथा 4 सेमी त्रिज्या एक वृत्त तथा वृत्त के केन्द्र O से 7 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दु P।

रचना करनी है— बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्शी युग्म की।

रचना के चरण—

(i) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 4.0 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(ii) रेखाखंड $OP = 7.0$ सेमी खींचा।



(iii) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(iv) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा OM अथवा PM त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा, जो केन्द्र O वाले वृत्त को बिन्दु A और B पर काटता है।

(v) रेखाखंड PA तथा PB खींचे।

इस प्रकार प्राप्त रेखाखंड PA तथा PB ही बिन्दु P से वृत्त का अभीष्ट रेखा युग्म है।

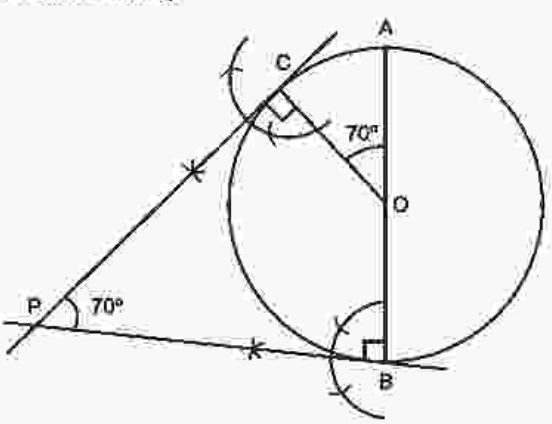
6. 5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए जो आपस में $70°$ का कोण बनाती हैं।

हल— ज्ञात है— 5 सेमी त्रिज्या का वृत्त जिसका केन्द्र O तथा इसकी दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण $70°$ है।

रचना करनी है— 5 सेमी त्रिज्या तथा केन्द्र O वाले वृत्त की जिसकी बिन्दु P से स्पर्शीयों PA तथा PB के बीच का कोण $70°$ है अर्थात $\angle CPB = 70°$।

रचना के चरण—

(i) $OA = 5$ सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचा।



(ii) व्यास AOB खींचा।

(iii) त्रिज्या OA के बिन्दु O पर $\angle COA = 70°$ बनाया।

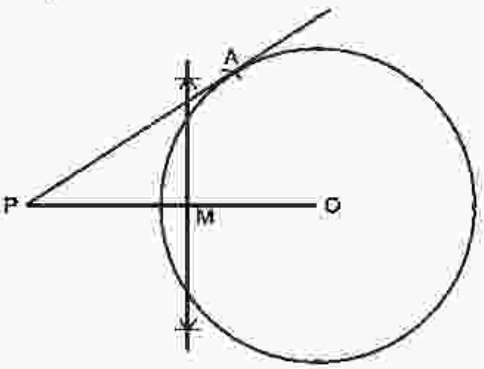
(iv) त्रिज्या OB तथा OC के बिन्दुओं B व C पर लम्ब BP तथा CP खींचे जो परस्पर बिन्दु P पर काटते हैं।

रेखाखंड PB व PC अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

7. त्रिज्या 3 सेमी लेकर वृत्त खींचिए। इस वृत्त के केन्द्र से 6 सेमी दूरी पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त की एक स्पर्शी की रचना कीजिए।

हल– **ज्ञात है**— केन्द्र O तथा 3 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्त।

रचना करनी है— वृत्त के केन्द्र O से 6 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दु P से वृत्त की स्पर्शी PA की।



रचना के चरण—

(i) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(ii) $OP = 6$ सेमी खींची।

(iii) OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(iv) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MP त्रिज्या लेकर वृत्त पर एक चाप लगाया, जो वृत्त को बिन्दु A पर काटता है।

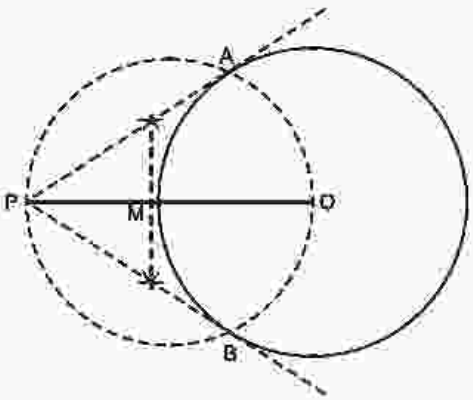
(v) रेखाखंड PA खींचा।

इस प्रकार, रेखाखंड PA ही बिन्दु P से वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

8. 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त के केन्द्र से 8 सेमी की दूरी पर स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए, स्पर्श रेखाओं की लम्बाई नापकर लिखिए।

हल– **ज्ञात है**— एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या 4 सेमी है। वृत्त के केन्द्र से 8 सेमी दूरी पर बिन्दु P स्थित है।

रचना करनी है— बिन्दु P से वृत्त की दो स्पर्शियाँ PA तथा PB की।



रचना के चरण—

(i) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(ii) $OP = 8$ सेमी खींचा।

(iii) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(iv) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा OM या PM त्रिज्या लेकर दूसरा वृत्त खींचा, जो पहले वृत्त को बिन्दु A व B पर काटता है।

(v) रेखाखंड PA तथा PB खींचे।

इस प्रकार प्राप्त रेखाखंड PA तथा PB दिए गए वृत्त की बिन्दु P से अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं। प्रत्येक स्पर्श रेखा की लम्बाई नापने पर 6.8 सेमी प्राप्त होती है।

9. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 3.2 सेमी तथा 1.5 सेमी हैं और जिनके केन्द्रों के बीच की दूरी 6.2 सेमी है, की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ खींचिए। इन स्पर्श रेखाओं की माप बताइए। गणना द्वारा उत्तर की जाँच कीजिए।

[संकेत — गणना का सूत्र = अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाई
$= \sqrt{(\text{केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का अन्तर})^2}$]

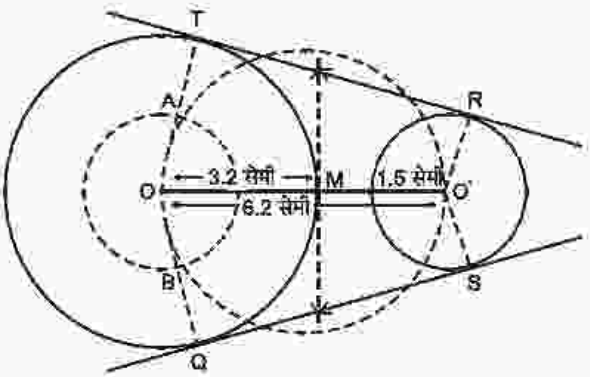
हल— दिया है— दो वृत्तों के केन्द्र की दूरी $OO' = 6.2$ सेमी तथा O केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या 3.2 सेमी तथा O' केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या 1.5 सेमी

रचना करनी है— वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OO' = 6.2$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर 3.2 सेमी त्रिज्या तथा बिन्दु O' को केन्द्र मानकर 1.5 सेमी त्रिज्या के वृत्त खींचे।



(iii) रेखाखंड OO' का समद्विभाजक कर बिन्दु M प्राप्त किया।

(iv) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MO' त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा।

(v) बड़े वृत्त के केन्द्र O को केन्द्र मानकर दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर अर्थात् $(3.2 - 1.5) = 1.7$ सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा, जो OO' व्यास वाले वृत्त को बिन्दु A तथा B पर काटता है।

(vi) रेखाखंड OA तथा OB को मिलाकर आगे बढ़ाए, जो बड़े वृत्त को बिन्दु T और Q पर काटते हैं।

(vii) छोटे वृत्त के केन्द्र O' से OT व OQ के समान्तर रेखाएँ खींची, जो छोटे वृत्त के बिन्दुओं S व R पर मिलती हैं।

(viii) TR तथा QS को मिलाया।

इस प्रकार, प्राप्त TR व QS रेखाएँ दिए गए वृत्तों की अभीष्ट अनुस्पर्श रेखाएँ हैं। नापने पर $TR = QS = 6$ सेमी (लगभग)

गणना— अनुस्पर्श रेखाओं की लम्बाई

$= \sqrt{(\text{केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का अन्तर})^2}$

$= \sqrt{(OO')^2 - (3.2 - 1.5)^2} = \sqrt{(6.2)^2 - (1.7)^2} = \sqrt{38.44 - 2.89} = \sqrt{35.55}$

$= 5.96$ सेमी $= 6$ सेमी लगभग

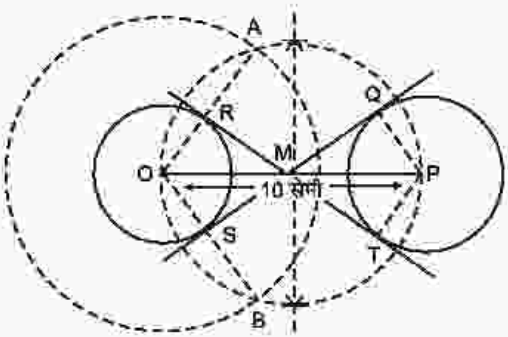
10. दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 10 सेमी है, जिनकी त्रिज्या क्रमशः 4.5 सेमी व 3.5 सेमी हैं। वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ खींचिए। स्पर्श रेखाओं की लम्बाई नापकर लिखिए तथा गणना द्वारा उत्तर की जाँच कीजिए।

[संकेत — गणना का सूत्र = तिर्यक स्पर्श रेखाओं की लंबाई
$= \sqrt{(\text{केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का योग})^2}$]

हल– **ज्ञात है**— दो वृत्तों के बीच की दूरी तथा उनकी त्रिज्याएँ।

रचना करनी है— दिए हुए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक रेखाएँ।

रचना के चरण—



(i) रेखाखंड $OP = 10$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु P को केन्द्र मानकर 4.5 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MP त्रिज्या लेकर एक अन्य वृत्त खींचा।

(vi) छोटे वृत्त के केन्द्र O को केन्द्र मानकर तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के योग अर्थात् $4.5 + 3.5 = 8.0$ सेमी के बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को A और B पर काटता है।

(vii) OA तथा OB को मिलाया जो छोटे वृत्त को क्रमशः R व S पर काटते हैं।

(viii) OA तथा OB के समान्तर बिन्दु P से क्रमशः PT तथा PQ रेखाखंड खींचे।

(ix) RT और SQ को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ RT व SQ हो दिए हुए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ हैं। मापने पर तिर्यक स्पर्श रेखाओं की लम्बाई 6 सेमी प्राप्त होती है।

उत्तर की जाँच—

ज्ञात है—

तिर्यक स्पर्श रेखाओं की लंबाई $= \sqrt{(\text{केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का योग})^2}$

$= \sqrt{(10)^2 - (8)^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ सेमी

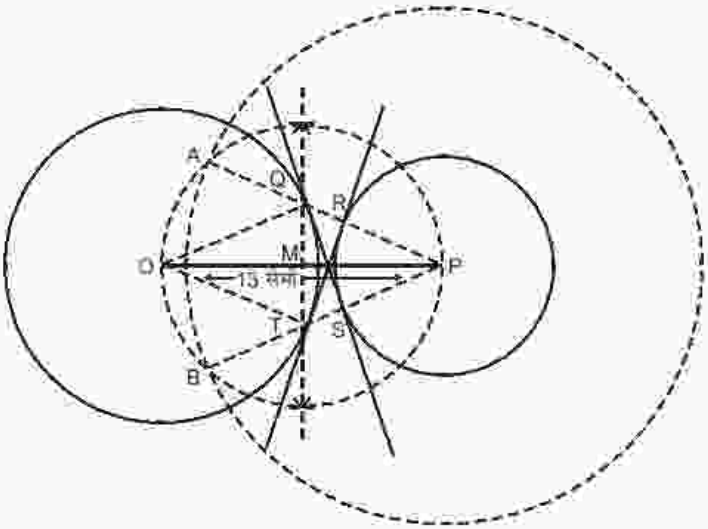
11. 7 सेमी तथा 5 सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 13 सेमी है। इनकी उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

हल– **ज्ञात है**— दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी $OP = 13$ सेमी तथा केन्द्र O वाले वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी तथा P केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $= 5$ सेमी।

रचना करनी है— दिए हुए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OP = 13$ सेमी खींचा।



(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु P को केन्द्र मानकर तथा 5 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MP त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।

(vi) छोटे वृत्त के केन्द्र P को केन्द्र मानकर तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्या के योग ($7+5=12$ सेमी) के बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को बिन्दु A व B पर काटता है।

(vii) रेखाखंड PA तथा PB को मिलाया, जो छोटे वृत्त को क्रमशः बिन्दु R व S पर काटते हैं।

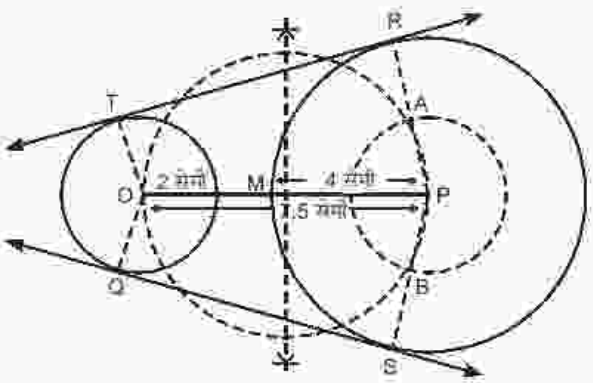
(viii) रेखाखंड $OT \parallel PA$ तथा $OQ \parallel PB$ खींचे।

(ix) RT व SQ को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ RT व SQ दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ हैं।

12. 2 सेमी तथा 4 सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों के बीच की दूरी 7.5 सेमी है। वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए। इनकी लंबाई की माप लिखिए तथा गणना द्वारा उत्तर की जाँच कीजिए।

हल—ज्ञात है— दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी $OP = 7.5$ सेमी। वृत्तों की त्रिज्या 2 सेमी तथा 4 सेमी है।

रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श स्पर्श रेखाएँ।



रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OP = 7.5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 2 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु P को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MP त्रिज्या लेकर तीसरा वृत खींचा।

(vi) बड़े वृत्त के केन्द्र P को केन्द्र मानकर तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर $(4-2=2$ सेमी) के बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को A तथा B बिन्दुओं पर काटता है।

(vii) रेखाखंड PA तथा PB को मिलाकर आगे बढ़ाया, जो बड़े वृत्त को क्रमशः R व S पर काटता है।

(viii) छोटे वृत्त के केन्द्र O से रेखाएँ $OT \| PR$ तथा $OQ \| PS$ खींची। जो छोटे वृत्त के क्रमशः बिन्दुओं T व Q पर मिलती हैं।

(ix) रेखाखंड TR तथा QS खींची इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ TR व QS दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ हैं। इनकी लम्बाई मापने पर 7.23 सेमी प्राप्त होती है।

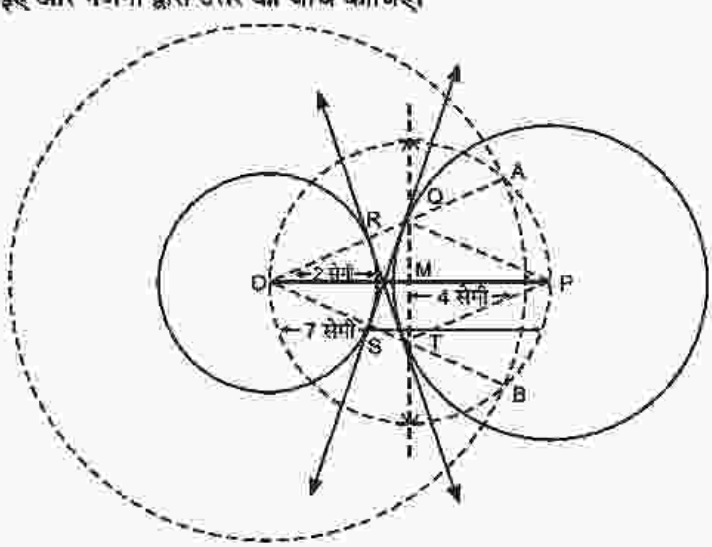
उत्तर की जाँच—

हम जानते हैं, कि

अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाई $= \sqrt{(\text{केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का अन्तर})^2}$

$= \sqrt{(7.5)^2 - (2)^2} = \sqrt{56.25-4} = \sqrt{52.25} = 7.23$ सेमी

13. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 2.0 सेमी और 4.0 सेमी हैं और केन्द्रों के बीच की दूरी 7 सेमी है। इन वृत्तों पर उभयनिष्ठ तिर्यक (अनुप्रस्थ) स्पर्श रेखाएँ खींचिए। इनकी लंबाई नापकर बताइए और गणना द्वारा उत्तर की जाँच कीजिए।



हल– ज्ञात है— 2.0 सेमी तथा 4.0 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त जिसके केन्द्र O व P है जबकि $OP = 7$ सेमी

रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक (अनुप्रस्थ) स्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OP = 7$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 2.0 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु P को केन्द्र मानकर तथा 4.0 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MP त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।

(vi) छोटे वृत्त के केन्द्र O को केन्द्र मानकर तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के योग $(2+4=6$ सेमी) के बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को बिन्दु A और B पर काटता है।

(vii) रेखाखंड OA तथा OB को मिलाया, जो छोटे वृत्त को क्रमशः बिन्दु R व S पर काटते हैं।

(viii) बड़े वृत्त के केन्द्र P से होकर जाने वाले रेखाखंड $PQ \| OB$ तथा $PT \| OA$ खींचे, जो बड़े वृत्त के बिन्दु Q तथा T पर मिलते हैं।

(ix) बिन्दु R व T तथा Q व S को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ RT व QS दिए गये वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ हैं। इनकी लम्बाई मापने पर 3.6 सेमी प्राप्त होती है।

उत्तर की जाँच—

हम जानते हैं, कि

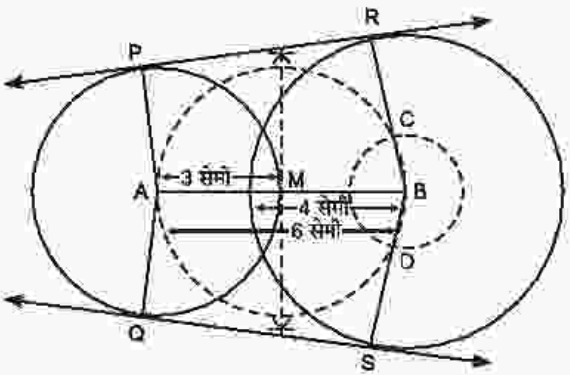
तिर्यक (अनुप्रस्थ) स्पर्श रेखाओं की लंबाई

$= \sqrt{\text{(वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी)}^2 - \text{(त्रिज्याओं का योग)}^2}$

$= \sqrt{(7)^2 - (6)^2} = \sqrt{49-36} = \sqrt{13} = 3.6$ सेमी

14. 3 सेमी तथा 4 सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों के केन्द्र एक-दूसरे से 6 सेमी दूरी पर हैं। इन दोनों वृत्तों पर उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ खींचिए और उनकी माप लिखिए।

हल— ज्ञात है— 3 सेमी तथा 4 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त जिनके केन्द्र A तथा B हैं। जबकि $AB = 6$ सेमी



रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 6$ सेमी खींचो।

(ii) बिन्दु A को केन्द्र मानकर 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड AB का समद्विभाजक कर बिन्दु M प्राप्त किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर MA या MB त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।

(vi) बड़े वृत्त के केन्द्र B को केन्द्र मानकर दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर $(4-3=1$ सेमी) के बराबर त्रिज्या का चौथा वृत्त खींचा जो M केन्द्र वाले वृत्त को C व D पर काटता है।

(vii) रेखाखंड BC व BD को मिलाकर आगे बढ़ाया, जो बड़े वृत्त को क्रमशः R व S पर काटते हैं।

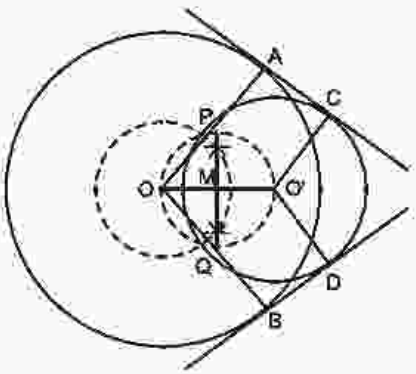
(viii) छोटे वृत्त के केन्द्र A से होकर जाने वाली रेखाएँ $AP||BR$ तथा $AQ||BS$ खींची।

(ix) PR तथा QS को मिलाया।

(x) इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ PR तथा QS दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ हैं। मापने पर इन अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाई सेमी 5.9 प्राप्त होती है।

15. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 7.0 सेमी और 4.0 सेमी हैं और उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 5.0 सेमी है। उनकी उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ खींचिए। उनकी लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल— ज्ञात है— 7 सेमी तथा 4 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं। जबकि $OO'=5$ सेमी,



रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OO'=5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर 7 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचा।

(iii) O' को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) OO' का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MO' त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।

(vi) बड़े वृत्त के केन्द्र O को केन्द्र मानकर दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर $(7-4=3$ सेमी) के बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को बिन्दु P व Q पर काटता है।

(vii) रेखाखंड OP तथा OQ को मिलाकर आगे बढ़ाया, जो बड़े वृत्त को क्रमशः A तथा B पर काटता है।

(viii) छोटे वृत्त के केन्द्र O' से होकर जाने वाले रेखाखंड $O'C||OA$ तथा $O'D||OB$ खींचे।

(ix) AC व BD को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ AC व BD दिए गए वृत्त की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ। इनकी लम्बाई मापने पर 4 सेमी प्राप्त होती है।

16. 1.5 सेमी और 2.1 सेमी की त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों पर जिनके केन्द्रों के बीच का अन्तर 3.6 सेमी है। सभी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ खींचिए। उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाइयों का परिकलन कीजिए और इन्हें मापिए।

हल— ज्ञात है— दो वृत्त, जिनकी त्रिज्याएँ 1.5 सेमी तथा 2.1 सेमी हैं। वृत्तों के केन्द्र O तथा O' हैं जहाँ $OO'=3.6$ सेमी,

रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण—

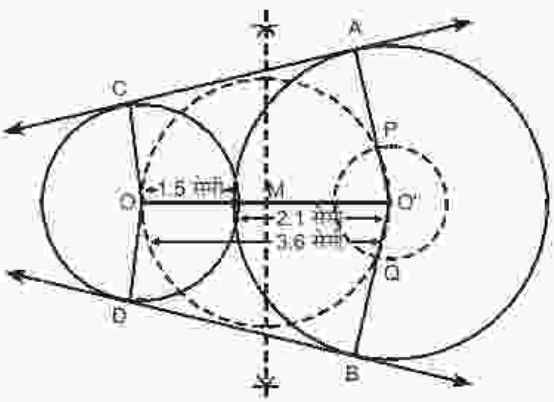
(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OO' = 3.6$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 1.5 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु O' को केन्द्र मानकर 2.1 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड OO' का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा $MO = MO'$ त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।



(vi) बड़े वृत्त के केन्द्र O' को केन्द्र मानकर तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर $(2.1 - 1.5 = 1.6$ सेमी) बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को बिन्दु P व Q पर काटता है।

(vii) रेखाखंड $O'P$ व $O'Q$ को मिलाकर आगे बढ़ाया जो बड़े वृत्त को क्रमशः बिन्दु A व B पर काटते हैं।

(viii) छोटे वृत्त के केन्द्र O से होकर जाने वाले रेखाखंड $OC \parallel O'A$ तथा $OD \parallel O'B$ खींचे, जो छोटे वृत्त को बिन्दु C व D पर मिलते हैं।

(ix) CA एवं DB को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ CA तथा DB दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ हैं। जो मापने पर 3.54 सेमी प्राप्त होती हैं।

अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाइयों का परिकलन—

हम जानते हैं, कि

अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाई

$$= \sqrt{(\text{वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का अन्तर})^2}$$

$$= \sqrt{(3.6)^2 - (0.6)^2} = \sqrt{12.96 - 0.36} = \sqrt{12.60} = 3.54 \text{ सेमी}$$

17. तीन वृत्त एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं। उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4 सेमी, 5 सेमी तथा 7 सेमी हैं, वृत्तों की रचना कीजिए और त्रिज्या बताइए।

हल— ज्ञात है— तीन वृत्त जिनके केन्द्र A, B तथा C हैं, वृत्त एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं। वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी $AB = 4$ सेमी, $BC = 5$ सेमी तथा $CA = 7$ सेमी।

रचना करनी है— केन्द्र A, B तथा C वाले वृत्त जो परस्पर बाह्यतः स्पर्श करते हैं।

विश्लेषण—

माना A केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $= r_1$ सेमी

B केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $= r_2$ सेमी

तथा C केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $= r_3$ सेमी

$\because$ वृत्त एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं।

∴ वृत्तों के बीच की दूरी = वृत्तों की त्रिज्या का योगफल

तब $AB = r_1 + r_2 = 4$ सेमी .....(1)

$BC = r_2 + r_3 = 5$ सेमी .....(2)

तथा $CA = r_3 + r_1 = 7$ सेमी .....(3)

समीकरण (1), (2) व (3) को जोड़ने पर,

$2(r_1 + r_2 + r_3) = 16$

या $r_1 + r_2 + r_3 = 8$ .....(4)

समीकरण (4) में से समीकरण (1), (2) व (3) घटाने पर क्रमशः

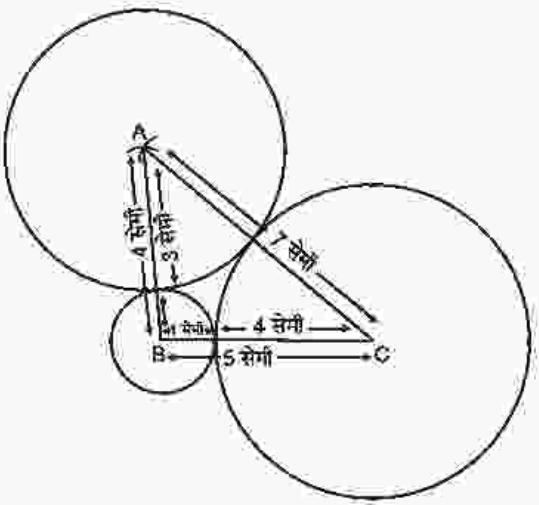
$r_3 = 4, r_1 = 3, r_2 = 1$

अतः केन्द्र A वाले वृत्त की त्रिज्या = 3 सेमी

केन्द्र B वाले वृत्त की त्रिज्या = 1 सेमी

तथा केन्द्र C वाले वृत्त की त्रिज्या = 4 सेमी

रचना के चरण—



(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया। जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है। AB और AC को मिलाया।

(iv) बिन्दु A को केन्द्र मानकर 3 सेमी का पहला वृत्त बिन्दु B को केन्द्र मानकर 1 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त तथा बिन्दु C को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का तीसरा वृत्त खींचा। इस प्रकार प्राप्त वृत्त एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं। ये वृत्त ही दिए गए अभीष्ट वृत्त हैं।

18. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 4.5 सेमी तथा 3.5 सेमी हैं। वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 10 सेमी है। वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

हल— **ज्ञात है—** केन्द्र O तथा O' वाले दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 4.5 सेमी तथा 3.5 सेमी है। जबकि $OO' = 10$ सेमी।

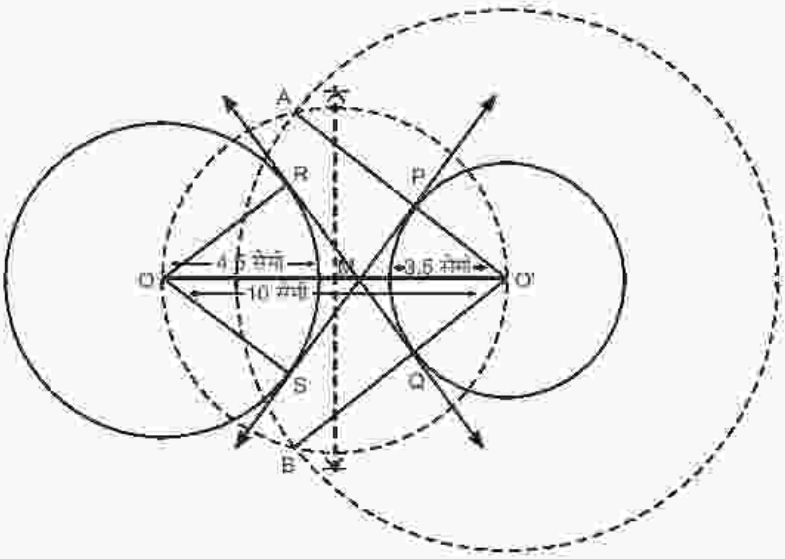
रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम $OO' = 10$ सेमी रेखाखंड खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर 4.5 सेमी का एक वृत्त खींचा।

(iii) O' को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।



(iv) OO' का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर $MO = MO'$ त्रिज्या का तीसरा वृत्त खींचा।

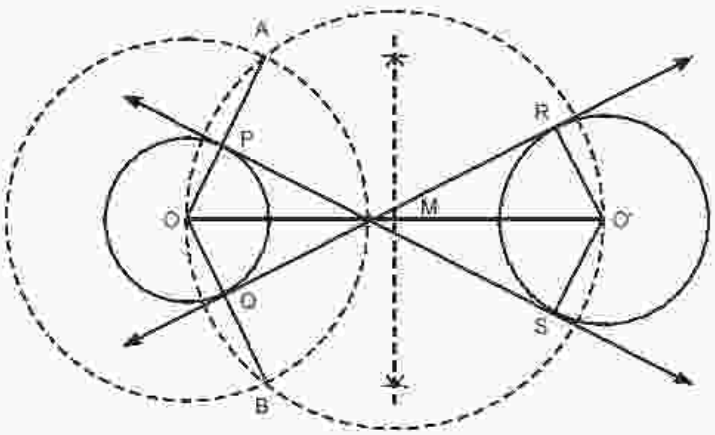
(vi) छोटे वृत्त के केन्द्र O' को केन्द्र मानकर दो वृत्तों की त्रिज्याओं के योग $(4.5 + 3.5 = 8$ सेमी) के बराबर त्रिज्या का वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त बिन्दु A तथा B पर काटता है।

(vii) $O'A$ तथा $O'B$ को मिलाया जो छोटे वृत्त को क्रमशः P तथा Q पर काटते हैं।

(viii) बड़े वृत्त के केन्द्र O से होकर जाने वाले रेखाखंड $OS \| O'A$ तथा $OR \| O'B$ खींचे, जो बड़े वृत्त को बिन्दु S तथा R पर मिलते हैं।

(ix) RQ तथा PS को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ RQ तथा PS दिए गए वृत्तों की अभीष्ट उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ हैं।

19. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 2 सेमी तथा 2.5 सेमी हैं। वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 10 सेमी है। इन वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक रेखाएँ खींचिए। और इनकी माप लिखिए।



हल– ज्ञात है— दो वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं। वृत्तों की त्रिज्याएँ 2 सेमी व 2.5 सेमी हैं, जबकि $OO' = 10$ सेमी।

रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण— प्रश्न संख्या 18 की भाँति स्वयं लिखिए।

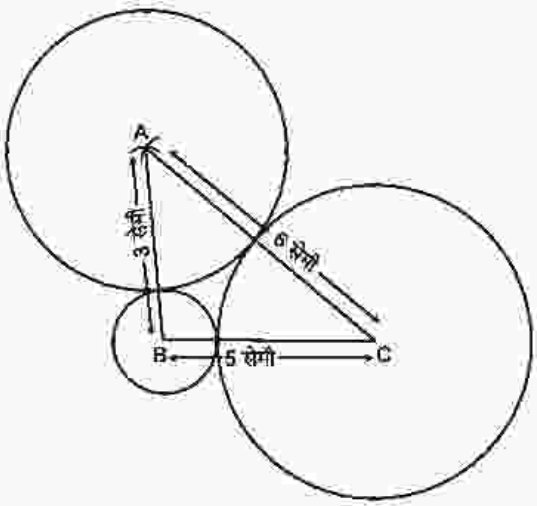
मापने पर उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाओं की लम्बाई = 8.93 सेमी प्राप्त होती है।

20. तीन बिन्दु A, B तथा C क्रमशः $AB = 3$ सेमी, $BC = 5$ सेमी तथा $AC = 6$ सेमी की दूरी पर हैं। इनको केन्द्र मानकर ऐसे वृत्तों की रचना कीजिए जो अन्य दो को बाह्य स्पर्श करें।

हल– ज्ञात है— तीन बिन्दु A, B व C इस प्रकार हैं $AB = 3$ सेमी, $BC = 5$ सेमी, तथा $AC = 6$ सेमी।

रचना करनी है— बिन्दु A, B व C को केन्द्र लेकर ऐसे वृत्तों की, जो एक–दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं।

विश्लेषण— माना केन्द्र A, B तथा C केन्द्र वाले वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः r_1, r_2 व r_3 हैं।



∵ वृत्त एक–दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं।

∴ वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी = वृत्तों की त्रिज्याओं का योग

$AB = r_1 + r_2 = 3$ .....(1)

$BC = r_2 + r_3 = 5$ .....(2)

$CA = R_3 + R_1 = 6$ .....(3)

समीकरण (1), (2) व (3) को जोड़ने पर,

$2(r_1 + r_2 + r_3) = 14$

या $r_1 + r_2 + r_3 = 7$ .....(4)

समीकरण (4) में से क्रमशः समीकरण (2), (3) व (1) घटाने पर,

$r_1 = 2, r_2 = 1$, व $r_3 = 4$ सेमी

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 6 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है, AB व AC को मिलाया।

(iv) बिन्दु B को केन्द्र मानकर 1 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचा।

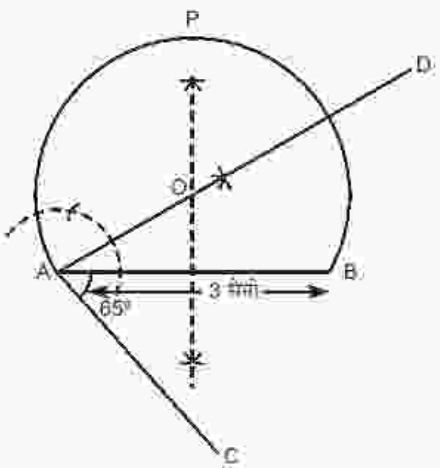
(v) बिन्दु C को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।

(vi) बिन्दु A को केन्द्र मानकर 2 सेमी त्रिज्या का तीसरा वृत्त खींचा।

इस प्रकार प्राप्त वृत्त एक-दूसरे को बाह्य; स्पर्श करते हैं। ये वृत्त ही अभीष्ट वृत्त हैं।

अभ्यास 13.3

1. 3 सेमी माप के एक रेखाखंड पर 65° कोण वाले वृत्तखंड की रचना कीजिए।



हल— ज्ञात है— 3 सेमी का एक रेखाखंड ($AB = 3$ सेमी)।

रचना करनी है— 65° के कोण के वृत्तखंड की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 3$ सेमी खींचा।

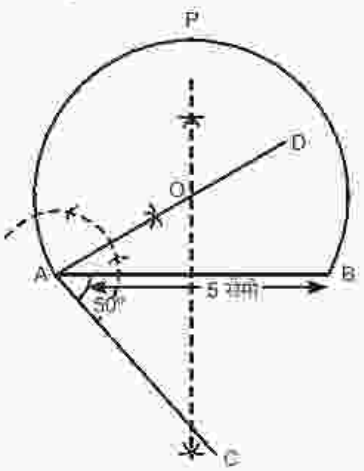
(ii) रेखाखंड AB के बिन्दु A पर $\angle BAC = 65°$ बनाया।

(iii) रेखाखंड AC के बिन्दु A पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा AD खींची।

(iv) रेखाखंड AB का लम्बअर्द्धक किया, जो रेखा AD को बिन्दु O पर काटता है। बिन्दु O वृत्तखंड का केन्द्र है।

(v) O को केन्द्र मानकर तथा OA या OB त्रिज्या लेकर वृत्तखंड APB खींचा। इस प्रकार प्राप्त वृत्तखंड APB अभीष्ट वृत्तखंड है।

2. 5 सेमी के एक रेखाखंड पर 50° कोण के वृत्तखंड की रचना कीजिए।



हल— ज्ञात है— रेखाखंड $AB = 5$ सेमी।

रचना करनी है— रेखाखंड AB पर 50° कोण के वृत्तखंड की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 5$ सेमी खींचा।

(ii) रेखाखंड के बिन्दु A पर $\angle BAC = 50°$ बनाया।

(iii) रेखाखंड AC के बिन्दु A पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा AD खींची।

(iv) रेखाखंड AB का लम्बअर्द्धक खींचा, जो AD को बिन्दु O पर काटता है। बिन्दु O वृत्तखंड का केन्द्र है।

(v) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा त्रिज्या OA या OB लेकर वृत्तखंड APB खींचा। इस प्रकार प्राप्त वृत्तखंड APB अभीष्ट वृत्तखंड है।

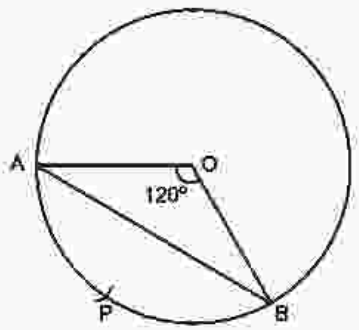
3. 4 सेमी लम्बाई के रेखाखंड पर 60° के कोण वाले वृत्तखंड की रचना कीजिए।

हल– प्रश्न संख्या 1 व 2 के हल की भाँति स्वयं कीजिए।

4. 5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त को ऐसे दो वृत्तखंडों में विभाजित कीजिए कि एक वृत्तखंड का कोण 60° तथा दूसरे वृत्तखंड का कोण 120° हो।

हल– ज्ञात है— त्रिज्या $OA = 5$ सेमी का एक वृत्त।

रचना करनी है— वृत्त को दो वृत्तखंडों में विभाजित करना है जिसमें एक वृत्तखंड का कोण 60° तथा दूसरे वृत्तखंड का कोण 120° हो।



रचना के चरण—

(i) रेखाखंड $OA = 5$ सेमी खींची।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा $OA = 5$ सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) A को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया जो वृत्त को बिन्दु P पर काटता है।

(iv) बिन्दु P को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो वृत्त को बिन्दु B पर काटता है।

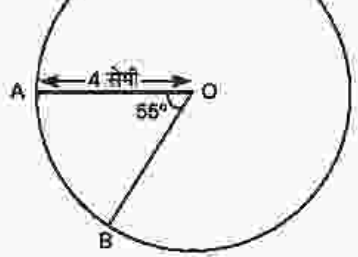
(v) रेखाखंड OB खींचा $\angle AOB = 120°$, वृत्तखंड के कोण 60° का दो गुणा।

(vi) रेखाखंड AB खींचा जो वृत्त को दो अभीष्ट वृत्तखंडों में बाँटेगा।

5. 4 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर 55° कोण वाले वृत्तखंड की रचना कीजिए।

हल– ज्ञात है— $OA = 4$ सेमी त्रिज्या का एक वृत्त।

रचना करनी है— 55° कोण वाले वृत्तखंड की।



रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OA = 4$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु O पर चाँदे की सहायता से 55° का कोण बनाती हुई रेखा OB खींची। इस प्रकार प्राप्त रचना ही अभीष्ट रचना है।

6. 4 सेमी लम्बाई वाले रेखाखंड पर 115° कोण वाले वृत्तखंड की रचना कीजिए।

हल– ज्ञात है— 4 सेमी लम्बाई का रेखाखंड AB।

रचना करनी है— रेखाखंड AB पर 115° कोण वाले वृत्तखंड की।

रचना के चरण—

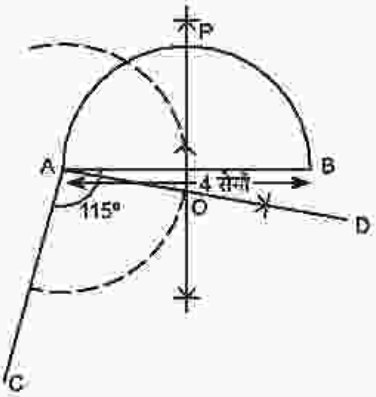
(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 4$ सेमी खींचा।

(ii) रेखा AB के बिन्दु A पर $\angle BAC = 115°$ बनाया।

(iii) रेखाखंड AC के बिन्दु A पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा AD खींची।

(iv) रेखाखंड AB का लम्बअर्द्धक खींचा, जो AD को बिन्दु O पर काटती है।

(v) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA या OB त्रिज्या लेकर वृत्तखंड APB खींचा। इस प्रकार APB ही अभीष्ट वृत्तखंड है।



7. 7 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त पर 65° कोण वाले एक वृत्तखंड की रचना कीजिए।

हल– प्रश्न संख्या 5 के हल की भाँति स्वंय कीजिए।

8. 4 सेमी लम्बाई के रेखाखंड पर 70° कोण वाले एक वृत्तखंड की रचना कीजिए।

हल– प्रश्न संख्या 6 के हल की भाँति स्वंय कीजिए।

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट– बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 264 व 265 का अवलोकन कीजिए।

■□■

इकाई-6 निर्देशांक ज्यामिति
(Co-ordinate Geometry)

14

सरल रेखा
(Straight Line)

अभ्यास 14.1

1. एक रेखा बिन्दु $(0, -4)$ से होकर जाती है और X-अक्ष के समान्तर है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया गया बिन्दु $P(x, y) = (0, -4)$

अतः बिन्दु P से होकर जाने वाली तथा X-अक्ष के समान्तर रेखा का

समीकरण $y = k$ जहाँ k = बिन्दु की कोटि $= -4$

$\therefore$ रेखा का अभीष्ट समीकरण $y = -4$ **उत्तर**

2. बिन्दुओं $(3, 4)$ व $(x, 5)$ से होकर जाने वाली रेखा X-अक्ष की धन दिशा से $135°$ का कोण बनाती है। x का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दिया गया बिन्दु $P(x_1, y_1) = (3, 4)$

$Q(x_2, y_2) = (x, 5)$

तथा रेखा का X-अक्ष की धन दिश से कोण $(\theta) = 135°$

$$\text{रेखा की प्रवणता } (m) = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

या $$\tan 135° = \frac{5-4}{x-3}$$

$$\tan(90° + 45°) = \frac{-1}{x-3}$$

या $$-\tan 45° = \frac{-1}{x-3}$$

या $$-1 = \frac{1}{x-3}$$

या $$-x + 3 = 1$$

या $x = 3-1$

या $x = 2$ उत्तर

3. यदि बिन्दुओं $P(1, 5)$ तथा $Q(x, -7)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता 4 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दिया गए बिन्दु $P(1, 5)$ तथा $Q(x, -7)$

तथा रेखा PQ की प्रवणता $m = 4$

यहाँ $P(x_1, y_1) = (1, 5)$ तथा $Q(x_2, y_2) = (x, -7)$

हम जानते हैं कि—

$$\text{रेखा की प्रवणता } (m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

या $$4 = \frac{-7-5}{x-1}$$

या $$4 = \frac{-12}{x-1}$$

या $$4x - 4 = -12$$

या $$4x = -12+4$$

या $$4x = -8$$

या $$4x = \frac{-8}{4} = -2$$ उत्तर

4. X-अक्ष के समान्तर तथा बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया गया बिन्दु $P(a, b) = (3, 4)$ यहाँ भुज $= 3$ तथा कोटि $= 4$

X-अक्ष के समान्तर तथा बिन्दु $P(a, b)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y = b$$

या $$y = 4$$

या $$y - 4 = 0$$ उत्तर

5. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $A(4, 8)$, $B(5, 12)$ व $C(9, 28)$ संरेख हैं।

हल—माना दिया गया बिन्दु $A(x_1, y_1) = (4, 8)$

$B(x_2, y_2) = (5, 12)$

तथा $C(x_3, y_3) = (9, 28)$

बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$(m_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12-8}{5-4} = \frac{4}{1} = 4$$

बिन्दु B व C से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$(m_2) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{28-12}{9-5} = \frac{16}{4} = 4$$

रेखा AB की प्रवणता = रेखा BC की प्रवणता = 4

∴ बिन्दु A, B व C तीनों एक रेखा पर स्थित हैं अर्थात् संरेख हैं। इति सिद्धम्

6. निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अनुसार रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

(i) रेखा बिन्दुओं (–4, – 5) व (8, 7) से होकर जाती है।

(ii) रेखा बिन्दुओं (3, 5) व (6, 8) से होकर जाती है।

हल—(i) माना बिन्दु $A(x_1, y_1) = (-4, -5)$

तथा $B(x_2, y_2) = (8, 7)$

अत: रेखा AB की प्रवणता $(m) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{7-(-5)}{8-(-4)}$

$= \dfrac{7+5}{8+4} = \dfrac{12}{12} = 1$ उत्तर

(ii) माना बिन्दु $A(x_1, y_1) = (3, 5)$

तथा $B(x_2, y_2) = (6, 8)$

अत: बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$(m) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{8-5}{8-3} = \dfrac{3}{3} = 1$ उत्तर

7. बिन्दुओं (–2, 5) व (6, 4) से जाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—माना दिए गए बिन्दु $A(x_1, y_1) = (-2, 5)$

तथा $B(x_2, y_2) = (6, 4)$

अत: बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$(m) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4-5}{6-(-2)} = \dfrac{-1}{6+2} = -\dfrac{1}{8}$

उत्तर

8. बिन्दुओं (3, – 4) व (5, – 7) से जाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—माना दिए गए बिन्दु $A(x_1, y_1) = (3, -4)$

तथा $B(x_2, y_2) = (5, -7)$

अत: बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$(m) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-7-(-4)}{5-3} = \dfrac{-7+4}{2} = -\dfrac{3}{2}$ उत्तर

9. यदि $P(1,0)$, $Q(0,1)$ तथा $(-3,4)$ तो दिखाइए कि ये बिन्दु संरेख हैं।

हल—दिया गए बिन्दु, $P(x_1, y_1) = (1, 0)$,

$Q(x_2, y_2) = (0, 1)$

तथा $R(x_3, y_3) = (-3, 4)$

अत: रेखा PQ की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-0}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

तथा रेखा QR की प्रवणता $= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{4-1}{-3-0} = \frac{3}{-3} = -1$

रेखा PQ की प्रवणता = रेखा QR की प्रवणता

∴ बिन्दु P, Q तथा R संरेख हैं। इति सिद्धम्

10. X-अक्ष की धन दिशा से निम्नलिखित कोण बनाने वाली इन रेखाओं की प्रवणता ज्ञात कीजिए—

(i) 30° (ii) –45° (iii) 90° (iv) 300°

हल—(i) दिया है—

रेखा का X-अक्ष की धन दिशा से कोण $(\theta) = 30°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

$= \tan 30°$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$ उत्तर

(ii) दिया है—

रेखा का X-अक्ष की धन दिशा से कोण $(\theta) = 45°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

$= \tan 30°$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$ उत्तर

(ii) दिया है—

रेखा का X-अक्ष की धन दिशा से कोण $(\theta) = 45°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$ से,

$= \tan(-45°)$

$= -\tan 45°$

$= -1$ उत्तर

(iii) दिया है—

रेखा का X-अक्ष की धन दिशा से कोण $(\theta) = 90°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

$m = \tan 90°$

या $m = \infty$ उत्तर

(iv) दिया है—

रेखा का X-अक्ष की धन दिशा से कोण $(\theta) = 300°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$ से,

या $m = \tan 300°$

$= \tan(180° + 120°)$

$= \tan(120°)$

$= \tan(90° + 30°)$

$= -\cot 30°$

$= -\sqrt{3}$ उत्तर

11. यदि बिन्दुओं (3, x) तथा (2, 7) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता और बिन्दुओं (–1, 4) व (0, 6) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता के बराबर हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल—माना दिए गए बिन्दु $A(x_1, y_1) = (3, x)$, $B(x_2, y_2) = (2, 7)$

तथा $P(x_3, y_3) = (-1, 4)$, $Q(x_4, y_4) = (0, 6)$

प्रश्नानुसार,

रेखा AB की प्रवणता = रेखा PQ की प्रवणता

या $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

या $$\frac{7 - x}{2 - 3} = \frac{6 - 4}{0 - (-1)}$$

या $$\frac{7 - x}{-1} = \frac{2}{1}$$

या $7 - x = -2 \Rightarrow x = 7 + 2 = 9$ उत्तर

12. निम्नलिखित बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखाओं की प्रवणताएँ ज्ञात कीजिए—

(i) (–3, 2) व (3, 8) (ii) (–4, – 5) व (8, 7) (iii) (4,6) व (2,5)

(iv) (2, 3) व (6, 5) (v) (3, 5) व (6, 8) (vi) (4, 3) व (–7, 6)

(vii) (6, 0) व (0, 6) (viii) (0, 1) व (1, 0) (ix) (3, 10) व (7, 6)

हल— (i) माना $A(x_1, y_1) = (-3, 2)$ $B(x_2, y_2) = (3, 8)$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{8 - 2}{3 - (-3)}$

$= \dfrac{6}{3 + 3} = \dfrac{6}{6} = 1$ उत्तर

(ii) माना $A(x_1, y_1) = (-4, -5)$ तथा $B(x_2, y_2) = (8, 7)$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{7 - (-5)}{8 - (-4)}$

$= \dfrac{7 + 5}{8 + 4} = \dfrac{12}{12} = 1$ उत्तर

(iii) माना $A(x_1, y_1) = (4, 6)$ तथा $B(x_2, y_2) = (2, 5)$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-6}{2-4}$

$= \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$ उत्तर

(iv) माना $P(x_1, y_1) = (2, 3)$ तथा $Q(x_2, y_2) = (6, 5)$

$\therefore$ रेखा PQ की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-3}{6-2}$

$= \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ उत्तर

(v) माना बिन्दु $P(x_1, y_1) = (3, 5)$ तथा $Q(x_2, y_2) = (6, 8)$

$\therefore$ रेखा PQ की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{8-5}{6-3}$

$= \dfrac{3}{3} = 1$ उत्तर

(vi) माना बिन्दु $A(x_1, y_1) = (4, 3)$ तथा $B(x_2, y_2) = (-7, 6)$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-3}{-7-4}$

$= \dfrac{3}{-11} = -\dfrac{3}{11}$ उत्तर

(vii) माना बिन्दु $A(x_1, y_1) = (6, 0)$ तथा $B(x_2, y_2) = (0, 6)$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-0}{0-6}$

$= \dfrac{6}{-6} = -1$ उत्तर

(viii) माना बिन्दु $P(x_1, y_1) = (0, 1)$ तथा $Q(x_2, y_2) = (1, 0)$

$\therefore$ रेखा PQ की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0-1}{1-0}$

$= \dfrac{-1}{1} = -1$ उत्तर

(ix) माना बिन्दु $P(x_1, y_1) = (3, 10)$ तथा $Q(x_2, y_2) = (7, 6)$

$\therefore$ रेखा PQ की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-10}{7-3}$

$= \dfrac{-4}{4} = -1$ उत्तर

अभ्यास 14.2

1. निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अनुसार रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए—

(i) Y-अक्ष पर अन्त:खण्ड $=5$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $=60°$

(ii) Y-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $=-7$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $=120°$

(iii) Y-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $=5$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $=135°$

(iv) Y-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $=7$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $=60°$

(v) Y-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $=-4$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $=60°$

(vi) Y-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $=4$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $=45°$

हल— (i) माना रेखा का समीकरण $y=mx+c$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्त:खण्ड $(c)=5$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta)=60°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

$=\tan 60°$

$=\sqrt{3}$

c तथा m के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$y=\sqrt{3}x+5$ उत्तर

(ii) माना रेखा का समीकरण $y=mx+c$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्त:खण्ड $(c)=-7$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta)=120°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m)=\tan 120°$

या $m=\tan(90°+30°)$

$=-\cot 30°$

$=-\sqrt{3}$

m तथा c के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$y=-\sqrt{3}x+(-7)$

या $y=-\sqrt{3}x+(-7)$ उत्तर

(iii) माना रेखा का समीकरण $y=mx+c$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्त:खण्ड $(c)=5$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta)=135°$

$\therefore$ अत: रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

या $m=\tan 135°$

$=-1$

c तथा m के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = -1 \times x + 5$$

या $y = -x + 5$ **उत्तर**

(iv) माना रेखा का समीकरण $y = mx + c$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्तःखण्ड $(c) = 7$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta) = 60°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

या $m = \tan 60°$

या $m = \sqrt{3}$

समीकरण (1) में c तथा m के मान रखने पर,

$y = \sqrt{3}x + 7$ **उत्तर**

(v) माना रेखा का समीकरण $y = mx + c$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्तःखण्ड $(c) = -4$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta) = 60°$

$\therefore$ अतः रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

या $m = \tan 60°$

या $m = \sqrt{3}$

समीकरण (1) में c तथा m के मान रखने पर,

$y = \sqrt{3}x + (-4)$

या $y = \sqrt{3}x - 4 \Rightarrow \sqrt{3}x - y = 4$ **उत्तर**

(vi) माना रेखा का समीकरण, $y = mx + c$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्तःखण्ड $(c) = 4$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta) = 45°$

अतः रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

या $m = \tan 45°$

या $m = 1$

समीकरण (1) में c तथा m के मान रखने पर,

$y = 1 \times x + 4$

या $y = x + 4$ **उत्तर**

2. निम्नलिखित रेखाओं द्वारा अक्षों पर कटे अन्तःखण्डों की लम्बाई ज्ञात कीजिए—

(i) $3x + 2y = 7$ **(ii)** $4x - 5y = 20$ **(iii)** $7x + 3y = 21$

(iv) $5x + 4y = 20$ **(v)** $2x - 5y = 10$ **(vi)** $8x + 4y + 16 = 0$

(vii) $x + y = 1$

हल— (i) दिया हुआ रेखा समीकरण, $3x+2y=7$

या $$\frac{3x}{7}+\frac{2y}{7}=1$$

या $\frac{x}{\frac{7}{3}}+\frac{y}{\frac{7}{2}}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=\frac{7}{3},\quad b=\frac{7}{2}$$ उत्तर

(ii) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$4x-5y=20$$

या $$\frac{4x}{20}-\frac{5y}{20}=1$$

या $\frac{x}{5}+\frac{y}{-4}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=5,\quad b=-4$$ उत्तर

(iii) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$7x+3y=21$$

या $$\frac{7x}{21}+\frac{3y}{21}=1$$

या $\frac{x}{3}+\frac{y}{7}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=3,\quad b=7$$ उत्तर

(iv) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$5x+4y=20$$

या $$\frac{5x}{20}+\frac{4y}{20}=1$$

या $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=4,\quad b=5$$ उत्तर

(v) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$2x-5y=10$$

या $$\frac{2x}{10}-\frac{5y}{10}=1$$

या $$\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$$

या $\frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=5, \quad b=-2$$ उत्तर

(vi) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$8x+4y+16=0$$

या $$8x+4y=-16$$

या $$\frac{8x}{-16}+\frac{4y}{-16}=1$$

या $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-4}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=-2, \quad b=-4$$ उत्तर

(vii) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$x+y=1$$

या $$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$$

या $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=1, \quad b=1$$ उत्तर

3. मूल बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो X-अक्ष के साथ 45° माप का कोण अन्तरित करती है।

हल—माना मूल बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y=mx \qquad \ldots(1)$$

दिया है—

रेखा का X-अक्ष से झुकाव $(\theta)=45°$

अतः रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta=\tan 45°=1$

समीकरण (1) में $m=1$ रखने पर,

$$y=1\times x$$

या $$y=x \Rightarrow y-x=0$$ उत्तर

4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूल बिन्दु से होकर जाती है और X-अक्ष की धनात्मक दिशा से 30° का कोण बनाती है।

हल—माना मूल बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y=mx \qquad \ldots(1)$$

दिया है—

रेखा का X-अक्ष से झुकाव $(\theta)=30°$

∴ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta°$ से

$$m = \tan 30° \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

m का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \times x$$

या $\sqrt{3}y = x \Rightarrow \sqrt{3}y - x = 0$ उत्तर

5. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूल बिन्दु से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता 6 है।

हल—माना मूल बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y = mx \quad \ldots(1)$$

दिया है—रेखा की प्रवणता $(m) = 6$ समी० (1) में रखने पर,

$$y = 6 \times x$$

या $y = 6x \Rightarrow y - 6x = 0$ उत्तर

6. बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता –1 है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है—$P(x_1, y_1) = (3, 4)$ तथा रेखा की प्रवणता $m = -1$

हम जानते हैं कि— बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से होकर जाने वाली तथा m प्रवणता की रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \ldots(1)$$

दिए हुए मान रखने पर,

$$y - 4 = -1(x - 3)$$

या $y - 4 = -x + 3$

या $y + x = 4 + 3 \Rightarrow y + x = 7$ उत्तर

7. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो X-अक्ष तथा Y-अक्ष पर क्रमशः निम्नलिखित अन्तःखण्ड काटती हैं—

(i) –5 तथा 7 (ii) 3 तथा 4 (iii) –3 तथा –4

(i) 3 तथा –3 (ii) 2 तथा 2 (iii) 7 तथा –4

हल— अन्तःखण्ड रूप में रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $\ldots(1)$

जहाँ X-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= a$

तथा Y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= b$

(i) दिया है— $a = -5, \quad b = 7$

∴ रेखा का समीकरण, $\frac{x}{-5} + \frac{y}{7} = 1$

या $-\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$ या $\frac{x}{5}-\frac{y}{7}+1=0$ उत्तर

(ii) दिया है— $a=3,\ b=4$

अत: रेखा का समीकरण, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-1=0$ उत्तर

(iii) दिया है— $a=-3,\ b=-4$

∴ रेखा का समीकरण, $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}=1$

या $-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+1=0$ उत्तर

(iv) दिया है— $a=3,\ b=-3$

∴ रेखा का समीकरण, $\frac{x}{3}+\frac{y}{-3}=1$

या $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}-1=0$ उत्तर

(v) दिया है— $a=2,\ b=2$

∴ रेखा का समीकरण, $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$

या $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1=0$ उत्तर

(vi) दिया है— $a=7,\ b=-4$

∴ रेखा का समीकरण, $\frac{x}{7}+\frac{y}{-4}=1$

या $\frac{x}{7}-\frac{y}{4}-1=0$ उत्तर

8. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों की धन दिशाओं पर समान अन्त:खण्ड काटती है तथा बिन्दु (–4, 3) से होकर जाती है।

हल—माना X-अक्ष पर कटा अन्त:खण्ड $= a$ है।

तब Y-अक्ष पर कटा अन्त:खण्ड $= a$ होगा।

∴ रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$

या $x+y=a$ ...(1)

रेखा (1) बिन्दु (–4, 3) से होकर जाती है।

∴ समीकरण (1) में $x=-4$ तथा $y=3$ रखने पर,

$-4+3=a$

या $-1=a \Rightarrow a=-1$

a का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$x+y=1$

या $x+y+1=0$ उत्तर

9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, –2) से होकर जाती है तथा दोनों अक्षों पर समान अन्तःखण्ड काटती है।

हल—माना X-अक्ष पर रेखा द्वारा कटा अन्तःखण्ड $= a$ है।

तब Y-अक्ष पर रेखा द्वारा कटा अन्तःखण्ड $= a$

$\therefore$ रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$

या $$x+y=a \qquad \ldots(1)$$

रेखा (1) बिन्दु (1, –2) से होकर जाती है।

$\therefore$ समीकरण (1) में $x=1$ तथा $y=-2$ रखने पर,

$$1-2=a \Rightarrow a=-1$$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$x+y=-1$$

या $$x+y+1=0$$ **उत्तर**

10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर बिन्दु (2, 2) स्थित है और जिसके द्वारा अक्षों पर कटे अन्तःखण्डों का योग 9 मात्रक है।

हल—माना रेखा का अन्तःखण्ड रूप समीकरण, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \ldots(1)$

जहाँ X-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= a$

तथा Y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= b$

प्रश्नानुसार, $$a+b=9 \qquad \ldots(2)$$

चूँकि रेखा (1) पर बिन्दु (2, 2) स्थित है। अतः समीकरण (1) में $x=2$ तथा $y=2$ रखने पर,

$$\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=1$$

या $$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$$

या $$\frac{2(b+a)}{ab}=1$$

या $$2(a+b)=ab$$

या $$2\times 9=ab$$ समीकरण (1) से

या $$ab=18 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(a+b)^2=9^2$$

या $$a^2+b^2+2ab=81$$

या $$a^2+b^2-2ab+4ab=81$$

या $$(a-b)^2+4\times 18=81$$

या $(a-b)^2+72=81$

या $(a-b)^2=81-72$

या $(a-b)^2=9$

या $a-b=\sqrt{9}$

या $a-b=3$ ...(4)

समीकरण (2) व (4) को जोड़ने पर,

$2a=12$

या $a=6$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$6+b=9$

या $b=9-6=3$

अब, a व b के प्राप्त मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$$ उत्तर

11. निम्नलिखित बिन्दुओं से खींची जाने वाली रेखाओं की प्रत्येक प्रतिबन्ध के अनुसार प्रवणता ज्ञात कीजिए—

(i) (4, 6) तथा (–2, 3) **(ii) (–2, 5) तथा (6, 4)**

(iii) (0, 4) तथा (4, 0) **(ii) (a, b) तथा $(a\sec^2\alpha, b\operatorname{cosec}^2\alpha)$**

हल— हम जानते हैं कि—

बिन्दु $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$(m)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(i) $A(x_1, y_1)=(4, 6)$

तथा $B(x_2, y_2)=(-2, 3)$

∴ बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$(m)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{3-6}{-2-4}=\frac{-3}{-6}$$

$$=\frac{1}{2}$$ उत्तर

(ii) $A(x_1, y_1)=(-2, 5)$ तथा $B(x_2, y_2)=(6, 4)$

∴ बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$(m)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{4-5}{6-(-2)} = \frac{-1}{6+2}$$

$$= -\frac{1}{8}$$ उत्तर

(iii) $A(x_1, y_1) = (0, 4)$ तथा $B(x_2, y_2) = (4, 0)$

∴ बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{0-4}{4-0} = \frac{-4}{4}$$

$$= -1$$ उत्तर

(iv) $A(x_1, y_1) = (a, b)$ तथा $B(x_2, y_2) = (a\sec^2\alpha, b\,\mathrm{cosec}^2\alpha)$

∴ बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{b\,\mathrm{cosec}^2\alpha - b}{a\sec^2\alpha - a}$$

$$= \frac{b(\mathrm{cosec}^2\alpha - 1)}{a(\sec^2\alpha - 1)}$$

$$= \frac{b\cot^2\alpha}{a\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{b}{a}\cot^2\alpha \times \cot^2\alpha$$

$$= \frac{b}{a}\cot^4\alpha$$ उत्तर

12. मूल बिन्दु से रेखा $2x + 3y = 5$ पर डाले गए लम्ब की माप तथा X-अक्ष पर इसकी प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$2x + 3y = 5$$

दोनों पक्षों में $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ से भाग करने पर,

$$\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

जो रेखा के लम्ब रूप अर्थात $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ के रूप में है।

जहाँ $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $p = \frac{5}{\sqrt{13}}$

अत: मूल बिन्दु से रेखा पर डाले लम्ब की माप $= p = \frac{5}{\sqrt{13}}$ उत्तर

$\because \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}} = \frac{3}{2}$

$\therefore \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{2}$

अत: X-अक्ष पर लम्ब की प्रवणता $(m) = \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{2}$ उत्तर

13. X-अक्ष से 45° का कोण बनाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिस पर बिन्दु (1, 4) स्थित है।

हल—माना रेखा का समीकरण, $y = mx + c$ ...(1)

$\therefore$ रेखा का X-अक्ष के साथ कोण $(\theta) = 45°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta = \tan 45° = 1$

रेखा बिन्दु (1, 4) से होकर जाती है।

समीकरण (1) में $m = 1$ तथा $x = 1, y = 4$ रखने पर

$$4 = 1 \times 1 + c$$

या $\quad 4 = 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = 4 - 1 = 3$

अत: रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$y = 1 \times x + 3$$

या $\quad y = x + 3$

या $\quad x - y + 3 = 0$ उत्तर

14. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (6, 5) से होकर जाती है। जबकि यह बिन्दु रेखा के अक्षों के बीच कटे अन्त:खण्ड को 3 : 4 के अनुपात में विभाजित करता है।

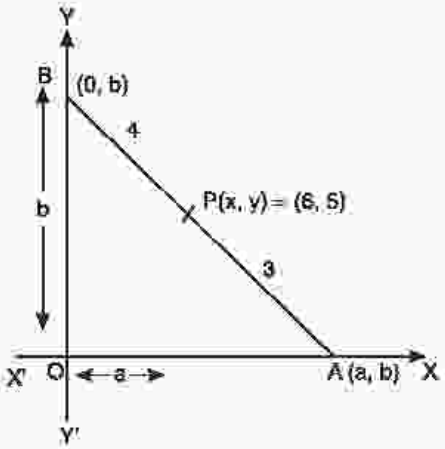
हल—माना रेखा द्वारा X-अक्ष से कटे अन्त:खण्ड की माप $= a$ मात्रक तथा Y-अक्ष से कटे अन्त:खण्ड की माप $= b$ मात्रक है।

अत: रेखा X-अक्ष को बिन्दु $A(a, 0)$ तथा Y-अक्ष को $B(0, b)$ पर काटेगी।

माना बिन्दु $P(x, y) = (6, 5)$, बिन्दु A को B मिलाने वाली रेखा को 3 : 4 के अनुपात में अन्त: विभाजित करता है।

इस प्रकार अन्त: विभाजन के लिए—

$$x_1 = a, \quad y_1 = 0 \quad x_2 = 0, \quad y_2 = b$$
$$m_1 = 3 \quad m_2 = 4 \quad P(x, y) \equiv (6, 5)$$



तब $x = \dfrac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$ सूत्र से,

$$6 = \frac{3 \times 0 + 4 \times a}{3 + 4}$$

या $$6 = \frac{4a}{7} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{6 \times 7}{4} = \frac{21}{2}$$

तथा $y = \dfrac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$ सूत्र से,

$$5 = \frac{3 \times b + 4 \times 0}{3 + 4}$$

या $$5 = \frac{3b}{7} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5 \times 7}{3} = \frac{35}{3}$$

अत: रेखा का अभीष्ट समीकरण,

सूत्र $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ में a के b मान रखने पर,

$$\frac{x}{\frac{21}{2}} + \frac{y}{\frac{35}{3}} = 1$$

या $$\frac{2x}{21} + \frac{3y}{35} = 1$$

या $$\frac{10x + 9y}{105} = 1$$

या $$10x + 9y = 105$$ उत्तर

15. बिन्दु (6, – 4) से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। जिसके द्वारा अक्षों से कटे अन्त:खण्डों का योग 7 मात्रक है।

हल—माना रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ...(1)

जहाँ a तथा b रेखा (1) द्वारा क्रमशः X-अक्ष तथा Y-अक्ष पर काटे गए अन्तःखण्ड हैं।

प्रश्नानुसार, $a+b=7$ ...(2)

रेखा (1) बिन्दु $(6,-4)$ से होकर जाती है। अतः समीकरण (1) में $x=6$ तथा $y=-4$ रखने पर,

$$\frac{6}{a}+\frac{-4}{b}=1$$

या $$\frac{6b-4a}{ab}=1$$

या $$6b-4a=ab$$

या $6(7-a)-4a=a(7-a)$ [समीकरण (2) से $b=7-a$ रखने पर]

या $$42-6a-4a=7a-a^2$$

या $$42-10a=7a-a^2$$

या $$a^2-10a-7a+42=0$$

या $$a^2-17a+42=0$$

या $$a^2-14a-3a+42=0$$

या $$a(a-14)-3(a-14)=0$$

या $$(a-14)(a-13)=0$$

$\Rightarrow$ $a=14$ या $a=3$

यदि $a=14$ तब $b=7-a=7-14=-7$

तथा यदि $a=3$ तब $b=7-a=7-3=4$

अतः रेखा का समीकरण जब $a=14$ तथा $b=-7$,

$$\frac{x}{14}+\frac{y}{-7}=1$$

या $$\frac{x}{14}-\frac{y}{7}=1$$

या $$x-2y=14$$ उत्तर

तथा रेखा का समीकरण जब $a=3$ तथा $b=4$,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

या $$4x+3y=12$$ उत्तर

16. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (3, 4) से होकर जाती है तथा जिसके द्वारा अक्षों पर कटे अन्तःखण्डों का योग 14 है।

हल—माना रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ...(1)

जहाँ a तथा b रेखा (1) द्वारा क्रमशः X-अक्ष तथा Y-अक्ष पर काटे गए अन्तःखण्ड हैं।

प्रश्नानुसार,

रेखा (1) बिन्दु (3, 4) से होकर जाती है। अतः समीकरण (1) में, $x=3$ तथा $y=4$ रखने पर,

$$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$$

या $$\frac{3b+4a}{ab}=1$$

या $$3b+4a=ab \quad \ldots(2)$$

परन्तु प्रश्नानुसार,

$$a+b=14$$

या $$b=14-a \quad \ldots(3)$$

समीकरण (3) से b का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$3(14-a)+4a=a(14-a)$$

या $$42-3a+4a=14a-a^2$$

या $$a^2-3a+4a-14a+42=0$$

या $$a^2-13a+42=0$$

या $$a^2-7a-6a+42=0$$

या $$a(a-7)-6(a-7)=0$$

या $$(a-7)(a-6)=0$$

$\Rightarrow$ $a=7$ या $a=6$

यदि $a=7$ तब समीकरण (3) से, $b=14-7=7$

तथा यदि $a=6$ तब समीकरण (3) से, $b=14-6=8$

अतः रेखा का समीकरण जब $a=7$, $b=7$,

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1$$

या $$x+y=7$$ उत्तर

तथा रेखा का समीकरण जब $a=6$, $b=8$,

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$$

या $$4x+3y=24$$ उत्तर

17. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (3, 2) से होकर जाती है और X-अक्ष तथा Y-अक्ष के धनात्मक दिशा में 3 : 4 के अनुपात में अन्तःखण्ड काटती है।

हल—माना रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \ldots(1)$$

जहाँ $a = X$-अक्ष से कटा अन्त:खण्ड

तथा $b = Y$-अक्ष से कटा अन्त:खण्ड

चूँकि रेखा (1) बिन्दु (3, 2) से होकर जाती है अत: समीकरण (1) में $x = 3$ तथा $y = 2$ रखने पर,

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$$

या $\qquad 3b+2b=ab \qquad \ldots(2)$

परन्तु प्रश्नानुसार, $\qquad a:b=3:4$

या $\qquad \frac{a}{b}=\frac{3}{4}$

या $\qquad b=\frac{4a}{3}$ यह मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$3\times\frac{4a}{3}+2a=a\times\frac{4a}{3}$$

या $\qquad 4a+2a=\frac{4a^2}{3}$

या $\qquad 6a=\frac{4a^2}{3}$

या $\qquad 18a=4a^2$

या $\qquad 4a^2-18a=0$

या $\qquad 2a(2a-9)=0$

या $\qquad a(2a-9)=0$

$\Rightarrow \qquad a=0 \quad$ तथा $\quad 2a-9=0$

या $\qquad a=\frac{9}{2}$

जब $a=0$ तब $b=\frac{4\times0}{3}=0$

तथा जब $a=\frac{9}{2}$ तब $b=\frac{4\times\frac{9}{2}}{3}=\frac{18}{3}=6$

अत: रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$\frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{6}=1$$

या $\frac{2x}{9}+\frac{y}{6}=1 \Rightarrow 4x+3y=18$ उत्तर

18. यदि बिन्दु (3, −5) तथा बिन्दु (2, 4) रेखा $y=mx+c$ पर स्थित हों तो m और c के मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$y=mx+c \quad \ldots(1)$$

बिन्दु (3, −5) रेखा (1) पर स्थित है। अतः रेखा में $x=3$ तथा $y=-5$ रखने पर,

$$-5=m\times 3+c$$

या $-5=3m+c$

या $c=-5-3m \quad \ldots(2)$

तथा बिन्दु (2, 4) भी रेखा (1) पर स्थित है। अतः समीकरण (1) में $x=2$ तथा $y=4$ रखने पर

$$4=m\times 2+c$$

या $4=2m+c \Rightarrow c=4-2m \quad \ldots(3)$

समीकरण (2) व (3) से,

$$-5-3m=4-2m$$

या $-3m+2m=4+5$

या $-m=9 \Rightarrow m=-9$

अब, m का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$c=4-2\times(-9)=4+18=22$$

अतः $m=-9, \quad c=22$ उत्तर

19. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप 8 मात्रक तथा लम्ब का X-अक्ष से झुकाव 30° हो।

हल—माना रेखा का समीकरण,

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad \ldots(1)$$

प्रश्नानुसार,

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप $(p)=8$ मात्रक

तथा लम्ब का X-अक्ष से झुकाव $(\alpha)=30°$

समीकरण (1) में p तथा α के मान रखने पर,

$$x\cos 30°+y\sin 30°=8$$

या $x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+y\times\frac{1}{2}=8$

या $\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}=8$

या $x\sqrt{3}+y=16$ उत्तर

20. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूलबिन्दु से डाले गए लम्ब की माप 3 मात्रक है तथा उस पर लम्ब की प्रवणता $\sqrt{3}$ है। रेखा का X-अक्ष के धन भाग से झुकाव भी ज्ञात कीजिए।

हल—माना रेखा का समीकरण,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad \ldots(1)$$

प्रश्नानुसार,

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप $(p) = 3$ मात्रक

तथा लम्ब की प्रवणता $(m) = \sqrt{3}$

या $\tan\alpha = \sqrt{3}$

या $\tan\alpha = \tan 60^\circ$

या $\alpha = 60^\circ$

अतः p तथा α के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ = 3$$

या $$x\times\frac{1}{2} + y\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

या $$x + y\sqrt{3} = 6 \qquad \ldots(2)$$ **उत्तर**

माना दी हुई रेखा का X-अक्ष के धन भाग से झुकाव $= \theta$

समीकरण (2) से,

$$y = \frac{-x}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}}$$ की तुलना $y = mx + c$ से करने पर,

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $$\tan\theta = \tan 150^\circ$$

या $$\theta = 150^\circ$$ **उत्तर**

अभ्यास 14.3

1. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-1, 2)$ से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता $\frac{2}{5}$ है।

हल—दिया हुआ बिन्दु $(x_1, y_1) = (-1, 2)$

तथा रेखा की प्रवणता $(m) = \frac{2}{5}$

एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा के सूत्र $y - y_1 = m(x - x_1)$ से,

$$y-2=\frac{2}{5}\{x-(-1)\}$$

या $$y-2=\frac{2}{5}\{x+1\}$$

या $$5y-10=2x+2$$

या $$5y=2x+2+10$$

या $$5y=2x+12$$

या $$2x-5y+12=0$$ उत्तर

2. $P(4, 0)$ व $Q(0, -3)$ से होकर जाने वाली रेखा PQ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है—

$$P(4,0)=(x_1, y_1)$$

$$Q(0,-3)=(x_2, y_2)$$

दो बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y-0=\frac{-3-0}{0-4}(x-4)$$

या $$y=\frac{-3}{-4}(x-4)$$

या $$\frac{y}{-3}=\frac{x}{-4}-\frac{4}{-4}$$

या $$-\frac{y}{3}=-\frac{x}{4}+1$$

या $$\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$$ उत्तर

3. बिन्दु (a, b) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। जिसकी प्रवणता $-\frac{b}{a}$ है।

हल—दिया है—

$$(x_1, y_1)=(a, b)$$

$$\text{तथा प्रवणता } (m)=-\frac{b}{a}$$

एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y-y_1=m(x-x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y-b=\frac{-b}{a}(x-a)$$

या $ay - ab = -bx + ab$

या $bx + ay - ab - ab = 0$

या $bx + ay - 2ab = 0$ उत्तर

4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं (a, b) तथा (ab, b^2) से होकर जाती है।

हल—दिया है—

$$(x_1, y_1) = (a, b)$$

तथा $(x_2, y_2) = (ab, b^2)$

दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y - b = \frac{b^2 - b}{ab - a}(x - a)$$

या $$y - b = \frac{b(b-1)}{a(b-1)}(x - a)$$

या $$y - b = \frac{b}{a}(x - a)$$

या $$\frac{y}{b} - \frac{b}{b} = \frac{x}{a} - \frac{a}{a}$$

या $$\frac{y}{b} - 1 = \frac{x}{a} - 1$$

या $$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - 1 + 1 = 0$$

या $$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$ उत्तर

5. धन X-अक्ष से 45° का कोण बनाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिस पर (1, 4) बिन्दु स्थित है।

हल— रेखा का धन X-अक्ष से कोण $(\theta) = 45°$

∴ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

या $$m = \tan 45°$$

या $$m = 1$$

रेखा पर स्थित बिन्दु $(x_1, y_1) = (1, 4)$

एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y - 4 = 1(x - 1)$$

या $y-4=x-1$

या $x-y-1+4=0$

या $x-y+3=0$ उत्तर

6. बिन्दु (2, 3) व (6, 5) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है— $(x_1, y_1)=(2, 3)$

तथा $(x_2, y_2)=(6, 5)$

दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

या $$m=\frac{5-3}{6-2}$$

$$=\frac{2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$ उत्तर

7. बिन्दु (0, 6) से होकर जाने वाली तथा X-अक्ष की धनात्मक दिशा से 45° का कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल— रेखा का X-अक्ष की धनात्मक दिशा से झुकाव $(\theta)=45°$

∴ रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

$$=\tan 45°$$

$$=1$$

दिया हुआ बिन्दु $(x_1, y_1)=(0, 6)$

एक बिन्दु से होकर जाने वाली तथा m प्रवणता वाली रेखा का समीकरण,

$y-y_1=m(x-x_1)$ सूत्र से,

$y-6=1(x-0)$

या $y-6=x$

या $x-y+6=0$ उत्तर

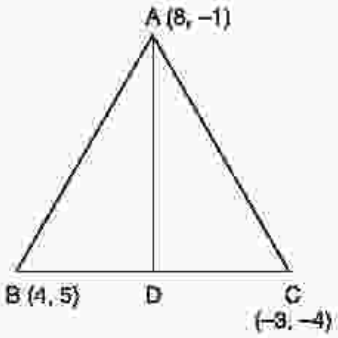
8. ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक $A(8, -1)$, $B(4, 5)$ व $C(-3, -4)$ है। शीर्ष A से होकर जाने वाली माध्यिका का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है—

ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक

$A(8, -1)$, $B(4, 5)$ तथा $C(-3, 4)$

∴ शीर्ष A से होकर जाने वाली माध्यिका सम्मुख भुजा BC के मध्य-बिन्दु D पर मिलती है।



अत: BC के मध्य-बिन्दु D के निर्देशांक

$$= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ सूत्र से,}$$

$$= \left(\frac{4+(-3)}{2}, \frac{5+(-4)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{4-3}{2}, \frac{5-4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

माध्यिका AD का समीकरण = बिन्दु A व D से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

सूत्र $\quad y-y_1 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ से,

$$y-(-1) = \frac{\frac{1}{2}-(-1)}{\frac{1}{2}-8}(x-8) \qquad \left[\begin{array}{l}(x_1, y_1) = A(8,-1)\\ (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{array}\right]$$

या $\quad y+1 = \dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-8}(x-8)$

या $\quad y+1 = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{-15}{2}}(x-8)$

या $\quad y+1 = \dfrac{3}{-15}(x-8)$

या $\quad -15y-15 = 3x-24$

या $\quad 3x+15y+15-24 = 0$

या $\quad 3x+15y-9 = 0$

या $\quad x+5y-3 = 0$ **उत्तर**

9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो धन X-अक्ष से $120°$ का कोण बनाती है और उस बिन्दु से होकर जाती है जहाँ रेखा $2x+y=4$, X-अक्ष को काटती है।

हल— रेखा का धन X-अक्ष से बना कोण $(\theta) = 120°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

$$= \tan 120°$$

$$= -\sqrt{3}$$

माना रेखा $2x+y=4$, X-अक्ष को बिन्दु $(a, 0)$ पर काटती है।

अतः इस समीकरण में $x=a$ तथा $y=0$ रखने पर,

$$2a+0=4$$

या $$2a=4 \Rightarrow a=2$$

अतः वह बिन्दु जहाँ रेखा X-अक्ष को काटती $(2, 0)$ है,

हमें उस रेखा का समीकरण ज्ञात करना है जिसकी प्रवणता $\sqrt{3}$ तथा जो बिन्दु $(2, 0)$ से होकर जाती है।

अतः एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y-y_1 = m(x-x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y-0 = -\sqrt{3}(x-2) \qquad [\because (x_1, y_1) = (2, 0)]$$

या $$y = -\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$$

या $$\sqrt{3}x+y=2\sqrt{3}$$ उत्तर

10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-3, 1)$ से जाती है तथा धन X-अक्ष से $60°$ का कोण बनाती है।

हल— रेखा का धन X-अक्ष से झुकाव (कोण) $= 60°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta = \tan 60° = \sqrt{3}$

तथा दिया हुआ बिन्दु $(x_1, y_1) = (-3, 1)$

एक बिन्दु से होकर जाने वाली तथा प्रवणता m वाली रेखा का समीकरण,

$$y-y_1 = m(x-x_1) \text{ सूत्र से,}$$

अतः $$y-1 = \sqrt{3}\{x-(-3)\}$$

या $$y-1 = \sqrt{3}(x+3)$$

या $$y-1 = \sqrt{3}x+3\sqrt{3}$$

या $$\sqrt{3}x-y+3\sqrt{3}+1=0$$ उत्तर

11. मूल बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो X-अक्ष से $30°$ का कोण बनाती है।

हल— रेखा का X-अक्ष से बना कोण (झुकाव) $= 30°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $= m = \tan\theta$

$$= \tan 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

मूल बिन्दु के निर्देशांक = (0, 0)

मूल बिन्दु से होकर जाने वाली तथा प्रवणता m की रेखा का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ सूत्र से,

अतः $y - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 0)$

या $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

या $\sqrt{3}y = x \quad \Rightarrow \quad x - \sqrt{3}y = 0$ उत्तर

12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से होकर जाती है तथा X-अक्ष की धनात्मक दिशा से 60° का झुकाव बनाती है।

हल— रेखा का X-अक्ष की धनात्मक दिशा से झुकाव $(\theta) = 60^\circ$

∴ रेखा की प्रवणता, $m = \tan\theta$ सूत्र से,

$m = \tan 60^\circ$

या $m = \sqrt{3}$

रेखा बिन्दु $(x_1, y_1) = (1, 2)$ से होकर जाती है।

एक बिन्दु से होकर जाने वाली तथा m प्रवणत की रेखा का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ सूत्र से,

$y - 2 = \sqrt{3}(x - 1)$

या $y - 2 = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

या $\sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$ उत्तर

13. बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता –1 है रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है— बिन्दु $(x_1, y_1) = (3, 4)$

तथा प्रवणता $(m) = -1$

सूत्र, $y - y_1 = m(x - x_1)$ से रेखा का समीकरण,

$y - 4 = -1(x - 3)$

या $y - 4 = -x + 3 \quad \Rightarrow \quad x + y = 4 + 3$

या $x + y = 7$ उत्तर

14. यदि तीन बिन्दु (a, b), (c, d) तथा $(a - c, b - d)$ संरेख हों, तो सिद्ध कीजिए कि $ad = bc$

हल—दिए गए बिन्दु, $A(x_1, y_1) = (a, b)$

$$B(x_2, y_2) = (c, d)$$

तथा $$C(x_3, y_3) = (a-c, b-d)$$

यदि तीन बिन्दु A, B व C संरेख हैं तब

रेखा AB की प्रवणता = रेखा BC की प्रवणता

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

या $$\frac{d-b}{c-a} = \frac{(b-d)-d}{(a-c)-c}$$

या $$\frac{d-b}{c-a} = \frac{b-d-d}{a-c-c}$$

या $$\frac{d-b}{c-a} = \frac{b-2d}{a-2c}$$

या $$(d-b)(a-2c) = (c-a)(b-2d)$$

या $$ad - 2cd - ab + 2bc = bc - 2cd - ab + 2ad$$

या $$ad + 2bc = bc + 2ad$$

या $$2bc - bc = 2ad - ad \Rightarrow bc = ad$$

या $$ad = bc$$ इति सिद्धम्

15. यदि $\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{3}$ तो सिद्ध कीजिए कि तीन बिन्दु $(3, 3)$, $(h, 0)$ और $(0, k)$ संरेख हैं।

हल—दिए गए तीन बिन्दु— $(3, 3)$, $(h, 0)$ और $(0, k)$

उपर्युक्त तीनों बिन्दु संरेख होंगे यदि—

बिन्दु $(3, 3)$ व $(h, 0)$ से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

= बिन्दु $(h, 0)$ व $(0, k)$ से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

अतः $$\frac{0-3}{h-3} = \frac{k-0}{0-h}$$

या $$\frac{-3}{h-3} = \frac{k}{-h}$$

या $$3h = hk - 3k$$

या $$3k + 3h = hk$$

या $$3(k+h) = hk$$

या $$k + h = \frac{hk}{3}$$

या $$\frac{k+h}{hk} = \frac{1}{3}$$

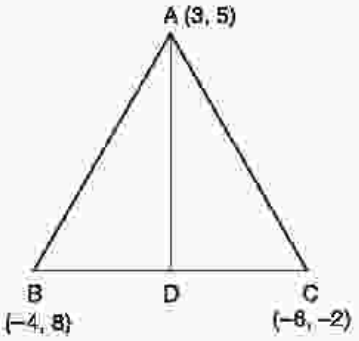
या $$\frac{k}{hk} + \frac{h}{hk} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{3}$$ इति सिद्धम्

16. ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः $A(3, 5), B(-4, 8)$ तथा $C(-6, -2)$ हैं। शीर्ष A से खींची गई त्रिभुज की माध्यिका का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है—

ΔABC के शीर्ष $A(3, 5), B(-4, 8)$ तथा $C(-6, 2)$ हैं।

माना शीर्ष A से खींची गई माध्यिका सम्मुख भुजा BC के मध्य बिन्दु D पर मिलती है।



अतः बिन्दु D के निर्देशांक

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \text{ सूत्र से,}$$

$$= \left(\frac{-4-6}{2}, \frac{8-2}{2}\right) \quad [\ (x_1, y_1 = (-4, 8), (x_2, y_2) = (-6, -2)]$$

$$= \left(\frac{-10}{2}, \frac{6}{2}\right)$$

$$= (-5, 3)$$

माध्यिका AD का समीकरण = बिन्दु A व D से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

अतः $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y - 5 = \frac{3-5}{-5-3}(x-3) \qquad \left[\begin{array}{l}(x_1, y_1) = (3, 5)\\ (x_2, y_2) = (-5, 3)\end{array}\right]$$

या $$y - 5 = \frac{-2}{-8}(x-3)$$

या $$y - 5 = \frac{1}{4}(x-3)$$

या $$4y - 20 = x - 3$$

या $$x - 4y - 3 + 20 = 0$$

या $$x - 4y + 17 = 0$$ **उत्तर**

17. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (1, 3) तथा (3, 5) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दु (p, q) से होकर जाएगी यदि $p - q + 2 = 0$।

हल—दिए गए बिन्दु, $A(x_1, y_1) = (1, 3)$

$B(x_2, y_2) = (3, 5)$

अतः बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

या $$y - 3 = \frac{5-3}{3-1}(x-1)$$

या $$y - 3 = \frac{2}{2}(x-1)$$

या $$y - 3 = x - 1$$

या $$x - y - 1 + 3 = 0$$

या $$x - y + 2 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) बिन्दु (p, q) से होकर जाती है।

अतः रेखा (1) में $x = p$ तथा $y = q$ रखने पर,

$$p - q + 2 = 0$$ **उत्तर**

अभ्यास 14.4

1. निम्नलिखित समीकरणों को प्रवणता अन्तःखण्ड रूप में परिवर्तित कीजिए और उनके प्रवणता तथा Y-अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए—

(i) $x + 7y = 0$ (ii) $6x + 3y - 5 = 0$ (iii) $y = 0$

हल—(i) दी गई समीकरण,

$$x + 7y = 0$$

या $$7y = -x + 0$$

या $$y = \frac{-x}{7} + 0$$

या $y = \frac{-x}{7} + 0$ की तुलना $y = mx + c$ से करने पर,

$$m = -\frac{1}{7} \quad \text{तथा} \quad c = 0$$ **उत्तर**

(ii) दी गई समीकरण,

$$6x + 3y - 5 = 0$$

या $$3y = -6x + 5$$

या $$y = \frac{-6x}{3} + \frac{5}{3}$$

या $y=-2x+\frac{5}{3}$ की तुलना $y=mx+x$ से करने पर,

$m=-2, \quad c=\frac{5}{3}$ उत्तर

(iii) दी गई समीकरण,

$y=0 \quad \Rightarrow \quad y=0\cdot x+0$ की तुलना

$y=mx+c$ से करने पर,

$m=0$ तथा $c=0$ उत्तर

2. निम्नलिखित समीकरणों को अन्त:खण्ड रूप में परिवर्तित कीजिए और अक्षों पर इनके द्वारा काटे गए अन्त:खण्ड ज्ञात कीजिए—

(i) $3x+2y-12=0$ (ii) $4x-3y=6$ (iii) $3y+2=0$

हल—(i) दी गई समीकरण,

$3x+2y-12=0$

या $3x+2y=12$

या $\frac{3x}{12}+\frac{2y}{12}=\frac{12}{12}$

या $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ की तुलना $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$a=4, \quad b=6$ उत्तर

(ii) दी गई समीकरण,

या $4x-3y=6$

या $\frac{4x}{6}-\frac{3y}{6}=\frac{6}{6}$

या $\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=1$

या $\frac{2x}{3}+\frac{y}{-2}=1$ की तुलना $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$a=\frac{3}{2}, \quad b=-2$ उत्तर

(iii) दी गई समीकरण,

$3y+2=0$

या $3y=-2$

या $\frac{3y}{-2}=1$

या $\frac{y}{-2/3}+\frac{0\cdot x}{0}=1$ की तुलना $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=0, \quad b=-\frac{2}{3}=Y$$

Y-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड तथा X-अक्ष पर कोई अन्त:खण्ड नहीं। उत्तर

3. निम्नलिखित समीकरणों को लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए। उनकी मूल बिन्दु से लाम्बिक दूरियाँ और लम्ब तथा धन X-अक्ष के बीच का कोण ज्ञात कीजिए—

(i) $x-\sqrt{3}y+8=0$ (ii) $y-2=0$ (iii) $x-y=4$

हल—(i) दी गई समीकरण,

$$x-\sqrt{3}y+8=0$$

या $$x-\sqrt{3}y=-8$$

या $$-x+\sqrt{3}y=8$$

या $$\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}y=\frac{8}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}$$

या $$\frac{-1}{\sqrt{1+3}}x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}}y=\frac{8}{\sqrt{1+3}}$$

या $$\frac{-1}{\sqrt{4}}x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}y=\frac{8}{\sqrt{4}}$$

या $$\frac{-1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{8}{2}$$

या $x\cos 120°+y\sin 120°=4$ की तुलना $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ से करने पर

$$\alpha=120°, \quad p=4$$

अत: मूल बिन्दु से रेखा की लाम्बिक दूरी $(p)=4$ मात्रक

तथा लम्ब व X-अक्ष के बीच का कोण $(\alpha)=120°$ उत्तर

(ii) दी गई समीकरण,

$$y-2=0$$

या $$0x+y=2$$

या $$\frac{0x}{\sqrt{0^2+1^2}}+\frac{y}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

या $$\frac{0x}{\sqrt{1}}+\frac{y}{\sqrt{1}}=\frac{2}{\sqrt{1}}$$

या $$0x+y=2$$

या $$\cos 90°+\sin 90°\ y=2$$

या $x\cos 90°+y\sin 90°=2$ की तुलना रेखा के लम्ब रूप

$x\cos\alpha+y\sin\alpha=P$ से करने पर,

$P=2$ मात्रक, $\alpha=90°$

अत: मूल बिन्दु से रेखा की लाम्बिक दूरी $p=2$ मात्रक

तथा लम्ब का धन X-अक्ष के बीच का कोण $\alpha=90°$ उत्तर

(iii) दी गई समीकरण,

$$x-y=4$$

या $$\frac{x}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}+\frac{-y}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

या $$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{-y}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

या $\cos 315°\cdot x+\sin 315°\cdot y=2\sqrt{2}$

या $x\cdot\cos 315°+y\sin 315°=2\sqrt{2}$ की तुलना रेख के लम्ब रूप

$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ से करने पर,

$p=2\sqrt{2}$ मात्रक, $\alpha=315°$

अत: दी गई रेखा की मूल बिन्दु से लाम्बिक दूरी $P=2\sqrt{2}$ मात्रक

तथा लम्ब का धन X-अक्ष के बीच का कोण $a=315°$ उत्तर

4. बिन्दु $(-1, 1)$ की रेखा $12(x+6)=5(y-2)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$12(x+6)=5(y-2)$$

$$12x+72=5y-10$$

या $12x-5y+72+10=0$

या $12x-5y+82=0$ ...(1)

अत: रेखा (1) की बिन्दु $(-1, 1)$ से दूरी = बिन्दु $(-1, 1)$ से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप

$$P=\frac{12\times(-1)-5\times 1+82}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

[बिन्दु (x_1, y_1) से रेखा $ax+by+c=0$ की लाम्बिक दूरी $(p)=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$]

या $$P=\frac{-12-5+82}{\sqrt{144+25}}$$

$$=\frac{-17+82}{\sqrt{169}}$$

$$=\frac{65}{13}$$

$=5$ मात्रक (इकाई)

5. X-अक्ष पर बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए, जिनकी रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ से दूरियाँ 4 इकाई है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

या $\quad 4x+3y=12$

या $\quad 4x+3y-12=0 \quad \ldots(1)$

माना X-अक्ष पर स्थित बिन्दुओं $(a, 0)$ से रेखा (1) की दूरियाँ 4 इकाई हैं।

अत: बिन्दु $(a, 0)$ से रेखा (1) की दूरी = बिन्दु $(a, 0)$ से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप

या $$\pm 4=\frac{4\times a+3\times 0-12}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

या $$\pm 4=\frac{4a+0-12}{\sqrt{16+9}}$$

या $$\pm 4=\frac{4a-12}{\sqrt{25}}$$

या $$\pm 4=\frac{4a-12}{5}$$

अब, यदि $$4=\frac{4a-12}{5}$$

या $$20=4a-12$$

या $$4a=20+12$$

या $$4a=32$$

या $$a=\frac{32}{4}=8$$

तथा यदि $$-4=\frac{4a-12}{5}$$

या $$-20=4a-12$$

या $$4a=-20+12$$

या $$4a=-8$$

या $$a=\frac{-8}{4}=-2$$

अत: अभीष्ट बिन्दु $= (8, 0)\ (-2, 0)$ उत्तर

6. रेखा $5x+12y-1=0$ पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप ज्ञात कीजिए तथा लम्ब का धन X-अक्ष से झुकाव भी ज्ञात कीजिए।

हल—दी हुई समीकरण,

$$5x+12y-1=0$$

या $$5x+12y=1$$

या $$\frac{5x}{\sqrt{5^2+12^2}}+\frac{12y}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{1}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

या $$\frac{5x}{\sqrt{25+144}}+\frac{12y}{\sqrt{25+144}}=\frac{1}{\sqrt{25+144}}$$

$$\frac{5x}{\sqrt{169}}+\frac{12y}{\sqrt{169}}=\frac{1}{\sqrt{169}}$$

या $$\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y=\frac{1}{13} \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा के लम्ब रूप $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ से करने पर,

$$\cos\alpha=\frac{5}{13},\ \sin\alpha=\frac{12}{13} \quad \text{तथा} \quad p=\frac{1}{13} \text{ इकाई}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12/15}{5/13}=\frac{12}{5}$$

या $$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$$

अत: मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप $(p)=\frac{1}{13}$ इकाई

तथा लम्ब का धन X-अक्ष से झुकाव $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ उत्तर

7. रेखा $x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha$ को अन्त:खण्ड रूप में व्यक्त कीजिए तथा रेखा द्वारा अक्षों के कटे अन्त:खण्ड भी ज्ञात कीजिए।

(दिया है—$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$)

हल—दी हुई समीकरण,

$$x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

या $$x\sin\alpha+y\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

या $$\frac{x\sin\alpha+y\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=1$$

या $$\frac{x\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{y\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=1$$

या $$\frac{x}{2\cos\alpha}+\frac{y}{2\sin\alpha}=1 \quad \ldots(1)$$

जो कि रेखा का अन्त:खण्ड रूप है

रेखा (1) की तुलना $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

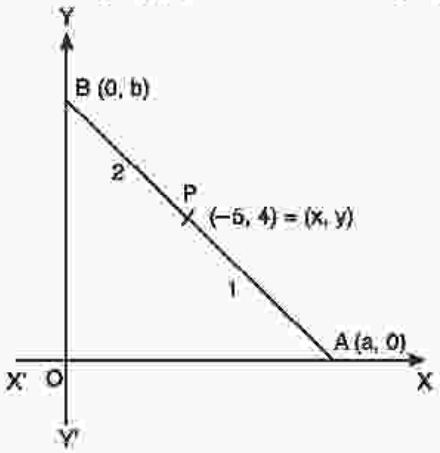
$$a=2\cos\alpha \quad b=2\sin\alpha$$ उत्तर

8. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–5, 4) से जाती है तथा बिन्दु रेखा के अक्षों के मध्य कटे अन्तःखण्ड को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।

हल—माना रेखा द्वारा X-अक्ष से कटे अन्तःखण्ड की माप $= a$ इकाई

तथा Y-अक्ष से कटे अन्तःखण्ड की माप $= b$ इकाई

अतः रेखा X-अक्ष को बिन्दु $A(a, 0)$ तथा Y-अक्ष को बिन्दु $B(0, b)$ काटेगी।



माना बिन्दु $P(x, y)=(-5, 4)$ रेखा AB को $1:2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करते हैं।

अतः विभाजन के लिए,

$$m_1=1, \quad m_2=2$$

$$x_1=a, \quad x_2=0, \quad y_1=0, \quad y_2=b$$

$$P(x, y)=(-5, 4)$$

अतः अन्तः विभाजन सूत्र

$$P(x, y)=\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right) \text{ से,}$$

या $$(-5, 4)=\left(\frac{1\times0+2\times a}{1+2}, \frac{1\times b+2\times b}{1+2}\right)$$

या $$(-5, 4)=\left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

अतः $$\frac{2a}{3}=-5 \quad \text{तथा} \quad \frac{b}{3}=4$$

या $$a=-\frac{15}{2}, \quad b=12$$

अत: रेखा का अभीष्ट समीकरण

सूत्र $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से,

$$\frac{x}{\frac{15}{2}}+\frac{y}{12}=1$$

या $$-\frac{2x}{15}+\frac{y}{12}=1$$

या $$\frac{-8x+5y}{60}=1$$

या $$-8x+5y=60$$

या $$8x-5y+60=0$$ उत्तर

9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 2) से होकर जाती है और X-अक्ष तथा Y-अक्ष की धनात्मक दिशा में 3 : 4 के अनुपात में अन्त:खण्ड काटती है। इस रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप भी ज्ञात कीजिए।

हल—माना रेखा द्वारा X-अक्ष की धन दिशा में काटा गया अन्त:खण्ड $=3a$

तब Y-अक्ष की धन दिशा में काटा गया अन्त:खण्ड $=4a$

सूत्र $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से

रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3a}+\frac{y}{4a}=1$$

या $$4x+3y=12a$$ ...(1)

रेखा (1) बिन्दु (3, 2) से होकर जाती है। अत: इस बिन्दु के निर्देशांक रेखा (1) को सन्तुष्ट करेंगे।

∴ रेखा (1) में $x=3$ और $y=2$ रखने पर,

$$4\times3+3\times2=12a$$

या $$12+6=12a$$

या $$18=12a \Rightarrow a=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

a का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$4x+3y=12\times\frac{3}{2}$$

या $$4x+3y=18$$

या $$4x+3y-18=0$$ ...(2) उत्तर

मूल बिन्दु (0, 0) से रेखा (2) पर डाले गए लम्ब की माप

$$p=\frac{4\times0+3\times0-18}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{-18}{\sqrt{16+9}}=-\frac{18}{\sqrt{25}}=\frac{-18}{5}$$

या $p=\frac{18}{5}$ इकाई (ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर) उत्तर

10. a और b के किन मानों के लिए समीकरण $ax+by+8=0$ और $3x-4y-12=0$ से एक ही रेखा निरूपित होगी?

हल—दी गई समीकरणों,

$$ax+by+8=0 \quad \text{तथा} \quad 3x-4y-12=0$$

या $ax+by=-8$ तथा $3x-4y=12$

या $$\frac{ax}{-8}+\frac{by}{-8}=1 \qquad \ldots(1)$$

तथा $$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) एक ही रेखा निरूपित करती हैं। अतः समीकरण (1) व (2) की तुलना करने पर,

$$\frac{a}{-8}=\frac{1}{4} \quad \text{तथा} \quad \frac{b}{-8}=\frac{1}{-3}$$

या $a=\frac{-8}{4}$ तथा $b=\frac{-8}{-3}$

या $a=-2$ तथा $b=\frac{8}{3}$ उत्तर

11. रेखा $3x-\sqrt{3}y+7=0$ को अन्तःखण्ड रूप में परिवर्तित कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x-\sqrt{3}y+7=0$$

या $3x-\sqrt{3}y=-7$

या $$\frac{3}{-7}x\frac{-\sqrt{3}}{-7}y=1$$

या $$\frac{x}{\frac{-7}{3}}+\frac{y}{\frac{7}{\sqrt{3}}}=1$$ जो कि रेखा का अभीष्ट अन्तःखण्ड रूप है।

उत्तर

12. निम्नलिखित समीकरणों को लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए—

(i) $x+y+3=0$ (ii) $x+2=0$ (iii) $x-\sqrt{3}y+6=0$

हल— (i) दी गई समीकरण,

$$x+y+3=0$$

या $x+y=-3$

या $-x-y=3$

या $\frac{-x}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}+\frac{y}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}$

या $-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

या $x\cos 225^\circ+y\sin 225^\circ=\frac{3}{\sqrt{2}}$ $\left[\because \cos 225^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin 225^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

जो कि रेखा का लम्ब रूप है। उत्तर

(ii) दी गई समीकरण,

$x+2=0$

या $-x=2$

या $-x+0\cdot y=2$

$\Rightarrow \frac{-x}{\sqrt{(-1)^2+0^2}}+\frac{0\cdot y}{\sqrt{(-1)^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{(-1)^2+0^2}}$

या $-x+0\cdot y=2$

या $x\cos 180^\circ+y\sin 180^\circ=2$ $[\because \cos 180^\circ=-1,\ \sin 180^\circ=0]$

जो कि रेखा का लम्ब रूप है। उत्तर

(iii) दी गई समीकरण,

$x-\sqrt{3}y+6=0$

या $-x+\sqrt{3}y=6$

या $\frac{-x}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}+\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{6}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}$

या $\frac{-x}{\sqrt{1+3}}+\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{1+3}}=\frac{6}{\sqrt{1+3}}$

या $-\frac{x}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{4}}=\frac{6}{\sqrt{4}}$

या $-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{6}{2}$

या $x\cos 120^\circ+y\sin 120^\circ=3$ जो कि रेखा का लम्ब रूप है। उत्तर

13. यदि बिन्दु (3, –5) तथा (2, 4) रेखा $y=mx+c$ पर स्थित हों, तो m और c के मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$y = mx + c \qquad \ldots(1)$$

बिन्दु $(3, -5)$ तथा $(2, 4)$ रेखा (1) पर स्थित हैं। अत: ये दोनों बिन्दु रेखा (1) को सन्तुष्ट करेंगे।

$\therefore$ समीकरण (1) में $x = 3$, $y = -5$ रखने पर,

$$-5 = 3m + c$$

या $$c = -3m - 5 \qquad \ldots(2)$$

अब समीकरण (1) में $x = 2$ तथा $y = 4$ रखने पर,

$$4 = 2m + c$$

या $$c = 4 - 2m \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (3) से,

$$-3m - 5 = 4 - 2m$$

या $$-5 - 4 = 3m - 2m$$

या $$-9 = m \Rightarrow m = -9$$

समीकरण (3) में m का मान रखने पर,

$$c = 4 - 2 \times (-9)$$

$$= 4 + 18 = 22$$

अत: $m = 9$ तथा $c = 22$ **उत्तर**

14. एक रेखा का समीकरण $5x - 12y + 26 = 0$ है। इस समीकरण को लम्बरूप में व्यक्त कीजिए।

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$5x - 12y + 26 = 0$$

या $$-5x + 12y = 26$$

या $$\frac{-5x}{\sqrt{(-5)^2 + (12)^2}} + \frac{12y}{\sqrt{(-5)^2 + (12)^2}} = \frac{26}{\sqrt{(-5)^2 + (12)^2}}$$

या $$\frac{-5x}{\sqrt{25 + 144}} + \frac{12y}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{26}{\sqrt{25 + 144}}$$

या $$\frac{-5x}{\sqrt{169}} + \frac{12y}{\sqrt{169}} = \frac{26}{\sqrt{169}}$$

या $$\frac{-5x}{13} + \frac{12y}{13} y = \frac{26}{13}$$

या $$\frac{-5x}{13} + \frac{12y}{13} y = 2$$ जो कि रेखा का लम्ब रूप है।

उत्तर

15. रेखा $x\cos 60°+y\sin 60°=7$ का X-अक्ष से झुकाव तथा रेखा की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$x\cos 60°+y\sin 60°=7$$ की तुलना रेखा के लम्ब रूप

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$ से करने पर,

$$\alpha=60° \quad \text{तथा} \quad p=7$$

अतः रेखा का X-अक्ष से झुकाव $=90°+\alpha=90°+60°=150°$

तथा रेखा की मूल बिन्दु से दूरी $=p=7$ इकाई **उत्तर**

16. रेखा $3x-y\sqrt{3}+7=0$ का X-अक्ष की धन दिशा के साथ बना कोण ज्ञात कीजिए।

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$3x-y\sqrt{3}+7=0$$

या $$y\sqrt{3}=3x+7$$

या $$y=\frac{3x}{\sqrt{3}}+\frac{7}{\sqrt{3}}$$

या $y=\sqrt{3}x+\frac{7}{\sqrt{3}}$ की तुलना रेखा के प्रवणता $y=mx+c$ रूप से करने पर,

$$m=\sqrt{3}$$

या $$\tan\theta=\sqrt{3} \qquad [\ m=\tan\theta]$$

या $$\tan\theta=\tan 60°$$

या $$\theta=60°$$

अतः रेखा का X-अक्ष की धन दिशा के साथ बना कोण $=60°$ **उत्तर**

अभ्यास 14.5

1. निम्नलिखित रेखा-युग्मों के प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए—

(i) $3x+2y=8$ तथा $5x-11y+1=0$

(ii) $9x-10y=12$ तथा $8y-3=0$

(iii) $y=\sqrt{3}x+8$ तथा $x+\sqrt{3}y=12$

हल— (i) दिए गए रेखा-युग्म समीकरण,

$$3x+2y=8 \qquad \ldots(1)$$

तथा $$5x-11y+1=0$$

या $$5x-11y=-1 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) में 11 तथा समीकरण (2) में 2 से गुणा करके जोड़ने पर,

$$43x=86$$

या $$x=\frac{86}{43}=2$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times2+2y=8$$

या $$6+2y=8$$

या $$2y=8-6$$

या $$2y=2$$

या $$y=\frac{2}{2}=1$$

∴ प्रतिच्छेद बिन्दु $(x, y)=(2, 1)$ उत्तर

(ii) दिए गए रेखा-युग्म समीकरण,

$$9x-10y=12 \quad \ldots(1)$$

तथा $$8y-3=0$$

या $$y=\frac{3}{8} \quad \ldots(2)$$

समीकरण (2) से y का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$9x-10\times\frac{3}{8}=12$$

या $$9x-\frac{15}{4}=12$$

या $$9x=12+\frac{15}{4}$$

या $$9x=\frac{48+15}{4}$$

या $$9x=\frac{63}{4}$$

या $$x=\frac{63}{4\times9}=\frac{7}{4}$$

∴ प्रतिच्छेद बिन्दु $(x, y)=\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{8}\right)$ उत्तर

(iii) दिए गए रेखा-युग्म समीकरण,

$$y=\sqrt{3}x+8 \quad \ldots(1)$$

तथा $$x+\sqrt{3}y=12 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) से y का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x+\sqrt{3}(\sqrt{3}x+8)=12$$

या $x+3x+8\sqrt{3}=12$

या $4x=12-8\sqrt{3}$

या $4x=4(3-2\sqrt{3})$

या $x=\dfrac{4(3-2\sqrt{3})}{4}$

$=3-2\sqrt{3}$

x का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$y=\sqrt{3}(3-2\sqrt{3})+8$

या $y=3\sqrt{3}-6+8$

$=3\sqrt{3}+2$

∴ प्रतिच्छेद बिन्दु $(x, y)=(3-2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}+2)$ उत्तर

2. रेखा $4x+5y=20$ के निर्देशांक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$4x+5y=20$

या $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}=1$

जो कि रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ के समान है।

जहाँ $a=5,\ b=4$

अतः रेखा द्वारा X-अक्ष पर प्रतिच्छेद बिन्दु **(5, 0)** तथा Y-अक्ष पर प्रतिच्छेद बिन्दु **(0, 4)** है। उत्तर

3. बिन्दुओं (4, – 5) तथा (–3, 7) से होकर जाने वाली रेखा के लम्बवत् रेखा निकाय की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—माना $P(x_1,\ y_1)=(4,-5)$

तथा $Q(x_2,\ y_2)=(-3,7)$

बिन्दु P व Q से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

सूत्र $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ से,

$y-(-5)=\dfrac{7-(-5)}{-3-4}(x-4)$

या $y+5=\dfrac{7+5}{-7}(x-4)$

या $y+5=\dfrac{-12}{7}(x-4)$

या $$y+5=\frac{-12}{7}x+\frac{48}{7}$$

या $$y=\frac{-12}{7}x+\frac{48}{7}-5$$

या $$y=\frac{-12}{7}x+\frac{13}{7} \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना $y=mx+c$ से करने पर,

रेखा (1) की प्रवणता $m=-\frac{12}{7}$

माना रेखा (1) के लम्बवत् रेखा की प्रवणता m' है। तब

$$mm'=-1$$

या $$\frac{-12}{7}m'=-1$$

या $$m'=\frac{-7}{-12} \quad \Rightarrow \quad m'=\frac{7}{12}$$

अत: दी हुई रेखा के लम्बवत् रेखा की प्रवणता $=\frac{7}{12}$ उत्तर

4. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $3x+4y=5$ तथा $12x+16y=8$ समान्तर हैं।

हल—दी गई रेखाएँ

$$3x+4y=5 \quad \ldots(1)$$

तथा $$12x+16y=8 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) की प्रवणता $(m_1)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

या $$m_1=-\frac{3}{4}$$

इसी प्रकार रेखा (2) की प्रवणता $(m_2)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

या $$m_2=-\frac{12}{16}$$

या $$m_2=-\frac{3}{4}$$

$$m_1=m_2$$

$\therefore$ रेखा (1) व (2) परस्पर समान्तर हैं। इति सिद्धम्

5. रेखाओं $3x+4y=7$ और $x-2y+1=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिस पर मूल बिन्दु स्थित हो।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+4y=7 \quad \ldots(1)$$

तथा $x-2y+1=0$

या $x-2y=-1 \quad \ldots(2)$

समीकरणों (2) में 2 से गुणा करने पर,

$$2x-4y=-2 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (3) को जोड़ने पर,

$$5x=5$$

या $x=\frac{5}{5}=1$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times1+4y=7$$

या $3+4y=7$

या $4y=7-3$

या $4y=4$

या $y=\frac{4}{4}=1$

अतः समीकरण (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु = (1, 1)

हमें उस रेखा का समीकरण ज्ञात करना है जो बिन्दु (1, 1) से होकर जाती है तथा जिस पर मूल बिन्दु बिन्दु स्थित है अर्थात् बिन्दु (1, 1) व मूल बिन्दु (0, 0) से हो जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करना है।

सूत्र $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_1}(x-x_1)$ से

$$y-1=\frac{0-1}{0-1}(x-1)$$

या $y-1=\frac{-1}{-1}(x-1)$

या $y-1=x-1$

या $x-y+1-1=0 \Rightarrow x-y=0$ **उत्तर**

6. ज्ञात कीजिए कि k के किस मान के लिए रेखाएँ $y=x+1$, $y=2x+2$ और $y=kx+3$ संगामी होंगी?

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$y=x+1 \quad \ldots(1)$$

$$y=2x+2 \quad \ldots(2)$$

$$y=kx+3 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने के लिए y के मानों की तुलना करने पर,

$$x+1=2x+2$$

या $$x-2x=2-1$$

या $$-x=1$$

या $$x=-1$$

x का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y=-1+1=0$$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $(-1, 0)$ है।

दी गई तीनों रेखाओं के संगामी होने के लिए रेखा (3) $y=kx+3$ बिन्दु $(-1, 0)$ से होकर जाएगी।

अत: $$0=k(-1)+3$$

या $$0=-k+3$$

या $$k=3$$ उत्तर

7. निम्नलिखित रेखा-युग्मों के बीच के कोण ज्ञात कीजिए—

(i) $3x+2y+7=0$ तथा $2x-3y+5=0$

(ii) $y=\sqrt{3}x$ तथा $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$

(iii) $y=x$ तथा $y=-x$

(iv) $y=4x+5$ तथा $y=-3x+7$

हल— (i) दिया गया रेखा-युग्म,

$$3x+2y+7=0 \quad \ldots(1)$$

$$2x-3y+5=0 \quad \ldots(2)$$

$$\text{रेखा (1) की प्रवणता } (m_1)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

अत: $$m_1=-\frac{3}{2}$$

$$\text{रेखा (2) की प्रवणता } (m_2)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

अत: $$m_2=-\frac{2}{-3}$$

या $$m_2=\frac{2}{3}$$

माना दोनों रेखाओं के बीच का कोण α है।

अत: दोनों रेखाओं के बीच का कोण सूत्र $\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ से,

$$\tan\alpha = \frac{\frac{-3}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{-3}{2}\times\frac{2}{3}}$$

या $$\tan\alpha = \frac{\frac{-3}{2}+\frac{2}{3}}{1-1} = \frac{-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}{0}$$

या $$\tan\alpha = \infty$$

या $$\tan\alpha = \tan 90^\circ$$

या $$\alpha = 90^\circ$$ उत्तर

(ii) दिया हुआ रेखा-युग्म,

$$y = \sqrt{3}x$$

या $$y - \sqrt{3}x = 0 \quad \ldots(1)$$

तथा $$y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$$

या $$\frac{x}{\sqrt{3}} + y = 0 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $m_1 = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$m_1 = \frac{-(-\sqrt{3})}{1} = \sqrt{3}$$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$= -\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

माना दोनों रेखाओं के बीच का कोण α है।

सूत्र $$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$ से,

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

या $$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1}$$

या $$\tan\alpha=\frac{\frac{3+1}{\sqrt{3}}}{0}$$

या $$\tan\alpha=\infty$$

या $$\tan\alpha=\tan 90^\circ$$

या $$\alpha=90^\circ$$ उत्तर

(iii) दिया हुआ रेखा-युग्म,

$$y=x \Rightarrow x-y=0 \quad \ldots(1)$$

तथा $$y=-x \Rightarrow x+y=0 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=\frac{-1}{-1}=1$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=\frac{-1}{1}=-1$

माना दोनों रेखाओं के बीच का कोण α है।

सूत्र $$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$ से

$$\tan\alpha=\frac{1-(-1)}{1+1\times(-1)}$$

या $$\tan\alpha=\frac{1+1}{1-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

या $$\tan\alpha=\tan 90^\circ \Rightarrow \alpha=90^\circ$$ उत्तर

8. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूल बिन्दु से होकर जाती है तथा रेखा $3x+7y+11=0$ के समान्तर है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x+7y+11=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$3x+7y=\lambda \quad \ldots(2)$$

[रेखा $ax+by+c=0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $ax+by=\lambda$ होता है।]

रेखा (2) मूल बिन्दु (0, 0) से होकर जाती है। अत: यह बिन्दु रेखा (2) को सन्तुष्ट करेगा,

अत: $$3\times0+7\times0=\lambda$$

या $0+0=\lambda \Rightarrow \lambda=0$ समीकरण (2) में रखने पर,

रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$3x+7y=0$$ उत्तर

9. बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ पर लम्ब है।

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$$

या $$3x+4y=12 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$4x-3y=\lambda \quad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु (3, 4) से होकर जाती है। अत: यह बिन्दु रेखा (2) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ $$4\times3-3\times4=\lambda$$

या $$12-12=\lambda \Rightarrow \lambda=0$$

अत: रेखा का अभीष्ट समीकरण $4x-3y=0$ **उत्तर**

10. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ तथा $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु स्थित है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \ldots(1)$$

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) में b की गुणा तथा समीकरण (2) में a की गुणा करने पर,

$$\frac{b}{a}x+y=b \quad \ldots(3)$$

तथा $$\frac{a}{b}x+y=a \quad \ldots(4)$$

समीकरण (3) में से समीकरण (4) घटाने पर,

$$\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)x=b-a$$

या $$\left(\frac{b^2-a^2}{ab}\right)x=(b-a)$$

या $$\frac{(b+a)(b-a)}{ab}x=(b-a)$$

या $$x=\frac{(b-a)\times ab}{(b+a)(b-a)}$$

या $$x=\frac{ab}{b+a}$$

x का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{1}{a}\times\frac{ab}{(b+a)}+\frac{y}{b}=1$$

या $$\left(\frac{b}{b+a}\right)+\frac{y}{b}=1$$

या $$\frac{y}{b}=1-\frac{b}{b+a}$$

या $$\frac{y}{b}=\frac{b+a-b}{b+a}$$

या $$\frac{y}{b}=\frac{a}{b+a}$$

या $$y=\frac{ab}{b+a}$$

अतः रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $=\left(\frac{ab}{a+b},\ \frac{ab}{a+b}\right)$

बिन्दु $\left(\frac{ab}{a+b},\ \frac{ab}{a+b}\right)$ व मूल बिन्दु $(0, 0)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण सूत्र

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\text{ से,}$$

अतः $$y-\frac{ab}{a+b}=\frac{\left(0-\frac{ab}{a+b}\right)}{\left(0-\frac{ab}{a+b}\right)}\left(x-\frac{ab}{a+b}\right)$$

या $$y-\frac{ab}{a+b}=x-\frac{ab}{a+b}$$

या $$y=x$$ उत्तर

11. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $3x-y=3$ और $4x+y=11$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है और X-अक्ष से 45° का कोण बनाती है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x-y=3 \quad \ldots(1)$$

$$4x+y=11 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) का जोड़ने पर,

$$7x=14$$

या $$x=2$$

x का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$4\times2+y=11$$

या $\quad 8+y=11 \quad$ या $\quad y=11-8$

या $\quad y=3$

अतः दी गई रेखाओं (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $=(2,3)$

प्रश्नानुसार, रेखा का X-अक्ष कोण $=45°=\theta$

अतः रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

या $\quad m=\tan 45°$

या $\quad m=1$

बिन्दु (2, 3) से होकर जाने वाली तथा प्रवणता $(m=1)$ वाली रेखा का समीकरण, सूत्र $y-y_1=m(x-x_1)$ से,

$$y-3=1\times(x-2)$$

या $\quad y-3=x-2$

या $\quad y=x-2+3$

या $\quad y=x+1$

या $\quad x-y+1=0$ उत्तर

12. रेखा $ax-3y=13$ में a का मान ज्ञात कीजिए जबकि यह रेखा $2x+6y=9$ के समान्तर है।

हल—दी गई रेखाएँ,

$$ax-3y=13 \quad \ldots(1)$$

$$2x+6y=9 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=-\dfrac{x\text{ का गुणांक}}{y\text{ का गुणांक}}=\dfrac{-a}{-3}=\dfrac{a}{3}$

रेखा (2)की प्रवणता $(m_2)=-\dfrac{x\text{ का गुणांक}}{y\text{ का गुणांक}}$

$$=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (2) परस्पर समान्तर है।

अतः $\quad m_1=m_2$

या $\quad \dfrac{a}{3}=-\dfrac{1}{3}$

या $\quad a=-1$ उत्तर

13. यदि समीकरण $ax=by+c=0$ तथा $px+qy+r=0$ दो समान्तर रेखाओं को निरूपित करें तो सिद्ध कीजिए — $aq=bp$

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$ax+by+c=0 \quad \ldots(1)$$

$$px+qy+r=0 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

या $$m_1=-\frac{a}{b}$$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

या $$m_2=-\frac{p}{q}$$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (2) दो समान्तर रेखाओं को निरूपित करती हैं।

$\therefore$ $$m_1=m_2$$

या $$-\frac{a}{b}=-\frac{p}{q}$$

या $$\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$$

या $$aq=bp$$ इति सिद्धम्

14. यदि रेखाएँ $y=mx+c$ तथा $4x-y+3=0$ परस्पर लम्ब हैं तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$y=mx+c \quad \ldots(1)$$

तथा $$4x-y+3=0 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=m$

तथा रेखा (2) की प्रवणता $(m_2)=\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$=\frac{4}{-1}=4$$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (2) परस्पर लम्ब हैं।

अतः $$m_1m_2=-1$$

या $$m\times 4=-1$$

या $$m=\frac{-1}{4}$$ उत्तर

15. मूल बिन्दु से होकर जाने वाली तथा रेखा $2x-3y+8=0$ पर लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$2x-3y+8=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$3x+2y=\lambda$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) मूलबिन्दु (0,0) से होकर जाती है।

अत: $3\times 0+2\times 0=\lambda$

या $0-10=\lambda \Rightarrow \lambda=0$ यह मान रेखा (2) में रखने पर,

रेखा का अभीष्ट समीकरण $3x+2y=0$ **उत्तर**

16. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $3x+5y+2=0$ और $2x-7y-9=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है और रेखा $9x-4y+15=0$ पर लम्ब है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+5y+2=0 \quad \ldots(1)$$

$$2x-7y-9=0 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) में 7 तथा समीकरण (2) में 5 की गुणा करने पर,

$$21x+35y+14=0 \quad \ldots(3)$$

$$10x-35y-45=0 \quad \ldots(4)$$

समीकरण (3) व (4) जोड़ने पर,

$$31x-31=0$$

या $31x=31$

या $x=1$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times 1+5y+2=0$$

या $3+5y+2=0$

या $5+5y=0$

या $5y=-5$

या $y=-1$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $=(1,-1)$

दी गई तीसरी रेखा $9x-4y+15=0$ के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$4x+9y=\lambda \quad \ldots(5)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (5) प्रतिच्छेद बिन्दु $(1,-1)$ से होकर जाती है।

अत: $4\times 1+9\times(-1)=\lambda$

या $4-9=\lambda \Rightarrow -5=\lambda$

या $\lambda = -5$

λ का मान समीकरण 3 में रखने पर, अभीष्ट रेखा का समीकरण,

$$4x+9y=-5$$

या $4x+9y+5=0$ उत्तर

17. यदि समीकरण $lx+my+n=0$ तथा $px+qy+r=0$ दो समान्तर रेखाओं के युग्म को निरूपित करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि — $lq-mp=0$

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$lx+my+n=0 \quad \ldots(1)$$

$$px+qy+r=0$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{l}{m}$

तथा रेखा (2) की प्रवणता $(m_2)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{p}{q}$

रेखा (1) व (2) समान्तर रेखाओं के युग्म को निरूपित करती हैं।

$\therefore \quad m_1=m_2$

या $\dfrac{-l}{m}=\dfrac{-p}{q}$

या $\dfrac{l}{m}=\dfrac{p}{q}$

या $lq=pm \Rightarrow lq=mp$

या $lq-mp=0$ इति सिद्धम्

18. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (x_1,y_1) तथा (x_2,y_2) से होकर जाने वाली रेखा की मूल-बिन्दु से दूरी $\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$ है।

हल—दिए हुए बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

या $(x_2-x_1)y-(x_2-x_1)y_1=(y_2-y_1)x-(y_2-y_1)x_1$

या $(y_2-y_1)x-(y_2-y_1)x_1=(x_2-x_1)y-(x_2-x_1)y_1$

या $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1=0$

या $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+x_2y_1-x_1y_1-x_1y_2+x_1y_1=0$

या $(y_1-y_1)x-(x_2-x_1)y+x_2y_1-x_1y_2=0 \quad \ldots(1)$

अतः रेखा (1) की मूल बिन्दु से दूरी $=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$

$$= \frac{x_2y_1 + x_1y_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$ इति सिद्धम्

19. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ के समान्तर हो और बिन्दु (3,4) जिस पर स्थित हो।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3} + \frac{4}{y} = 0$$

या $4x + 3y = 12$ ...(1)

रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण

$$4x + 3y = \lambda$$ ...(2)

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु (3,4) से होकर जाती है।

अत: $4 \times 3 + 3 \times 4 = \lambda$

या $12 + 12 = \lambda \Rightarrow \lambda = 24$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$4x + 3y = 24$$ उत्तर

20. मूल बिन्दु से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं (3,0) व (0,9) से जाने वाली रेखा के समान्तर है।

हल—माना दिए गए बिन्दु, $A(x_1, y_1) = (3,0)$

तथा $B(x_2, y_2) = (0,9)$

अत: बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

सूत्र $y - y_1 = \frac{x_2 - y_1}{x_2 - l_1}(x - x_1)$ से,

या $y - 0 = \frac{9 - 0}{0 - 3}(x - 3)$

या $y = \frac{-9}{3}(x - 3)$

या $y = -3(x - 3)$

या $y = -3x + 9$

$3x + y - 9 = 0$ ...(1)

रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण,

$3x + y = \lambda$ ...(2)

प्रश्नानुसार, रेखा (2) मूल बिन्दु से होकर जाती है।

अत: $3 \times 0 + 0 = \lambda$

या $0 + 0 = \lambda \Rightarrow \lambda = 0$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$3x+y=0$$

या $$y=-3x$$ उत्तर

21. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (–4,5) से जाती हो तथा रेखा $3x-2y+15=0$ पर लम्ब हो।

हल—दी गई रेखा का समीकरण

$$3x-2y+15=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण

$$2x+3y=\lambda \quad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु (– 4,5) से जाती है।

अतः $$2\times(-4)+3\times5=\lambda$$

या $$-8+15=\lambda$$

या $$7=\lambda \Rightarrow \lambda=7$$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$2x+3y=7$$ उत्तर

22. रेखा $3x+5y=9$ के समान्तर उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $2x+3y=8$ तथा $3x-y=1$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाती हो।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$2x+3y=8 \quad \ldots(1)$$

$$3x-y=1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (2) में 3 से गुणा करने पर,

$$9x-3y=3 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (3) को जोड़ने पर,

$$11x=11$$

$$x=\frac{11}{11}=1$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$2\times1+3y=8$$

या $$2+3y=8$$

या $$3y=8-2$$

या $$3y=6$$

या $$y=\frac{6}{3}=2$$

अतः रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु = (1,2)

दी गई तीसरी रेखा $3x+5y=9$ के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$3x+5y=\lambda \quad \ldots(4)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (4), रेखा (1) व (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु (1,2) से होकर जाती है।

अतः $3\times 1+5\times 2=\lambda$

या $3+10=\lambda$

या $13=\lambda \Rightarrow \lambda=13$

λ का मान समीकरण (4) में रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$3x+5y=13$$ उत्तर

23. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूलबिन्दु से होकर जाती है और रेखा $5x+7y+12=0$ के समान्तर है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$5x+7y+12=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$5x+7y=\lambda \quad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) मूल बिन्दु (0,0) से होकर जाती है।

अतः $5\times 0+7\times 0=\lambda$

$0+0=\lambda \Rightarrow \lambda=0$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$5x+7y=0$$ उत्तर

24. बिन्दु (4,3) से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ के समान्तर है।

हल—प्रश्न संख्या 19 का हल देखिए।

25. रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (1,–2) से होकर जाती है तथा रेखा $4x-3y=1$ पर लम्ब है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$4x-3y=1$$

$$4x-3y-1=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$3x+4y=\lambda \quad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु (1,–2) से होकर जाती है।

अतः $3\times 1+4\times(-2)=\lambda$

या $3-8=\lambda$

या $-5=\lambda \Rightarrow \lambda=-5$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x+4y=-5$$

या $\quad 3x+4y+5=0$ उत्तर

26. बिन्दु (1,2) और (5,–6) को मिलाने वाली रेखा के लम्ब अर्द्धक का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—माना दिए गए बिन्दु, $A(x_1, y_1)=(1,2)$

तथा $\quad B(x_2, y_2)=(5,-6)$

अतः बिन्दु A व B को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

सूत्र $\quad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_1}(x-x_1)$ से,

$$y-2=\frac{-6-2}{5-1}(x-1)$$

या $\quad y-2=\frac{-8}{4}(x-1)$

या $\quad y-2=-2(x-1)$

या $\quad y-2=-2x+2$

या $\quad 2x+y-2-2=0$

या $\quad 2x+y-4=0$ ...(1)

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$x-2y=\lambda \quad ...(2)$$

रेखा AB का मध्य बिन्दु $=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ से,

$$=\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2-6}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{6}{2}, \frac{-4}{2}\right)$$

$$=(3,-2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2), बिन्दु (3,–2) से जाती है।

अतः $\quad 3-2(-2)=\lambda$

या $\quad 3+4=\lambda \Rightarrow \lambda=7$

समीकरण (2) में λ का मान रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$x-2y=7$$ उत्तर

27. रेखाओं $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ के बीच का कोण α है। $\tan\alpha$ व $\cot\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए। यदि रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं तो सिद्ध कीजिए $a_1a_2+b_1b_2=0$

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \ldots(1)$$

तथा $$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{a_1}{b_1}$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{a_2}{b_2}$

रेखा (1) व (2) के बीच का कोण $=\alpha$

$\therefore$ $$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

या $$\tan\alpha=\frac{-\dfrac{a_1}{b_1}-\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right)}{1+\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right)}$$

$$\tan\alpha=\frac{\dfrac{a_2}{b_2}-\dfrac{a_1}{b_1}}{1+\dfrac{a_1a_2}{b_1b_2}}$$

$$\tan\alpha=\frac{\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1b_2}}{\dfrac{b_1b_2+a_1a_2}{b_1b_2}}$$

या $$\tan\alpha=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$$ उत्तर

हम जानते हैं कि—

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

अतः $$\cot\alpha=\frac{1}{\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}}$$

या $$\cot\alpha=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2b_1-a_1b_2}$$ उत्तर

यदि रेखा (1) व (2) परस्पर लम्ब हों, तो

$$m_1m_2=-1$$

या $$-\frac{a_1}{b_1}\times\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=-1$$

या $$\frac{a_1a_2}{b_1b_2}=-1$$

या $$a_1a_2=-b_1b_2$$

या $$a_1a_2+b_1b_2=0$$ इति सिद्धम्

28. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (1,–1) से होकर जाती है तथा रेखा $3x+4y+5=0$ पर लम्ब है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x+4y+5=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$4x-3y=\lambda \quad \ldots(2)$$

रेखा (2) बिन्दु (1,–1) से होकर जाती है। अत: यह बिन्दु रेखा (2) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ $$4\times1-3\times(-1)=\lambda$$

या $$4+3=\lambda \Rightarrow \lambda=7$$

λ का यह मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$4x-3y=7$$ उत्तर

29. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a\cos^3\alpha, a\sin^3\alpha)$ से होकर जाने वाली और रेखा $x\tan\alpha+y=a\sin\alpha$ पर लम्ब रेखा का समीकरण $x\cos\alpha-y\sin\alpha=a\cos 2\alpha$ है

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$x\tan\alpha+y=a\sin\alpha$$

या $$x\tan\alpha+y-a\sin\alpha=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$x-y\tan\alpha=\lambda \quad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु $(a\cos^3\alpha, \sin^3\alpha)$ से होकर जाती है। अत: यह बिन्दु रेखा (2) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ $$a\cos^3\alpha-a\sin^3\alpha\tan\alpha=\lambda$$

या $$a\cos^3\alpha-\frac{a\sin^3\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha}=\lambda$$

या $$\frac{a\cos^4\alpha-a\sin^4\alpha}{\cos\alpha}=\lambda$$

या $$\lambda=\frac{a\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos\alpha}$$

या $$\lambda=\frac{a(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)}{\cos\alpha}$$

या $$\lambda = \frac{a\{(\cos^2\alpha)^2 - (\sin^2\alpha)^2\}}{\cos\alpha}$$

या $$\lambda = \frac{a(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\cos\alpha}$$

या $$\lambda = \frac{a \times 1 \times \cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

या $$\lambda = \frac{a\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

λ का यह मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x - y\tan\alpha = \frac{a\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

या $$x\cos\alpha - y\tan\alpha.\cos\alpha = a\cos 2\alpha$$

या $$x\cos\alpha - y\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\cos\alpha = a\cos 2\alpha$$

या $$x\cos\alpha - y\sin\alpha = a\cos 2\alpha$$ इति सिद्धम्

30. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a\cos^3\beta, a\sin^3\beta)$ से होकर जाने वाली तथा रेखा $x\sec\beta + y\,\text{cosec}\,\beta = a$ पर लम्ब रेखा का समीकरण $x\cos\beta - y\sin\beta = a\cos 2\beta$ है

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$x\sec\beta + y\,\text{cosec}\,\beta = a \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण

$$x\,\text{cosec}\,\beta - y\sec\beta = \lambda \quad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु $(a\cos^3\beta, a\sin^3\beta)$ से होकर जाती है। अत: यह बिन्दु रेखा (2) को सन्तुष्ट करेगा।

रेखा (2) में $x = a\cos^3\beta$ तथा $y = a\sin^3\beta$ रखने पर।

$$a\cos^3\beta\,\text{cosec}\,\beta - a\sin^3\beta\sec\beta = \lambda$$

या $$\frac{a\cos^3\beta}{\sin\beta} - \frac{a\sin^3\beta}{\cos\beta} = \lambda$$

या $$\frac{a\cos^4\beta - a\sin^4\beta}{\sin\beta\cos\beta} = \lambda$$

या $$\frac{a(\cos^4\beta - \sin^4\beta)}{\sin\beta\cos\beta} = \lambda$$

या $$\frac{a\{(\cos^2\beta)^2 - (\sin^2\beta)^2\}}{\sin\beta\cos\beta} = \lambda$$

या $$\frac{a(\cos^2\beta + \sin^2\beta)(\cos^2\beta - \sin^2\beta)}{\sin\beta\cos\beta} = \lambda$$

या $$\frac{a\cos 2\beta}{\sin\beta\cos\beta}=\lambda$$

या $$\lambda=\frac{a\cos 2\beta}{\sin\beta\cos\beta}$$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x\cos ec\,\beta - y\sec\beta = \frac{a\cos 2\beta}{\sin\beta\cos\beta}$$

या $$x\cos ec\,\beta\sin\beta\cos\beta - y\sec\beta\sin\beta\cos\beta = a\cos 2\beta$$

या $$\frac{a\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} - y\frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta} = a\cos 2\beta$$

या $$x\cos\beta - y\sin\beta = a\cos 2\beta$$ इति सिद्धम्

31. रेखाओं $3x+4y=7$ तथा $x-2y+1=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाली उस रेखा का समीकरण जिस पर मूल बिन्दु उपस्थित हैं।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+4y=7 \quad \ldots(1)$$

तथा $$x-2y+1=0$$

या $$x-2y=-1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (2) में 2 की गुणा करने पर,

$$2x-4y=-2 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (3) को जोड़ने पर,

$$5x=5$$

या $$x=\frac{5}{5}=1$$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times 1+4y=7$$

या $$3+4y=7$$

या $$4y=7-3$$

या $$4y=4$$

या $$y=\frac{4}{4}$$

या $$y=1$$

अतः रेखाओं (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु = (1,1)

मूल बिन्दु (0,0) तथा रेखा (1) व (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु (1,1) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

सूत्र $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ से,

$$y-0=\frac{1-0}{1-0}(x-0)$$

या $$y-0=\frac{1}{1}(x-0)$$

या $$y=x$$

$$x-y=0$$ उत्तर

32. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $3x+y=2$ एवं $6x-y=9$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है तथा धन X- अक्ष से का 45° कोण बनाती है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+y=2 \quad \ldots(1)$$

$$6x-y=9 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$9x=11$$

या $$x=\frac{11}{9}$$

x का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{3\times 11}{9}+y=2$$

या $$\frac{11}{3}+y=2$$

या $$y=2-\frac{11}{3}$$

$$=\frac{6-11}{3}=\frac{-5}{3}$$

अतः दी गई रेखाओं (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{11}{9},\frac{-5}{3}\right)$ है।

प्रश्नानुसार,

रेखा का X-अक्ष के साथ बना कोण $(\theta)=45°$,

∴ रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

$$=\tan 45°$$

$$=1$$

प्रवणता $(m=1)$ तथा बिन्दु $\left(\frac{11}{9},\frac{-5}{3}\right)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण सूत्र $y-y_1=m(x-x_1)$ से,

$$y-\left(-\frac{5}{3}\right)=1\times\left(x-\frac{11}{9}\right)$$

या $$y+\frac{5}{3}=x-\frac{11}{9}$$

या $$y+\frac{11}{9}+\frac{5}{3}=x$$

या $$y+\frac{11+15}{9}=x$$

या $$y+\frac{26}{9}=x$$

या $$9y+26=9x$$

या $$9x-9y-26=0\Rightarrow 9x-9y=26$$ उत्तर

33. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $3x+y=2$ तथा $6x-y=10$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है तथा धन X-अक्ष से 60° का कोण बनाती है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+y=2 \quad \ldots(1)$$

$$6x-y=10 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$9x=12$$

या $x=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ को समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times\frac{4}{3}+y=2$$

या $$4+y=2$$

या $$y=2-4$$

या $$y=-2$$

अतः दी गई रेखाओं (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{4}{3},-2\right)$ है।

रेखा का धन X-अक्ष के साथ बना कोण, $(\theta)=60^\circ$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

$$=\tan 60^\circ$$

$$=\sqrt{3}$$

अब, प्रवणता $(m=\sqrt{3})$ तथा बिन्दु $\left(\frac{4}{3},-2\right)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण सूत्र $y-y_1=m(x-x_1)$ से,

$$y-(-2)=\sqrt{3}\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

या $$y+2=\sqrt{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

या $$y+2=\sqrt{3}x-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

या $$2+\frac{4}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}x-y$$

या $$2\sqrt{3}+4=3x-\sqrt{3}y$$

या $$3x-\sqrt{3}y=4+2\sqrt{3}$$ उत्तर

34. रेखा $3x+5y=15$ के निर्देशांक्षों (coordonate axes) के साथ प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x+5y=15 \quad \ldots(1)$$

माना रेखा (1) X–अक्ष को बिन्दु $(a,0)$ तथा Y–अक्ष $(0,b)$ पर प्रतिच्छेद करती है। अत: ये दोनों बिन्दु रेखा (1) को सन्तुष्ट करेंगे।

अत: समीकरण (1) में $x=a$ तथा $y=0$ रखने पर,

$$3a+5\times 0=15$$

$$23a+0=15$$

$$3a=15\Rightarrow a=5$$

अत: X–अक्ष पर स्थित अभीष्ट बिन्दु = **(5,0)** उत्तर

तथा समीकरण (1) में $x=0$ तथा $y=b$ रखने पर,

$$3\times 0+5b=15$$

या $$0+5b=15$$

या $$5b=15\Rightarrow b=\frac{15}{5}=3$$

$\therefore Y$–अत: अक्ष पर स्थित अभीष्ट बिन्दु = **(0,3)** उत्तर

अभ्यास 14.6

1. निम्नलिखित रेखाओं पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए—

(i) $6x+8y+25=0$ (ii) $5x+12y-1=0$ (iii) $14x-3y+15=0$

(iv) $6x-8y+25=0$ (v) $2x+3y+5=0$ (vi) $5x+12y-13=0$

हल—(i) दी गई रेखा का समीकरण,

$$6x+8y+25=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना $ax+by+c=0$ रेखा से करने पर,

$a = 6, b = 8$ तथा $c = 25$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से,}$$

अतः
$$p = \frac{25}{\sqrt{6^2 + 8^2}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{36+64}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{100}} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ इकाई}$$ उत्तर

(ii) दी गई रेखा का समीकरण,

$$5x + 12y - 1 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$a = 5, b = 12$ तथा $c = -1$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से,}$$

$$p = \frac{-1}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{25+144}} = \frac{-1}{\sqrt{169}} = -\frac{1}{13}$$

या
$$p = \frac{1}{13} \text{ इकाई } (\because \text{ ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर})$$ उत्तर

(iii) दी गई रेखा का समीकरण,

$$4x - 3y + 15 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 4, b = -3$ तथा $c = 15$

मूल बिन्दु (0,0) से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से,}$$

अतः
$$p = \frac{15}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{16+9}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{15}{5} = 3 \text{ इकाई}$$ उत्तर

(iv) दी गई रेखा का समीकरण,

$$6x + 8y + 25 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 6, b = -8 \text{ तथा } c = 25$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से,}$$

अत:
$$p = \frac{25}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{25}{\sqrt{36+64}} = \frac{25}{\sqrt{100}}$$

$$= \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \text{ इकाई}$$ उत्तर

(v) दी गई रेखा का समीकरण,

$$2x + 3y + 5 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 3 \text{ तथा } c = 5$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से,}$$

$$p = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{4+9}} = \frac{15}{\sqrt{13}} \text{ इकाई}$$ उत्तर

(vi) दी गई रेखा का समीकरण,

$$5x + 12y - 13 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 5, b = 12 \text{ तथा } c = -13$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से}$$

अत:
$$p = \frac{-13}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{-13}{\sqrt{25+144}} = \frac{-13}{\sqrt{169}}$$

$$= \frac{-13}{13} = -1 = 1 \text{ इकाई}$$

(ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर) उत्तर

2. मूल बिन्दु से रेखा $3x+4y-17=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई या लाम्बिक दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x+4y+17=0 \qquad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=3, b=4 \text{ तथा } c=17$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ से,}$$

$$=\frac{17}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{17}{\sqrt{9+16}}=\frac{17}{\sqrt{25}}=\frac{17}{5} \text{ इकाई} \qquad \text{उत्तर}$$

3. मूल बिन्दु से रेखा $3x+4y-10=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई की गणना कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x+4y-10=0$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=3, b=4 \text{ तथा } c=-10$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ से,}$$

अत:

$$p=\frac{-10}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{\sqrt{9+16}}=\frac{-10}{\sqrt{25}}=\frac{-10}{5}$$

$=-2=2$ इकाई (ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर) उत्तर

4. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा की मूल बिन्दु से दूरी $\frac{x_1y_1-x_2y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$ है।

हल—हम जानते हैं कि बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण निम्न सूत्र से दिया जाता है—

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

या $\quad (x_2-x_1)y-(x_2-x_1)y_1=(y_2-y_1)x-(y_2-y_1)x_1$

या $\quad (y_2-y_1)x-(y_2-y_1)x_1=(x_2-x_1)y-(x_2-x_1)y_1$

या $\quad (y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1=0 \qquad \ldots(1)$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax+by+c=0$ से करने पर,

$a=(y_2-y_1), b=(x_2-x_1)$ तथा $c=(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1$

रेखा (1) की मूल बिन्दु से दूरी सूत्र $p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ से,

अतः $$p=\frac{(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$$

$$=\frac{x_2y_1-x_1y_1-x_1y_2+x_1y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$ इति सिद्धम्

5. बिन्दु (1,2) से रेखा $3x+4y+4=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—हम जानते हैं कि बिन्दु (x_1, y_1) से रेखा $ax+by+c=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई,

$$p=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

अतः दिए गए बिन्दु (1,2) से रेखा $3x+4y+4=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई,

$$p=\frac{3\times1+4\times2+4}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$=\frac{3+8+4}{\sqrt{9+16}}$$

$$=\frac{15}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3$$ इकाई उत्तर

6. बिन्दु (3,4) व बिन्दु (2,3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। इस रेखा पर बिन्दु (3,2) से डाले गए लम्ब की माप ज्ञात कीजिए।

हल—माना $A(x_1, y_1)=(3,4)$

तथा $B(x_2, y_2)=(2,3)$

बिन्दु A तथा B को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

या $$y-4=\frac{3-4}{2-3}(x-3)$$

या $$y-4=\frac{-1}{-1}(x-3)$$

या $$y-4=x-3$$

या $$x-y+4-3=0$$

या $$x-y+1=0 \quad \ldots(1)$$ उत्तर

रेखा (1) पर बिन्दु (3,2) से डाले गए लम्ब की माप

$$p = \frac{3-2+1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{4-2}{\sqrt{1+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ इकाई}$$ उत्तर

7. बिन्दु (1,2) से रेखा $3x-4y-15=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—हम जानते हैं कि—बिन्दु (x_1, y_1) से रेखा $ax+by+c=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई,

$$p = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

अत: बिन्दु (1,2) से रेखा $3x-4y-15=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई,

$$p = \frac{3\times 1-4\times 2-15}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

या $$p = \frac{3-8-15}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{3-23}{\sqrt{25}} = -\frac{20}{5}$$

$$= -4$$

= 4 इकाई (ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर) उत्तर

8. बिन्दु (−4,5) से रेखा $5x+12y-1=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$5x+12y-1=0 \quad \ldots(1)$$

माना दिया गया बिन्दु $p(x_1, y_1)=(-4,5)$

अत: बिन्दु p से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$p = \frac{5\times(-4)+12\times 5-1}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

$$p = \frac{-20+60-1}{\sqrt{25+144}}$$

$$= \frac{60-21}{\sqrt{169}} = \frac{39}{13}$$

= 13 इकाई उत्तर

9. बिन्दु (0,1) से रेखा $5x+12y=-1$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$5x+12y=-1$$

या $$5x+12y+1=0 \quad \ldots(1)$$

तथा दिया गया बिन्दु $p(x_1, y_1) = (0,1)$

अत: बिन्दु p से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$p = \frac{5\times 0+12\times 1+1}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

$$= \frac{0+12+1}{\sqrt{25+144}}$$

$$= \frac{13}{\sqrt{169}}$$

$$= \frac{13}{13} = 1 \text{ इकाई}$$ उत्तर

10. रेखा $x\cos 35^\circ - y\sin 35^\circ = p$ पर बिन्दु $(2a\sin 65^\circ, 2a\cos 65^\circ)$ से डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$x\cos 35^\circ - y\sin 35^\circ = p$$

या $$x\cos 35^\circ - y\sin 35^\circ - p = 0 \quad \ldots(1)$$

दिया गया बिन्दु $A(x_1, y_1) = (2a\sin 65^\circ, 2a\cos 65^\circ)$

अत: बिन्दु A से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{2a\sin 65^\circ\cos 35^\circ - 2a\cos 65^\circ\sin 35^\circ - p}{\sqrt{\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ}}$$

$$= \frac{2a(\sin 65^\circ\cos 35^\circ - \cos 65^\circ\sin 35^\circ) - p}{\sqrt{1}}$$

$$= \frac{2a\sin(65^\circ - 35^\circ) - p}{1}$$

$$= 2a\sin 30^\circ - p$$

$$= 2a\times\frac{1}{2} - p = a - p \text{ इकाई}$$ उत्तर

11. रेखा $\frac{x\cos\alpha}{a} + \frac{y\sin\alpha}{b} = 1$ पर बिन्दु $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ से डाले गए लम्ब की लम्बाई p_1 तथा बिन्दु $(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ से डाले गए लम्ब की माप p_2 है , तो सिद्ध कीजिए– $p_1p_1 = b^2$

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x\cos\alpha}{a} + \frac{y\sin\alpha}{b} = 1$$

या $$x\frac{\cos\alpha}{a} + y\frac{\sin\alpha}{b} - 1 = 0$$

या $$(b\cos\alpha)x + (a\sin\alpha)y - ab = 0 \quad \ldots(1)$$

माना दिए गए बिन्दु $A(x_1, y_1) = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ तथा $B(x_2, y_2) = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$

अत: रेखा (1) पर बिन्दु A से डाले गए लम्ब की माप

$$p_1 = \frac{(b\cos\alpha)\sqrt{a^2 - b^2} + (a\sin\alpha)\times 0 - ab}{\sqrt{(b\cos\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2}}$$

या $$p_1 = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha + 0 - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

या $$p_1 = \frac{-ab + b\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

या $$p_1 = \frac{-b(a - \sqrt{a^2 - b^2}\cos\alpha)}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

या $$p_1 = \frac{b(a - \sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha)}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

(ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर)

तथा बिन्दु B से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप

$$p_2 = \frac{b\cos\alpha(-\sqrt{a^2 - b^2}) + a\sin\alpha\times 0 - ab}{\sqrt{(b\cos\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2}}$$

$$= \frac{-b\sqrt{(a^2 - b^2)}\cdot\cos\alpha + 0 - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{-b(\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha + a)}{\sqrt{b^2\cos\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

$$\frac{b(\sqrt{a^2 - b^2}.\cos\alpha + a)}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

(ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर)

$\therefore$ $$p_1 p_2 = \frac{b(a - \sqrt{a^2 - b^2}.\cos\alpha)}{\sqrt{b^2\cos\alpha + a^2\sin\alpha}} \times \frac{b(\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha + a)}{\sqrt{b^2\cos^2\theta\cdot + a^2\sin^2\theta}}$$

या $$p_1 p_2 = \frac{b^2\{a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha)^2\}}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{b^2\{a^2-(a^2-b^2)\cdot\cos^2\alpha\}}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}$$

या
$$= \frac{b^2(a^2-a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}$$

या
$$= \frac{b^2\{a^2(1-\cos^2\alpha)+b^2\cos^2\alpha\}}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}$$

या
$$= \frac{b^2\{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha\}}{(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)}$$

या $p_1p_2 = b^2$ इति सिद्धम्

12. अक्षों पर अन्तःखण्ड a और b काटने वाली रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप p है। सिद्ध कीजिए— $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

हल—अक्षों पर अन्तःखण्ड a और b काटने वाली रेखा का समीकरण निम्न है—

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

या $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$

या $bx+ay-ab=0$

रेखा (1) पर मूल बिन्दु (0,0) से डाले गए लम्ब की माप

$$p = \frac{b\times0+a\times0-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

या $p^2 = \left(\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$

या $p^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

या $\frac{1}{p_2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

या $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$

या $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ इति सिद्धम्

13. दो समान्तर रेखाओं $x+y+1=0$ तथा $x+y+5=0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाएँ,

$$x+y+1=0 \quad \ldots(1)$$

तथा $$x+y+5=0 \quad \ldots(2)$$

मूल बिन्दु (0,0) से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप $(p_1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}$

या $$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

इसी प्रकार, मूल बिन्दु (0,0) से रेखा (2) पर डाले गए लम्ब की माप $p_2=\frac{5}{\sqrt{1^2+1^2}}$

या $$p_2=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ रेखाओं (1) व (2) के बीच की दूरी $= p_2 - p_1$

या $$=\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{5-1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \text{ इकाई}$$ **उत्तर**

14. समान्तर रेखाओं $3x+4y+15=0$ तथा $3x+4y+10=0$ के बीच की लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+4y+15=0 \quad \ldots(1)$$

तथा $$3x+4y+15=0 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप,

$$p_1=\frac{15}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

या $$=\frac{15}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3 \text{ इकाई}$$

रेखा (2) पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप,

$$p_2=\frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2 \text{ इकाई}$$

अतः दी गई रेखाओं (1) व (2) के बीच की लम्बवत् दूरी $= p_1 - p_2$

$$=3-2$$

$$=1 \text{ इकाई}$$ **उत्तर**

15. समान्तर रेखाओं $5x+12y+15=0$ तथा $10x+24y-13=0$ के बीच की लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$5x+12x+15=0 \quad \ldots(1)$$

$$10x+24y-13=0 \quad \ldots(2)$$

अत: मूल बिन्दु (0,0) से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप,

$$p_1=\frac{17}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{17}{\sqrt{25+144}}$$

$$=\frac{17}{\sqrt{169}}$$

$$=\frac{17}{13} \text{ इकाई}$$

तथा मूल बिन्दु (0,0) से रेखा (2) पर डाले गए लम्ब की माप,

$$p_2=\frac{-13}{\sqrt{10^2+24^2}}$$

$$=\frac{-13}{\sqrt{100+576}}$$

$$=\frac{-13}{\sqrt{676}}$$

$$=\frac{-13}{26}=-\frac{1}{2} \text{ इकाई}$$

अत: रेखा (1) व (2) के बीच की दूरी $= p_1 - p_2$

$$=\frac{17}{13}-\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{17}{13}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{34+13}{26}$$

$$=\frac{47}{26} \text{ इकाई}$$ उत्तर

16. सिद्ध कीजिए कि समान्तर रेखाओं $ax+by+c=0$ व $k(ax+by)+d=0$ के बीच की दूरी $\frac{c-\frac{d}{k}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ है।

अथवा

दो समान्तर रेखाओं के समीकरण $ax+by+c=0$ तथा $k(ax+by)+d=0$ हैं। यदि रेखाओं के बीच की दूरी p है, तो सिद्ध कीजिए— $p^2=\frac{c^2k^2+d^2-2ckd}{k^2(a^2b^2)}$

हल—दी गई समान्तर रेखाओं के समीकरण,

$$ax+by+c=0 \qquad \ldots(1)$$

तथा $k(ax+by)+d=0$

या $$kax+kby+d=0 \qquad \ldots(2)$$

रेखा (1) पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई,

$$p_1=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

तथा रेखा (2) पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई,

$$p_2=\frac{d}{\sqrt{(ka)^2+(kb)^2}}$$

$$=\frac{d}{\sqrt{k^2a^2+k^2b^2}}$$

$$=\frac{d}{k\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

अत: समान्तर रेखाओं (1) व (2) के बीच की दूरी

$$p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{d}{k\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$p=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(c-\frac{d}{k}\right)=\frac{\left(c-\frac{d}{k}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ इति सिद्धम्

अथवा

हम सिद्ध कर चुके हैं

$$P=\frac{c-\frac{d}{k}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$p^2=\left(\frac{c-\frac{d}{k}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$$

या $$p^2 = \frac{\left(c - \frac{d}{k}\right)^2}{(a^2 + b^2)}$$

$$p^2 = \frac{\left(\frac{ck - d}{k}\right)^2}{a^2 + b^2}$$

$$p^2 = \frac{\frac{c^2k^2 + d^2 - 2ckd}{k^2}}{a^2 + b^2}$$

$$p^2 = \frac{c^2k^2 + d^2 - 2ckd}{k^2(a^2 + b^2)}$$ इति सिद्धम्

17. रेखा $ax + by + a + b = 0$ पर बिन्दु (1,1) से डाले गए लम्ब की माप p है। सिद्ध कीजिए कि — $p^2 = 4 + \frac{8ab}{a^2 + b^2}$

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$ax + by + a + b = 0$$

अतः रेखा (1) पर बिन्दु (1,1) से डाले गए लम्ब की माप

$$p = \frac{a \times 1 + b \times 1 + a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

या $$p = \frac{a + b + a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

या $$p = \frac{2a + 2b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

या $$p = \frac{2(a + b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$p^2 = \left[\frac{2(a + b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]^2$$

या $$p^2 = \frac{4(a + b)^2}{(a^2 + b^2)}$$

या $$p^2 = \frac{4(a^2 + b^2 + 2ab)}{(a^2 b^2)}$$

या $$p^2 = \frac{4(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)} + \frac{8ab}{(a^2 + b^2)}$$

या $$p^2 = 4 + \frac{8ab}{a^2 + b^2}$$ इति सिद्धम्

18. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा की मूल बिन्दु से दूरी $\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)^2}}$ है।

हल—इस प्रश्न के हल के लिए प्रश्न संख्या 4 के हल को देखिए।

19. यदि रेखाओं $2x - y = 1$ व $ax + 2y = 4$ के बीच का कोण 45° है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$2x - y = 1 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0 \quad ...(1)$$

$$ax + 2y = 4 \Rightarrow ax + 2y - 4 = 0 \quad ...(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

या $$m_1 = -\frac{2}{-1} = 2$$

तथा रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

या $$m_2 = -\frac{a}{2}$$

रेखा (1) व (2) के बीच का कोण सूत्र, $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ से,

अतः $$\tan 45^\circ = \frac{2 - \left(-\frac{a}{2}\right)}{1 + 2 \times \left(-\frac{a}{2}\right)}$$

या $$1 = \frac{2 + \frac{a}{2}}{1 - a}$$

या $$1 = \frac{\frac{4 + a}{2}}{1 - a}$$

या $$1 = \frac{4 + a}{2(1 - a)}$$

या $$2(1 - a) = 4 + a$$

या $$2 - 2a = 4 + a$$

या $$-2a - a = 4 - 2$$

या $$-3a = 2$$

या $a=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$ उत्तर

20. अक्षों द्वारा रेखा $x\sin\alpha+y\cot\alpha=\sin 2\alpha$ के कटे हुए रेखाखण्ड की माप ज्ञात कीजिए। इस रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$x\sin\alpha+y\cot\alpha=\sin 2\alpha$$

या $$x\sin\alpha+y\cot\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

दोनों पक्षों में $2\sin\alpha\cos\alpha$ से भाग करने पर,

$$\frac{x\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{y\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

या $$\frac{x}{2\cos\alpha}+\frac{y}{2\sin\alpha}=1 \quad \ldots(1)$$

जो कि रेखा का अन्तःखण्ड रूप है।

अतः रेखा (1) द्वारा अक्षों पर कटे अन्तःखण्ड क्रमशः $2\cos\alpha$ तथा $2\sin\alpha$ हैं।

∴ रेखा (1) तथा X–अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु $=(2\cos\alpha,0)$

तथा रेखा (1) तथा Y-अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु $=(0,2\sin\alpha)$

अक्षों के द्वारा रेखा (1) के कटे हुए अन्तःखण्ड की माप

= बिन्दुओं $(2\cos,0)$ व $(0,2\sin\alpha)$ के बीच की दूरी

$$=\sqrt{(2\cos\alpha-0)^2+(0-2\sin\alpha)^2}$$

$$=\sqrt{4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$$

$$=\sqrt{4(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}$$

$$=\sqrt{4\times 1}$$

$$=\sqrt{4}$$

= **2 इकाई** उत्तर

रेखा (1) के मध्य-बिन्दुओं के निर्देशांक = बिन्दु $(2\cos\alpha,0)$ व $(0,2\sin\alpha)$ का मध्य बिन्दु

$$=\left[\frac{2\cos\alpha+0}{2},\frac{0+2\sin\alpha}{2}\right]$$

$$=\left[\frac{2\cos\alpha}{2},\frac{2\sin\alpha}{2}\right]$$

$$=(\cos\alpha,\sin\alpha)$$ उत्तर

विविध प्रश्नावली

1. k के मान ज्ञात कीजिए जबकि रेखा $(k-3)x-(4-k^2)y+k^2-7k+6=0$

(i) X-अक्ष के समान्तर है

(ii) Y-अक्ष के समान्तर है

(iii) मूल बिन्दु से होकर जाती है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$(k-3)x-(4-k^2)y+k^2-7k+6=0 \quad \ldots(1)$$

X-अक्ष का समीकरण, $y=0$ $\ldots(2)$

Y-अक्ष का समीकरण, $x=0$ $\ldots(3)$

रेखा (1) की प्रवणता $=\dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$=\frac{-(k-3)}{-(4-k^2)}=\frac{(k-3)}{(4-k^2)}$$

रेखा (2) की प्रवणता $=\dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{0}{1}=0$

तथा रेखा (3) की प्रवणता $=\dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=\dfrac{-1}{0}=0$

(i) जब रेखा (1) तथा X-अक्ष अर्थात् समीकरण (2) समान्तर हों, तो

रेखा (1) की प्रवणता = रेखा (2) की प्रवणता

$$\frac{k-3}{4-k^2}=0$$

या $$k-3=0$$

या $$k=3$$ **उत्तर**

(ii) जब रेखा (1) तथा Y-अक्ष अर्थात् रेखा (3) समान्तर हों, तो

रेखा (1) की प्रवणता = रेखा (3) की प्रवणता

$$\frac{k-3}{4-k^2}=\infty$$

या $$\frac{k-3}{4-k^2}=\frac{1}{0}$$

या $$0=4-k^2$$

या $$k^2=4$$

या $$k=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$ **उत्तर**

(iii) जब रेखा (1) मूल बिन्दु (0,0) से होकर जाती है। तब समीकरण (1) में $x=0$ तथा $y=0$ रखने पर,

$$(k-3)\times 0-(4-k^2)\times 0+k^2-7k+6=0$$

$$k^2-7k+6=0$$

$$k^2-6k-k+6=0$$

या $\quad k(k-6)-1(k-6)=0$

या $\quad (k-6)(k-1)=0$

यदि $k-6=0$ तब $k=6$

यदि $k-1=0$ तब $k=1$ उत्तर

2. θ और p के मान ज्ञात कीजिए यदि रेखा $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ रेखा $\sqrt{3}x+y+2=0$ का लम्ब रूप है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$\sqrt{3}x+y+2=0 \qquad \ldots(1)$$

या $\quad \sqrt{3}x+y=-2$

या $$\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}+\frac{y}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{-2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}$$

या $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}}x+\frac{y}{\sqrt{3+1}}=\frac{-2}{\sqrt{3+1}}$$

या $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}x+\frac{y}{\sqrt{4}}=\frac{-2}{\sqrt{4}}$$

या $$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=-\frac{2}{2}$$

या $$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=-1 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) समीकरण (1) का लम्ब रूप है।

परन्तु प्रश्नानुसार, रेखा (1) का लम्ब रूप, $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ $\qquad \ldots(3)$

अतः रेखा (2) व (3) एक ही रेखा को निरूपित करती हैं।

$\therefore$ समीकरण (2) व (3) की तुलना करने पर,

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta=\frac{1}{2}$ $\quad$ तथा $p=-1$

या $\quad p=1$ इकाई (ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर)

अब $\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$,

या $\quad \tan\theta=\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}$

या $\quad \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

या $\quad \tan\theta=\tan 30^\circ$

$\theta=30^\circ$

$$= \frac{30^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$$

अतः $\theta = \frac{\pi}{6}$ तथा $p = 1$ इकाई

उत्तर

3. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके अक्षों पर कटे अन्तःखण्डों का योग और गुणनफल क्रमशः 1 और – 6 है।

हल—माना रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ...(1)

जहाँ X-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= a$

तथा Y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= b$

प्रश्नानुसार, $a + b = 1$ ...(2)

तथा $ab = -6$ ...(3)

समीकरण (2) से $b = (1 - a)$ समीकरण (3) में रखने पर,

$$a(1-a) = -6$$

या $a - a^2 = -6$

या $-a^2 + a + 6 = 0$

या $a^2 - a - 6 = 0$

या $a^2 - 3a + 2a - 6 = 0$

या $a(a-3) + 2(a-3) = 0$

या $(a-3)(a+2) = 0$

यदि $a - 3 = 0$ तब $a = 3$

तथा यदि $a + 2 = 0$ तब $a = -2$

a के मान समीकरण (1) में रखने पर,

जब $a = 3$ तब $b = 1 - a = 1 - 3 = -2$

तथा जब $a = -2$ तब $b = 1 - a = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$

अतः अन्तःखण्ड $a = 3$ तथा $b = -2$ के संगत रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$

या $2x - 3y = 6$ उत्तर

तथा जब $a = -2$ तथा $b = 3$ के संगत रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow -3x + 2y = 6$$ उत्तर

4. Y-अक्ष पर कौन से बिन्दु ऐसे हैं, जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरी 4 इकाई है?

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

या $4x+3y=12$

या $4x+3y-12=0$ ...(1)

माना Y-अक्ष पर स्थित बिन्दु $(0,b)$ से रेखा (1) की दूरी 4 इकाई है

अत: ±4 = बिन्दु $(0,b)$ से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप

या $$\pm4=\frac{4\times0+3\times b-12}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

या $$\pm4=\frac{3b-12}{5}$$

या $\pm20=3b-12\Rightarrow 3b-12=\pm20$

यदि $3b-12=20\Rightarrow 3b=20+12\Rightarrow 3b=32$

या $$b=\frac{32}{3}$$

तथा यदि $3b-12=-20\Rightarrow 3b=-20+12$

या $3b=-8$

या $$b=-\frac{8}{3}$$

अत: Y-अक्ष पर स्थित अभीष्ट बिन्दु = $\left(0,\frac{32}{3}\right)$ तथा $\left(0,\frac{-8}{3}\right)$ हैं। उत्तर

5. मूल बिन्दु से बिन्दुओं $(\cos\theta,\sin\theta)$ और $(\cos\phi,\sin\phi)$ को मिलाने वाली रेखा की लाम्बिक दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—माना बिन्दु $A(x_1,y_1)=(\cos\theta,\sin\theta)$

तथा $B(x_2,y_2)=(\cos\phi,\sin\phi)$

बिन्दुओं A व B से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

सूत्र $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$ से,

अत: $$y-\sin\theta=\frac{(\sin\phi-\sin\theta)}{(\cos\phi-\cos\theta)}(x-\cos\theta)$$

या $(\cos\phi-\cos\theta)y-\sin\theta(\cos\phi-\cos\theta)$
$=(\sin\phi-\sin\theta)x-\cos\theta(\sin\phi-\sin\theta)$

या $(\sin\phi-\sin\theta)x-\cos\theta(\sin\phi-\sin\theta)=(\cos\phi-\cos\theta)y$
$-\sin\theta(\cos\phi-\cos\theta)$

या $(\sin\phi-\sin\theta)x-(\cos\phi-\cos\theta)y-\cos\theta(\sin\phi-\sin\theta)$
$+\sin\theta(\cos\phi-\cos\theta)=0$

या $(\sin\phi+\sin\theta)x-(\cos\phi-\cos\theta)y-\cos\theta\sin\phi+\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\phi$
$-\sin\theta\cos\theta=0$

या $(\sin\phi-\sin\theta)x-(\cos\phi-\cos\theta)y+\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi=0$ ...(1)

रेखा (1) रेखा के व्यापक रूप $ax+bx+c=0$ में है।

अतः मूल बिन्दु से रेखा (1) की लम्बिक दूरी सूत्र $p=\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ से

$$P=\left|\frac{\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi}{\sqrt{(\sin\phi-\sin\theta)^2+(\cos\phi-\cos\theta)^2}}\right|$$

या $$=\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{\left|\sqrt{\sin^2\phi+\sin^2\theta-2\sin\phi\sin\theta+\cos^2\phi+\cos^2\theta+2\cos\phi\cos\theta}\right|}$$

$$=\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{\left|\sqrt{(\sin^2\phi+\cos^2\phi)+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi)}\right|}$$

$$=\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{|\sqrt{1+1-2\cos(\phi-\theta)}|}$$

$$=\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{|\sqrt{2-2\cos(\phi-\theta)}|}$$

$$=\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{\left|\sqrt{2-2\left[1-2\sin^2\frac{(\phi-\theta)}{2}\right]}\right|}$$

$$=\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{\left|\sqrt{2-2+4\sin^2\frac{(\phi-\theta)}{2}}\right|}$$

$$=\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{\left|\sqrt{4\sin^2\frac{(\phi-\theta)}{2}}\right|}$$

$$=\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{\left|2\sin\frac{(\phi-\theta)}{2}\right|}=\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{2\left|\sin\frac{(\phi-\theta)}{2}\right|}$$ उत्तर

6. रेखाओं $x-7y+5=0$ और $3x+y=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से खींची गई और Y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$x-7y+5=0 \quad ...(1)$$

तथा $$3x+y=0$$

या $$y=-3x \quad ...(2)$$

समीकरण (2) से y का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$x-7(-3x)+5=0$$

या $$x+21x+5=0$$

या $$22x+5=0$$

या $$22x=-5$$

या $$x=\frac{-5}{22}$$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$y=-3\times\left(\frac{-5}{22}\right)=\frac{15}{22}$$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $=p\left(\frac{-5}{22},\frac{15}{22}\right)$

माना Y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$x=a \qquad \ldots(3)$$

अत: बिन्दु P रेखा (3) को सन्तुष्ट करेगा।

$$\therefore \quad \frac{-5}{22}=a \Rightarrow a=\frac{-5}{22}$$

a का मान समीकरण (3) में रखने पर रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$x=\frac{-5}{22}$$ उत्तर

7. रेखा $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ पर लम्ब उस बिन्दु से खींची गई रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ पर यह रेखा Y-अक्ष से मिलती है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$$

या $$3x+2y=12$$

या $$3x+2y-12=0 \qquad \ldots(1)$$

Y-अक्ष का समीकरण $x=0$ $\ldots(2)$

रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करने के लिए

समीकरण (1) में $x=0$ रखने पर

$$3\times 0+2y-12=0$$

या $$0+2y=12$$

या $$2y=12$$

या $$y=\frac{12}{2}=6$$

रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $=P(0,6)$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण

$$2x-3y+\lambda=0 \qquad \ldots(3)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) पर लम्ब रेखा बिन्दु $P(0,6)$ से होकर जाती है।

अतः बिन्दु $P(0,6)$ रेखा (3) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ रेखा (3) में $x=0,\ y=6$ रखने पर,

$$2\times 0-3\times 6+\lambda=0$$

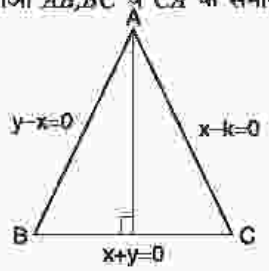
या $0-18+\lambda=0\Rightarrow\lambda=18$

λ का मान समीकरण (3) में रखने पर रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$2x-3y+18=0$$ उत्तर

8. रेखाओं $y-x=0, x+y=0$ और $x-k=0$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल—माना ΔABC की भुजाओं AB, BC व CA के समीकरण क्रमशः $y-x=0, x+y=0$



तथा $x-k=0$ हैं।

रेखा $y-x=0$ तथा $x+y=0$ को हल करने पर, $x=0, y=0$

अतः बिन्दु B के निर्देशांक $=(0,0)$

रेखा $x+y=0$ तथा $x-k=0$ को हल करने पर,

$$x=k, y=-k$$

अतः बिन्दु C के निर्देशांक $=(k,-k)$

समीकरण $y-x=0$ तथा $x-k=0$ को हल करने पर,

$$x=k, y=k$$

अतः बिन्दु A के निर्देशांक $=(k,k)$

रेखा BC की माप = बिन्दु B व C के बीच की दूरी

$$=\sqrt{(k-0)^2+(-k-0)^2}$$

$$=\sqrt{k^2+k^2}$$

$$=\sqrt{2k^2}=k\sqrt{2}$$ इकाई

रेखा AD की माप = रेखा $BC(x+y=0)$ पर बिन्दु A से डाले गए लम्ब की माप

$$=\frac{k+k}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$=\frac{2k}{\sqrt{1+1}}=\frac{2k}{\sqrt{2}}=k\sqrt{2}$$ इकाई

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} k\sqrt{2} \times k\sqrt{2}$$

$$= \frac{2}{2} k^2 = k^2 \text{ वर्ग इकाई}$$ उत्तर

9. p का मान ज्ञात कीजिए जिससे तीन रेखाएँ $3x+y-2=0$, $px+2y=3=0$ तथा $2x-y-3=0$ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+y-2=0 \quad \ldots(1)$$

$$2x-y-3=0 \quad \ldots(2)$$

तथा $$px+2y-3=0 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$5x-5=0$$

या $$5x=5$$

या $$x=\frac{5}{5}=1$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times1+y-2=0$$

या $$3+y-2=0$$

या $$1+y=0$$

या $$y=-1$$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु = (1,–1)

प्रश्नानुसार रेखाएँ (1),(2) व (3) एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं। अत: बिन्दु (–1,–1) रेखा (3) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ $$p\times1+2\times(-1)-3=0$$

या $$p-2-3=0$$

या $$p-5=0$$

या $$p=5$$ उत्तर

10. यदि तीन रेखाएँ जिनके समीकरण $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ और $y=m_3x+c_3$ हैं, संगामी हैं तो दिखाइए कि—

$$m_1(c_2-c_3)+m_2(c_3-c_1)+m_3(c_1-c_2)=0$$

हल—दी गई समीकरण,

$$y=m_1x+c_1 \quad \ldots(1)$$

$$y=m_2x+c_2 \quad \ldots(2)$$

तथा $y = m_3x + c_3$ ...(3)

रेखा (1) व (2) से,

$$m_1x + c_1 = m_2x + c_2$$

या $c_1 - c_2 = m_2x - m_1x$

या $c_1 - c_2 = (m_2 - m_1)x$

या $x = \dfrac{c_1 - c_2}{m_2 - m_1}$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = m_1\frac{(c_1 - c_2)}{m_2 - m_1} + c_1$$

$$= \frac{m_1c_1 - m_1c_2 + m_2c_1 - m_1c_1}{m_2 - m_1}$$

$$= \frac{(m_2c_1 - m_1c_2)}{m_2 - m_1}$$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु

$$= P\left[\frac{c_1 - c_2}{m_2 - m_1}, \frac{m_2c_1 - m_1c_2}{m_2 - m_1}\right]$$

रेखा (1), (2) व (3) संगामी हैं। अत: बिन्दु P रेखा (3) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ $\dfrac{(m_2c_1 - m_1c_2)}{m_2 - m_1} = m_3\dfrac{(c_1 - c_2)}{m_2 - m_1} + c_3$

या $\dfrac{(m_2c_1 + m_1c_2)}{m_2 - m_1} = \dfrac{m_3(c_1 - c_2) + c_3(m_2 - m_1)}{(m_2 - m_1)}$

या $(m_2c_1 + m_1c_2) = m_3(c_1 - c_2) + c_3(m_2 - m_1)$

या $c_3(m_2 - m_1) - (m_2c_1 - m_1c_2) + m_2(c_1 - c_2) = 0$

या $c_3m_2 - c_3m_1 - m_2c_1 + m_1c_2 + m_3(c_1 - c_2) = 0$

या $m_1c_2 - c_3m_1 + c_3m_2 - m_2c_1 + m_3(c_1 - c_2) = 0$

या $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$ इति सिद्धम्

11. बिन्दु (3,2) से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $x - 2y = 3$ से 45° का कोण बनाती हैं।

हल—बिन्दु (3,2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$(y - 2) = m(x - 3) \quad ...(1)$$

दी गई रेखा का समीकरण,

$$x - 2y = 3 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) की प्रवणता $(m_1) = m$

तथा रेखा 2 की प्रवणता, $(m_2) = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (2) के बीच कोण $(\theta) = 45°$

सूत्र $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ से,

या $\tan 45° = \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + m \times \frac{1}{2}}$

या $1 = \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{m}{2}}$

या $1 + \frac{m}{2} = m - \frac{1}{2}$

या $1 + \frac{1}{2} = m - \frac{m}{2}$

या $\frac{3}{2} = \frac{m}{2}$

या $m = 3$

m का मान समीकरण (1) में रखने पर रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$y - 2 = 3(x - 3)$

या $y - 2 = 3x - 9$

या $3x - y - 9 + 2 = 0$

या $3x - y - 7 = 0$

या $3x - y = 7$ उत्तर

12. रेखाओं $4x + 7y - 3 = 0$ और $x - 3y + 1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान अन्तःखण्ड बनाती है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$4x + 7y - 3 = 0$ ...(1)

$2x - 3y + 1 = 0$ ...(2)

समीकरण (2) में 2 की गुणा करने पर,

$4x - 6y + 2 = 0$ ...(3)

समीकरण (1) में से समीकरण (3) घटाने पर,

$13y - 5 = 0$

या $13y = 5$

या $y = \frac{5}{13}$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$4x + 7 \times \frac{5}{13} - 3 = 0$$

या $4x + \frac{35}{13} - 3 = 0$

या $4x + \frac{35 - 39}{13} = 0$

या $4x - \frac{4}{13} = 0$

या $4x = \frac{4}{13}$

या $x = \frac{4}{4 \times 13} = \frac{1}{13}$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $P\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$ है।

अक्षों से समान अन्त:खण्ड (a) बनाने वाली रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a \quad \ldots(3)$$

रेखा (3) प्रतिच्छेद बिन्दु P से होकर जाती है। अत:

$$\frac{1}{13} + \frac{5}{13} = a$$

या $\frac{1+5}{13} = a$

या $\frac{6}{13} = a \Rightarrow a = \frac{6}{13}$ समीकरण (3) में रखने पर,

$$x + y = \frac{6}{13}$$

या $13x + 13y = 6$ **उत्तर**

13. दर्शाइए कि मूल बिन्दु से जाने वाली और रेखा $y = mx + c$ से θ कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण $\frac{y}{x} = \pm \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m\tan\theta}$ है।

हल—मूल बिन्दु (0,0) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - 0 = m_1 (x - 0)$$

या $y = m_1 x \quad \ldots(1)$

तथा दी गई रेखा का समीकरण,

$$y = mx + c \quad \ldots(2)$$

∵ रेखा (1) व (2) के बीच का कोण θ है, अत:

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$$

या $\tan\theta + m_1 m\tan\theta = m_1 - m$

या $m + \tan\theta = m_1 - m_1 m\tan\theta$

या $m + \tan\theta = m_1(1 - m\tan\theta)$

या $m_1 = \dfrac{m + \tan\theta}{1 - m\tan\theta}$

m_1 का मान समीकरण (1) में रखने पर,

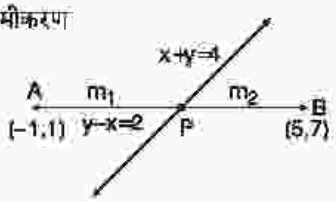
$$y = x \times \frac{m + \tan\theta}{1 - m\tan\theta}$$

या $\dfrac{y}{x} = \dfrac{m + \tan\theta}{1 - m\tan\theta}$ इति सिद्धम्

14. बिन्दु (–1,1) और (5,7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को रेखा $x + y = 4$ किस अनुपात में विभाजित करती है?

हल–बिन्दु (–1,1) व (5,7) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - 1 = \frac{7-1}{5+1}(x+1)$$



या $y - 1 = \dfrac{6}{6}(x+1)$

या $y - 1 = x + 1$

या $y - x = 2$ ...(1)

दी गई रेखा $x + y = 4$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर, $x = 1, y = 3$

अत: रेखा (1) व (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु P के निर्देशांक = (1,3) हैं।

माना रेखा $x + y = 4$ बिन्दुओं (–1,1) व (5,7) को मिलाने वाली रेखा $y - x = 2$ को बिन्दु P पर m_1 व m_2 के अनुपात में विभाजित करती है। अत:

अन्त: विभाजन सूत्र

$$P(h,k) = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \text{ से}$$

यहाँ $P(h,k) = p(1,3)$

$(x_1, y_1) = (-1,1), (x_2, y_2) = (5,7)$

अत: $P(1,3) = \left(\dfrac{m_1 \times 5 + m_2 \times (-1)}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1 \times 7 + m_2 \times 1}{m_1 + m_2}\right)$

या $$P(1,3)=\left(\frac{5m_1-m_2}{m_1+m_2},\frac{7m+m_2}{m_1+m_2}\right)$$

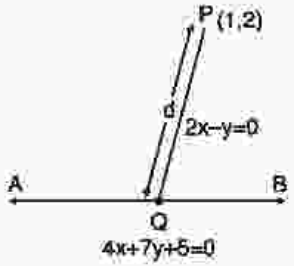
या $$\frac{5m_1-m_2}{m_1+m_2}=1 \text{ तथा } \frac{7m_1+m_2}{m_1+m_2}=3m_1+m_2$$

या $$5m_1-m_2=m_1+m_2 \text{ तथा } 7m_1+m_2=3(m_1+m_2)$$

$$5m_1-m_2=m_2+m_2 \quad \text{तथा} \quad 7m_1+m_2=3m_1+3m_2$$

या $$4m_1=2m_2 \text{ तथा } 7m_1-3m_1=3m_2-m_2$$

या $$\frac{m_1}{m_2}=\frac{2}{4} \text{ तथा } 4m_1=2m_2$$



या $$\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{2} \text{ तथा } \frac{m_1}{m_2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

∴ $$m_1:m_2=1:2$$ उत्तर

15. बिन्दु (1,2) से रेखा $4x+7y+5=0$ की $2x-y=0$ के अनुदिश दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—माना दिए गए बिन्दु $P(1,2)$ से रेखा $4x+7y+5=0$ की रेखा $2x-y=0$ अनुदिश दूरी (d) है।

दी गई रेखाओं के समीकरण, ...(1)

$$4x+7y+5=0$$

तथा $$2x-y=0 \Rightarrow y=2x \quad ...(2)$$

समीकरण (2) से y का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$4x+7\times 2x+5=0$$

या $$4x+14x+5=0$$

या $$18x+5=0$$

या $$18x=-5$$

या $$x=\frac{-5}{18}$$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$y=2\times\left(\frac{-5}{18}\right)=\frac{-10}{18}$$

अतः रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $Q=\left(\frac{-5}{18},\frac{-10}{18}\right)$

अत: बिन्दु $P(1,2)$ से रेखा (1) की रेखा (2) के अनुदिश दूरी

= बिन्दु (1, 2) व $\left(\frac{-5}{18}, \frac{-10}{18}\right)$ के बीच की दूरी

$$d = \sqrt{\left(\frac{-5}{18} - 1\right)^2 + \left(\frac{-10}{18} - 2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-5-18}{18}\right)^2 + \left(\frac{-10-36}{18}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{23}{18}\right)^2 + \left(\frac{-46}{18}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{529}{324} + \frac{2116}{324}}$$

$$= \sqrt{\frac{2645}{324}} = \sqrt{\frac{5 \times 529}{324}} = \frac{23\sqrt{5}}{18}$$ इकाई

16. बिन्दु (–1,2) से खींची जा सकने वाली उस रेखा की दिशा ज्ञात कीजिए जिसका रेखा $x + y = 4$ से प्रतिच्छेद बिन्दु दिए बिन्दु से 3 इकाई की दूरी पर है।

हल—माना बिन्दु (–1,2) से खींची जाने वाली रेखा की प्रवणता = m है

तब रेखा का समीकरण

$$y - 2 = m(x + 1) \text{ होगा}$$

या $$y - 2 = mx + m$$

या $$y = mx + m + 2 \quad \ldots(1)$$

दी गई अन्य रेखा $x + y = 4 \quad \ldots(2)$

समीकरण (1) व (2) को हल करने के लिए समीकरण (2) से $y = 4 - x$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$4 - 2 - m = mx + x$$

या $$2 - m = (m + 1)x$$

या $$x = \frac{2-m}{m+1}$$

x का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$y = 4 - \frac{2-m}{m+1}$$

$$= \frac{4m + 4 - 2 + m}{m+1}$$

$$y = \frac{5m+2}{m+1}$$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु = $\left(\frac{2-m}{m+1}, \frac{5m+2}{m+1}\right)$

प्रश्नानुसार, बिन्दु $\left(\frac{2-m}{m+1}, \frac{5m+2}{m+1}\right)$ व $(-1,2)$ के बीच की दूरी $= 3$

या $$\sqrt{\left(\frac{2-m}{m+1}+1\right)^2+\left(\frac{5m+2}{m+1}-2\right)^2}=3$$

या $$\sqrt{\left(\frac{2-m+m+1}{m+1}\right)^2+\left(\frac{5m+2-2m-2}{m+1}\right)^2}=3$$

या $$\sqrt{\left(\frac{3}{m+1}\right)^2+\left(\frac{3m}{m+1}\right)^2}=3$$

या $$\sqrt{\frac{9}{(m+1)^2}+\frac{9m^2}{(m+1)^2}}=3$$

या $$\sqrt{\frac{9+9m^2}{(m+1)^2}}=3$$

या $$\frac{9+9m^2}{(m+1)^2}=3^2$$

या $$\frac{9+9m^2}{(m+1)^2}=9$$

या $$\frac{9+9m^2}{m^2+2m+1}=9$$

या $$9+9m^2=9m^2+18m+9$$

या $$0=18m$$

या $$m=0$$

$$\tan\theta=0$$

$$\tan\theta=\tan 0^\circ$$

$$\theta=0^\circ$$

अत: रेखा X-अक्ष के समान्तर अथवा Y-अक्ष के लम्बवत है।

17. किसी बिन्दु के लिए रेखा को दर्पण मानते हुए बिन्दु (3, 8) का रेखा $x+3y=7$ में प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण

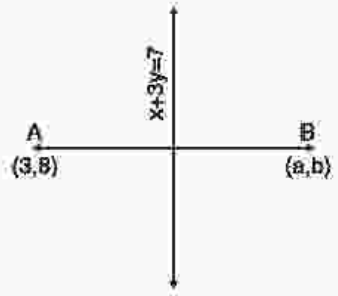
$$x+3y=7 \qquad \ldots(1)$$

माना बिन्दु A (3,8) का रेखा दर्पण में प्रतिबिम्ब बिन्दु $B(a,b)$ है।

अत: रेखा, (1) रेखा AB का लम्ब समद्विभाजक होगी

रेखा AB की प्रवणता $=\frac{b-8}{a-3}$

तथा रेखा (1) की प्रवणता $=-\frac{1}{3}$



रेखा (1), रेखा AB पर लम्ब है,

$\therefore \quad \frac{b-8}{a-3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

या $\quad \left(\frac{b-8}{a-3}\right)\times\frac{1}{3}=1$

या $\quad \frac{b-8}{3a-9}=1$

या $\quad b-8=3a-9$

या $\quad 3a-b=9-8$

या $\quad 3a-b=1 \quad \ldots(2)$

रेखा AB का मध्य बिन्दु $=\left(\frac{a+3}{2},\frac{b+8}{2}\right)$ जो रेखा (1) पर भी पड़ता है। अत: यह बिन्दु रेखा (1) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore \quad \frac{a+3}{2}+3\left(\frac{b+8}{2}\right)=7$

या $\quad \frac{a+3}{2}+\frac{3b+24}{2}=7$

या $\quad a+3+3b+24=14$

या $\quad a+3b=-13 \quad \ldots(3)$

समीकरण (1) में 3 की गुणा करके समीकरण (3) में जोड़ने पर,

$10a=-10$

या $\quad a=-1$

a का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$-1+3b=-13$

या $\quad 3b=-13+1$

या $\quad 3b=-12$

या $\quad b=-4$

$\therefore$ बिन्दु $B(a,b)=(-1,-4)$

अत: दिए गए बिन्दु का दी गई रेखा में प्रतिबिम्ब $(-1,-4)$ है। उत्तर

18. यदि रेखाएँ $y=3x+1$ और $2y=x+3$ रेखा $y=mx+4$ पर समान रूप से आनत हों तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाएँ

$y=3x+1 \quad \ldots(1)$

$2y=x+3 \Rightarrow y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2} \quad \ldots(2)$

तथा $y = mx + 4$ ...(3)

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = 3$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = \frac{1}{2}$

तथा रेखा (3) की प्रवणता $(m_3) = m$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (3) के बीच का कोण = रेखा (2) व (3) के बीच का कोण

$$\left|\frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3}\right| = \left|\frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3}\right|$$

या $$\left|\frac{3 - m}{1 + 3 \times m}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} - m}{1 + \frac{1}{2} \times m}\right|$$

या $$\left|\frac{3 - m}{1 + 3m}\right| = \left|\frac{\frac{1 - 2m}{2}}{\frac{2 + m}{2}}\right|$$

या $$\frac{3 - m}{1 + 3m} = \pm\left(\frac{1 - 2m}{2 + m}\right)$$

यदि $$\frac{3 - m}{1 + 3m} = \left(\frac{1 - 2m}{2 + m}\right)$$

$$(3 - m)(2 + m) = (1 - 2m)(1 + 3m)$$

या $$6 + 3m - 2m - m^2 = 1 + 3m - 2m - 6m^2$$

या $$6 + m - m^2 = 1 + m - 6m^2$$

या $$5 = -5m^2$$

या $$m^2 = -\frac{5}{5}$$

या $$m^2 = -1$$

या $m = \sqrt{-1}$ जोकि वास्तविक संख्या नहीं है।

यदि $$\frac{3 - m}{1 + 3m} = -\left(\frac{1 - 2m}{2 + m}\right)$$

तब $$(3 - m)(2 + m) = -(1 - 2m)(1 + 3m)$$

$$6 + 3m - 2m - m^2 = -(1 + 3m - 2m - 6m^2)$$

या $$6 + m - m^2 = -(1 + m - 6m^2)$$

या $$6 + m - m^2 = -1 - m + 6m^2$$

या $$6m^2 + m^2 - m - m - 1 - 6 = 0$$

या $$7m^2 - 2m - 7 = 0$$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$m=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times7(-7)}}{2\times7}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4+196}}{14}$$

$$=\frac{2\ \sqrt{200}}{14}$$

$$=\frac{2\pm10\sqrt{2}}{14}$$

$$=\frac{2(1\pm5\sqrt{2})}{14}$$

$$=\frac{\mathbf{1\pm5\sqrt{2}}}{7}$$ उत्तर

19. यदि एक चर बिन्दु $P(x, y)$ की रेखाओं $x+y-5=0$ तथा $3x-2y+7=0$ से लाम्बिक दूरियों का योग सदैव 10 रहे तो दर्शाइए कि P अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है।

हल—दी गई रेखाओं का समीकरण,

$$x+y-5=0 \quad \ldots(1)$$

$$3x-2y+7=0 \quad \ldots(2)$$

बिन्दु $P(x, y)$ की रेखा (1) से लाम्बिक दूरी $p_1=\frac{x+y-5}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$$=\frac{x+y-5}{\sqrt{2}}$$

तथा बिन्दु $P(x, y)$ की रेखा (2) से लाम्बिक दूरी $p_2=\frac{3x-2y+7}{\sqrt{3^2+2^2}}$

$$=\frac{3x-2y+7}{\sqrt{13}}$$

प्रश्नानुसार,

$$p_1+p_2=10$$

या $$\frac{x+y-5}{\sqrt{2}}+\frac{3x-2y+7}{\sqrt{13}}=10$$

या $$\sqrt{13}(x+y-5)+\sqrt{2}(3x-2y+7)=10\sqrt{26}$$

या $$\sqrt{13}x+\sqrt{13}y-5\sqrt{13}+3\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+7\sqrt{2}=10\sqrt{26}$$

$$(\sqrt{13}+3\sqrt{2})x+(\sqrt{13}-2\sqrt{2})y+(7\sqrt{2}-5\sqrt{13}-10\sqrt{26})=0$$

जो कि एक रेखा का समीकरण है। अत: बिन्दु P एक रेखा पर गमन करता है। इति सिद्धम्

20. समान्तर रेखाओं $9x+6y-7=0$ और $3x+2y+6=0$ से समदूरस्थ रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई समान्तर रेखाओं के समीकरण,

$$9x+6y-7=0 \quad \ldots(1)$$

तथा $$3x+2y+6=0 \quad \ldots(2)$$

माना बिन्दु $P(x_1, y_1)$ रेखा (1) व (2) से समदूरस्थ है।

$\therefore$ बिन्दु P की रेखा (1) से लाम्बिक दूरी = बिन्दु P की रेखा (2) से लाम्बिक दूरी

$$\frac{|9x_1+6y_1-7|}{\sqrt{9^2+6^2}}=\frac{|3x_1+2y_1+6|}{\sqrt{3^2+2^2}}$$

या $$\frac{|9x_1+6y_1-7|}{\sqrt{81+36}}=\frac{|3x_1+2y_1+6|}{\sqrt{9+4}}$$

या $$\frac{|9x_1+6y_1-7|}{\sqrt{117}}=\frac{|3x_1+2y_1+6|}{\sqrt{13}}$$

या $$\frac{|9x_1+6y_1-7|}{3\sqrt{13}}=\frac{|3x_1+2y_1+6|}{\sqrt{13}}$$

या $$\frac{|9x_1+6y_1-7|}{3}=|3x_1+2y_1+6|$$

या $$|9x_1=6y_1-7|=3|3x_1+2y_1+6|$$

या $$9x_1+6y_1-7=\pm3(3x_1+2y_1+6)$$

यदि $$9x_1+6y_1-7=+3(3x_1+2y_1+6)$$

या $$9x_1+6y_1-7=9x_1+6y_1+18$$

या $$-7=18$$ जो कि सम्भव नहीं है।

अत: यदि $$9x_1+6y_1-7=-3(3x_1+2y_1+6)$$

या $$9x_1+6y_1-7=-9x_1-6y_1-18$$

या $$9x_1+9x+6y_1+6y_1+18-7=0$$

या $$18x_1+12y_1+11=0$$

अत: अभीष्ट रेखा $18x+12y+11=0$ उत्तर

21. बिन्दु (1,2) से होकर जाने वाली एक प्रकाश किरण X-अक्ष के बिन्दु A से परावर्तित होती है और परावर्तित किरण बिन्दु (5,3) से होकर जाती है। बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

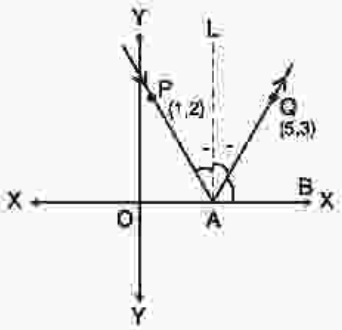
हल—माना X-अक्ष पर स्थित बिन्दु A के निर्देशांक $=(a,0)$ है।

बिन्दु A पर X-अक्ष के लम्बवत् रेखा AL खींची।

हम जानते हैं कि—

आपतन कोण = परावर्तन कोण

$$\angle PAL=\angle QAL=\theta$$



माना $\angle QAX = \alpha$

$\therefore$ $\angle OAP = 180° - (\alpha + 2\theta)$

$= 180° - [\alpha + 2(90° - \alpha)]$

$= 180° - [\alpha + 180° - 2\alpha]$

$= 180° - \alpha - 180° + 2\alpha$

$= \alpha$

$\therefore \angle PAX = 180° - \alpha$

अब, रेखा AQ की प्रवणता $= \dfrac{3-0}{5-a}$

या $\tan\alpha = \dfrac{3}{5-a}$

रेखा PA की प्रवणता $= \dfrac{2-0}{1-a}$

$\tan(180° - \alpha) = \dfrac{2}{1-a}$

या $-\tan\alpha = \dfrac{2}{1-a}$

या $\tan\alpha = \dfrac{2}{a-1}$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$\dfrac{3}{5-a} = \dfrac{2}{a-1}$

$3a - 3 = 10 - 2a$

या $3a + 2a = 10 + 3$

या $5a = 13$

या $a = \dfrac{13}{5}$

अत: बिन्दु A के निर्देशांक $\left(\dfrac{13}{5}, 0\right)$ हैं उत्तर

22. दिखाइए कि $(\sqrt{a^2-b^2},0)$ और $(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ बिन्दुओं से रेखा $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$ पर खींचे गए लम्बों की लम्बाइयों का गुणनफल b^2 है।

हल—इस प्रश्न के लिए **अभ्यास 14.6** के प्रश्न संख्या-11 का हल देखिए।

23. एक व्यक्ति समीकरणों $2x-3y+4=0$ और $3x+4y-5=0$ से निरूपित रेखीय पथों के संधि बिन्दु पर खड़ा है और समीकरण $6x-7y+8=0$ से निरूपित पथ पर न्यूनतम समय में पहुँचना चाहता है। उसके द्वारा अनुसरित पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई पथरूपी रेखाओं के समीकरण,

$$2x-3y+4=0 \quad \ldots(1)$$

$$3x+4y-5=0 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) में 4 तथा (2) में 3 की गुणा करने पर,

$$8x-12y+16=0 \quad \ldots(3)$$

$$9x+12y-15=0 \quad \ldots(4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर, $17x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{17}$

x का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$3\times\left(-\frac{1}{17}\right)+4y-5=0$$

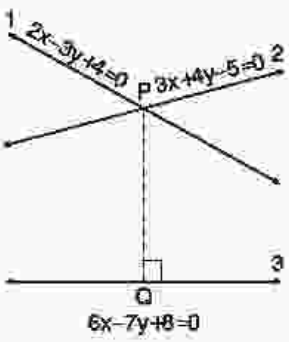
$$-\frac{3}{17}+4y-5=0$$

या $$4y=5+\frac{3}{17}$$

या $$4y=\frac{88}{17}$$

या $$y=\frac{88}{4\times17}$$

या $$y=\frac{22}{17}$$



अतः रेखाओं (1) व (2) से निरूपित सरल रेखीय पथों का सन्धि बिन्दु $P\left(-\frac{1}{17},\frac{22}{17}\right)$ है।

तीसरे पथ का समीकरण $6x-7y+8=0 \quad \ldots(3)$

पथ (1) व (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु P से पथ (3) या पथ $6x-7y+8=0$ पर न्यूनतम समय में बिन्दु P से पथ (3) पर लाम्बिक पथ PQ द्वारा ही पहुँचा जा सकता है।

$\therefore$ रेखा (पथ) $6x-7y+8=0$ के लम्ब रेखा का समीकरण

$$7x+6y+\lambda=0 \quad \ldots(4)$$

$\because$ बिन्दु P रेखा (4) पर स्थित है।

$\therefore \quad 7\times\left(-\frac{1}{17}\right)+6\times\left(\frac{22}{17}\right)+\lambda=0$

या $\quad \frac{-7}{17}+\frac{132}{17}+\lambda=0$

या $\quad \frac{-7+132}{17}+\lambda=0$

$\frac{125}{17}+\lambda=0$

या $\quad \lambda=-\frac{125}{17}$

λ का मान समीकरण (4) में रखने पर,

$7x+6y-\frac{125}{17}=0$

या $\quad 119x+102y-125=0$

या $\quad 119x+102y=125$ उत्तर

24. बिन्दु $(0,\alpha)$ से होकर जाने वाली उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जिन पर बिन्दु $(2\alpha,2\alpha)$ से डाले गए लम्बों की लम्बाइयाँ α है।

हल—बिन्दु $(0,\alpha)$ से होकर जाने वाली रेखा का व्यापक समीकरण,

$y-\alpha=m(x-0)$

या $\quad y-\alpha=mx$

या $\quad mx-y+\alpha=0$ ...(1)

रेखा (1) पर बिन्दु $(2\alpha,2\alpha)$ से डाले गए लम्ब की माप

या $\quad =\frac{m\times 2\alpha-2\alpha+\alpha}{\sqrt{m^2+1}}$

या $\quad =\frac{2m\alpha-\alpha}{\sqrt{m^2+1}}$

प्रश्नानुसार, $\quad \frac{2m\alpha-\alpha}{\sqrt{m^2+1}}=\alpha$

या $\quad 2m\alpha-\alpha=\alpha\sqrt{m^2+1}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$(2m\alpha-\alpha)^2=\alpha^2(\sqrt{m^2+1})^2$

या $\quad 4m^2\alpha^2+\alpha^2-4m\alpha^2=\alpha^2(m^2+1)$

या $\quad 4m^2\alpha^2+\alpha^2-4m\alpha^2=\alpha^2m^2+\alpha^2$

या $\quad 3m^2\alpha^2-4m\alpha^2=0$

या $\quad m\alpha^2(3m-4)=0$

$\Rightarrow \quad m=0$ या $3-4=0$

$$m = 0 \text{ या } m = \frac{4}{3}$$

यदि $m = 0$ तो रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$0 \times x - y + \alpha = 0$$

या $$0 - y + \alpha = 0$$

या $$y - \alpha = 0$$ उत्तर

यदि, $m = \frac{4}{3}$, तो रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$\frac{4}{3} \times x - y + \alpha = 0$$

या $$4x - 3y + 3\alpha = 0$$ उत्तर

25. समीकरण $4x - 5y = 7$ को अन्तःखण्ड के रूप में व्यक्त कीजिए तथा उसका Y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड लिखिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$4x - 5y = 7$$

या $$\frac{4x}{7} - \frac{5y}{7} = \frac{7}{7}$$

या $\frac{x}{\frac{7}{4}} + \frac{y}{-\frac{7}{5}} = 1$ जो रेखा का अन्तःखण्ड रूप है।

रेखा (1) का Y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= \frac{-7}{5}$ मात्रक उत्तर

26. बिन्दु (3,4) तथा (–2,5) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। यदि यह रेखा बिन्दु (a, b) से होकर जाती है, तो सिद्ध कीजिए— $a + 5b = 23$

हल—माना बिन्दु $A(x_1, y_1) = (3,4)$

तथा $$B(x_2, y_2) = (-2,5)$$

बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

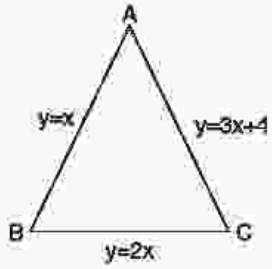
या $$y - 4 = \frac{5-4}{-2-3}(x-3)$$

या $$y - 4 = \frac{1}{-5}(x-3)$$

या $$-5y + 20 = x - 3$$

या $$x + 5y = 20 + 3$$

या $$x + 5y = 23 \quad \ldots(1)$$



प्रश्नानुसार, रेखा (1) बिन्दु (a,b) से होकर जाती है। अतः बिन्दु (a,b) रेखा (1) को सन्तुष्ट करेगा। समीकरण (1) में $x=a, y=b$ रखने पर

$$a+5b=23$$ इति सिद्धम्

27. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी भुजाओं के समीकरण $y=x$, $y=2x, y=3x+4$ हैं।

हल—माना ΔABC की भुजाओं AB, BC तथा CA के समीकरण क्रमशः

$$y=x \quad \ldots(1)$$

तथा $$y=2x \quad \ldots(2)$$

$$y=3x+4 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर, बिन्दु B के निर्देशांक $=(0,0)$

समीकरण (2) व (3) को हल करने पर, बिन्दु C के निर्देशांक $=(-4,-8)$

तथा समीकरण (1) व (3) को हल करने पर, बिन्दु A के निर्देशांक $=(-2,-2)$

अतः $A\equiv(0,0)=(x_1,y_1)$

$B\equiv(-4,-8)=(x_2,y_2)$

$C\equiv(-2,-2)=(x_3,y_3)$

ΔABC का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}|[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]|$ से

$$=\frac{1}{2}|[0(-8+2)+(-4)(-2-0)+(-2)(0+8)]|$$

$$=\frac{1}{2}|[0-4\times(-2)-2\times(8)]|$$

$$=\frac{1}{2}|[8-16]|=\frac{1}{2}|-8|=\frac{1}{2}\times 8$$

$=4$ वर्ग इकाई उत्तर

28. यदि रेखाएँ $y=mx+c$ तथा $2x-y+3=0$ परस्पर लम्ब हैं, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$y=mx+c \quad \ldots(1)$$

$$2x-y+3=0 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=m$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = \dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$= \frac{-2}{-1} = 2$$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (2) परस्पर लम्ब हैं।

∴ रेखा (1) की प्रवणता × रेखा (2) की प्रवणता = –1

या $m \times 2 = -1$

या $m = -\dfrac{1}{2}$ उत्तर

29. सिद्ध कीजिए कि रेखाओं $a(a-b)y - b(a+b)x = b^3$ $a(a+b)y - b(a-b)x = a^3$, जहाँ पर $a > b > 0$, के बीच का कोण $\theta = \tan^{-1}\left[\dfrac{4a^2b^2}{a^4 - b^4}\right]$ है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$a(a-b)y - b(a+b)x = b^3 \quad \ldots(1)$$

तथा $a(a+b)y - b(a-b)x = a^3 \quad \ldots(2)$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = \dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$= -\frac{-b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{b(a+b)}{a(a-b)}$$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = -\dfrac{-b(a-b)}{a(a+b)} = \dfrac{b(a-b)}{a(a+b)}$

माना रेखा (1) व (2) के बीच का कोण θ है।

∴ $\tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

या $$= \frac{\dfrac{b(a+b)}{a(a-b)} - \dfrac{b(a-b)}{a(a+b)}}{1 + \dfrac{b(a+b)}{a(a-b)} \times \dfrac{b(a-b)}{a(a+b)}}$$

या $$= \frac{\dfrac{ab(a+b)^2 - ab(a-b)^2}{a^2(a+b)(a-b)}}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{\frac{ab(a^2+b^2+2ab)-ab(a^2+b^2-2ab)}{a^2(a^2-b^2)}}{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$$

या

$$= \frac{\frac{ab[a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab]}{a^2(a^2-b^2)}}{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$$

या

$$= \frac{\frac{ab\times 4ab}{a^2(a^2-b^2)}}{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$$

या $\theta = \tan^{-1}\left[\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}\right]$ इति सिद्धम्

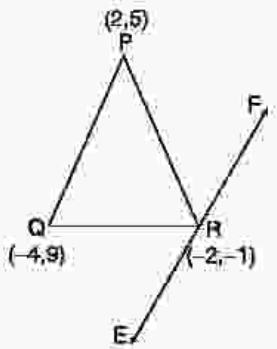
30. ΔPQR के शीर्ष $P(2,5), Q(-4,9)$ और $R(-2,-1)$ हैं। भुजा PQ के समान्तर सम्मुख शीर्ष से खींची गई रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है ΔPQR में,

शीर्ष P के निर्देशांक $= (2,5)$

शीर्ष Q के निर्देशांक $= (-4,9)$

तथा शीर्ष R के निर्देशांक $= (-2,-1)$



भुजा PQ का समीकरण,

सूत्र, $y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ से,

$$y-5 = \frac{9-5}{-4-2}(x-2)$$

या $$y-5 = \frac{4}{-6}(x-2)$$

या $$y-5 = -\frac{2}{3}(x-2)$$

या $$3y-15 = -2x+4$$

या $$2x+3y-15-4 = 0$$

या $$2x+3y-19 = 0 \quad \ldots(1)$$

भुजा PQ अर्थात् रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$2x+3y = \lambda \quad \ldots(2)$$

रेखा (2) बिन्दु $R(-2,-1)$ से होकर जाती है। अत: रेखा (2) में

$x=-2, y=-1$ रखने पर,

$$2\times(-2)+3\times(-1)=\lambda$$

या $$-4-3=\lambda$$

या $$-7=\lambda \Rightarrow \lambda=-7$$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$2x+3y=-7$$

या $$2x+3y+7=0$$ उत्तर

31. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $3x-4y=4, 4x+3y=22$ और $5x+8y=36$ एक बिन्दुगामी हैं तथा पहली और दूसरी रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं।

हल—दी गई रेखाएँ,

$$3x-4y=4 \quad ...(1)$$

$$4x+3y=22 \quad ...(2)$$

$$5x+8y=36 \quad ...(3)$$

समीकरण (1) में 3 तथा समीकरण (2) में 4 की गुणा करने पर,

$$9x-12y=12 \quad ...(4)$$

$$16x+12y=88 \quad ...(5)$$

समीकरण (4) व (5) को जोड़ने पर,

$$25x=100 \Rightarrow x=\frac{100}{25}=4$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times4-4\times y=4$$

या $$12-4=4y$$

या $$8=4y \Rightarrow y=\frac{8}{4}=2$$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु, $=(4,2)$

तीनों रेखाओं के एक बिन्दुगामी होने के लिए रेखा (3) बिन्दु (4,2) को सन्तुष्ट करेगी।

अत: रेखा (3) में $x=4$ तथा $y=2$ रखने पर,

$$\text{L.H.S}=5x+8y=5\times4+8\times2$$

$$=20+16$$

$$=36=\text{R.H.S}$$

अत: दी गई तीनों रेखाएँ एक बिन्दुगामी हैं। इति सिद्धम्

अब, रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=\dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

अब, रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$m_2 = -\frac{4}{3}$$

$$m_1 m_2 = \frac{3}{4} \times \left(\frac{-4}{3}\right) = -\frac{3 \times 4}{4 \times 3} = -1$$

अतः पहली व दूसरी रेखा परस्पर लम्ब हैं। इति सिद्धम्

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 308, 309 व 310 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-7 मेन्सुरेशन (Mensuration)

15

लम्बवृत्तीय बेलन
(Right Circular Cylinder)

अभ्यास 15.1

1. एक लम्बवृत्तीय बेलन के आधार का क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है। यदि ऊँचाई 10 सेमी हो, तो बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय बेलन के आधार का क्षेत्रफल = 154 सेमी^{2}

तथा बेलन की ऊँचाई = 10 सेमी

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= 154 \times 10 = \mathbf{1540}$ **सेमी**^{3} **उत्तर**

2. एक लम्बवृत्तीय बेलन के आधार का क्षेत्रफल 38.5 वर्ग सेमी है। बेलन की ऊँचाई 10 सेमी है, बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय बेलन के आधार का क्षेत्रफल = 38.5 वर्ग सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई = 10 सेमी

अत: बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= 385 \times 10 =$ **385 घन सेमी** **उत्तर**

3. दो समान ऊँचाई के लम्बवृत्तीय बेलनों की आधार त्रिज्याओं में 2 : 3 का अनुपात है। इसके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय बेलनों की ऊँचाइयाँ $h_1 = h_2 = h$ (माना)

तथा त्रिज्याओं में अनुपात = 2 : 3

माना पहले बेलन की त्रिज्या $r_1 = 2r$

तब दूसरे बेलन की त्रिज्या $r_2 = 3r$

अत: पहले बेलन का आयतन $(V_1) = \pi r_1^2 h_1 = \pi (2r)^2 h = 4\pi r^2 h$

तथा दूसरे बेलन का आयतन $(V_2) = \pi r_2^2 h_2 = \pi (3r)^2 h = 9\pi r^2 h$

$\therefore \quad \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4\pi r^2 h}{4\pi r^2 h} = \dfrac{4}{9}$

अत: $V_1 : V_2 = \mathbf{4 : 9}$ **उत्तर**

4. एक बेलन के आधार की त्रिज्या 3 सेमी तथा ऊँचाई 7 सेमी है। इस बेलन का वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए। $\left(\pi=\frac{22}{7}\right.$ लीजिए$\left.\right)$

हल– दिया है—बेलन के आधार की त्रिज्या $(r)=3$ सेमी तथा ऊँचाई $(h)=7$ सेमी

बेलन का वक्र पृष्ठ $=2\pi rh$

$=2\times\frac{22}{7}\times 3\times 7=$ **132 सेमी^{2}** **उत्तर**

5. एक बेलन का आयतन 448π सेमी^{3} तथा ऊँचाई 7 सेमी है। इसका वक्रपृष्ठ व सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—बेलन का आयतन $(V)=448\pi$ सेमी^{3} तथा ऊँचाई $(h)=7$ सेमी

माना बेलन के आधार की त्रिज्या $=r$ सेमी

बेलन का आयतन $=\pi r^2h$

$448\pi=\pi r^2\times 7$ या $448=r^2\times 7$

या $r^2=\frac{448}{7}$ या $r^2=64$

या $r=\sqrt{64}=8$ सेमी

बेलन का वक्र पृष्ठ $=2\pi rh$

$=2\times\frac{22}{7}\times 8\times 7=2\times 22\times 8$

$=$ **352 सेमी^{2}** **उत्तर**

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $=2\pi r(r+h)$

$=2\times\frac{22}{7}\times 8(8+7)$

$=\frac{44\times 8\times 15}{7}=\frac{5280}{7}$

$=$ **754.28 सेमी^{2}** **उत्तर**

6. एक ठोस बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई क्रमशः 4 सेमी और 10 सेमी हैं। उस बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— बेलन की त्रिज्या $(r)=4$ सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई $(h)=10$ सेमी

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $=2\pi r(r+h)$

$=2\times\frac{22}{7}\times 4(4+10)=\frac{44}{7}\times 4\times 14$

$=44\times 4\times 2=$ **352 सेमी^{2}** **उत्तर**

7. एक लम्बवृत्तीय बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ 1540 सेमी^{2} है। इसकी ऊँचाई आधार की त्रिज्या की चार गुनी है। बेलन के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $=1540$ सेमी^{2}

माना बेलन के आधार की त्रिज्या $(r)=x$ सेमी

तब बेलन की ऊँचाई $(h)=4x$ सेमी

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(r+h) = 1540$

या $2\times\frac{22}{7}\times x(x+4x) = 1540$

या $x\times 5x = \frac{1540\times 7}{2\times 22}$ या $5x^2 = \frac{1540\times 7}{22\times 2}$

या $x^2 = \frac{1540\times 7}{5\times 22\times 2}$ या $x^2 = 7\times 7 = 49$

या $x = \sqrt{49} = 7$ सेमी

अतः बेलन के आधार की त्रिज्या $r = x = 7$ सेमी उत्तर

8. एक बेलनाकार बर्तन के आधार की परिधि 132 सेमी और उसकी ऊँचाई 25 सेमी है। इस बर्तन में कितने लीटर पानी आ सकता है? (1000 सेमी^{3} = 1 लीटर)

हल– दिया है—बेलनाकार बर्तन के आधार की परिधि = 132 सेमी तथा ऊँचाई = 25 सेमी

माना बेलनाकार बर्तन के आधार की त्रिज्या = r सेमी

∴ आधार की परिधि $= 2\pi r = 132$

या $2\times\frac{22}{7}\times r = 132$ या $r = \frac{132\times 7}{2\times 22} = 21$ सेमी

बेलनाकार बर्तन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7}\times (21)^2\times 25 = \frac{22}{7}\times 21\times 21\times 25$

$= 34650$ सेमी^{3} $= \frac{34650}{1000}$ लीटर

= 34.65 लीटर उत्तर

9. लकड़ी के एक बेलनाकार पाइप का आंतरिक व्यास 24 सेमी है और बाहरी व्यास 28 सेमी है। इस पाइप की लम्बाई 35 सेमी है। इस पाइप का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए। यदि 1 सेमी^{3} लकड़ी का द्रव्यमान 0.6 ग्राम है।

हल– दिया है—लकड़ी के खोखले बेलनाकार पाइप का आंतरिक व्यास = 24 सेमी

∴ आंतरिक त्रिज्या $r_2 = \frac{24}{2} = 12$ सेमी

तथा बाह्य व्यास = 28 सेमी

∴ बाह्य त्रिज्या $(r_1) = \frac{28}{2} = 14$ सेमी

पाइप की लम्बाई $(h) = 35$ सेमी

खोखले पाइप का आयतन $= \pi h(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$

$= \frac{22}{7}\times 35(14+12)(14-12)$

$= 22\times 5\times 26\times 2 = 5720$ सेमी^{3}

∵ 1 सेमी^{3} लकड़ी का द्रव्यमान = 0.6 ग्राम

∴ 5720 सेमी^{3} लकड़ी का द्रव्यमान $= 5720\times 0.6$ ग्राम $= 3432$ ग्राम

$= \frac{3432}{1000}$ किग्रा **= 3.432 किग्रा** उत्तर

10. एक सोफ्ट ड्रिंक (soft drink) दो प्रकार के पैकों में उपलब्ध—(i) लम्बाई 5 सेमी और चौड़ाई 4 सेमी वाले एक आयताकार आधार का टिन का डिब्बा जिसकी ऊँचाई 15 सेमी है और (ii) व्यास 7 सेमी वाले वृत्तीय आधार और 10 सेमी ऊँचाई वाला एक प्लास्टिक का बेलनाकार डिब्बा। किस डिब्बे की धारिता अधिक है और कितनी अधिक है?

हल– दिया है—आयताकार आधार वाले डिब्बे की लम्बाई $=5$ सेमी

चौड़ाई $=4$ सेमी

तथा ऊँचाई $=15$ सेमी

अतः आयताकार डिब्बे का आयतन $(V_1)=$ लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई

$=15\times4\times15=300$ सेमी^{3}

बेलनाकार डिब्बे के वृत्तीय आधार का व्यास $=7$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r)=\frac{7}{2}$ सेमी तथा ऊँचाई $(h)=10$ सेमी

अतः बेलनाकार डिब्बे का आयतन $(V_2)=\pi r^2h$

$$=\frac{22}{7}\times\left(\frac{7}{2}\right)^2\times10=\frac{22}{7}\times\frac{7\times7}{2\times2}\times10$$

$$=11\times7\times5=385 \text{ सेमी}^3$$

स्पष्ट है, **बेलनाकार डिब्बे का आयतन (धारिता) अधिक है।** **उत्तर**

$$V_2-V_1=385-300=85 \text{ सेमी}^3$$

अतः बेलनाकार डिब्बे की धारिता **85 सेमी^{3}** अधिक है। **उत्तर**

11. यदि एक बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल 94.2 सेमी^{2} है और उसकी ऊँचाई 5 सेमी है, तो ज्ञात कीजिए–

(i) आधार की त्रिज्या (ii) बेलन का आयतन ($\pi=3.14$ लीजिए)

हल– दिया है—बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (वक्र पृष्ठ) $=94.2$ सेमी^{2}

तथा ऊँचाई $(h)=5$ सेमी

माना बेलन की त्रिज्या $=r$ सेमी

(i) हम जानते हैं कि—

बेलन का वक्रपृष्ठ $=2\pi rh$

या $94.2=2\times3.14\times r\times5$

या $r=\frac{94.2}{2\times3.14\times5}=3$ **सेमी** **उत्तर**

(ii) बेलन का आयतन $=\pi r^2h$

$=3.14\times3^2\times5=3.14\times9\times5$

$=$ **141.3 सेमी^{3}** **उत्तर**

12. ऊँचाई 14 सेमी वाले एक लम्बवृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 88 सेमी^{2} है। बेलन के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—बेलन की ऊँचाई $(h)=14$ सेमी

बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $=88$ सेमी^{2}

माना बेलन के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

हम जानते हैं कि—

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

या $$88 = 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 14$$

या $$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22 \times 14} = 1 \text{ सेमी}$$

अतः बेलन के आधार का व्यास $= 2 \times$ त्रिज्या

$= 2 \times 1 = 2$ **सेमी** **उत्तर**

13. धातु की एक चादर से 1 मीटर ऊँची और 140 सेमी व्यास के आधार वाली एक बंद बेलनाकार टंकी बनाई जानी है। इस कार्य के लिए कितने वर्ग मीटर चादर की आवश्यकता होगी?

हल– दिया है—बेलनाकार टंकी की ऊँचाई $(h) = 1$ मीटर

टंकी के आधार का व्यास $(d) = 140$ सेमी $= \frac{140}{100}$ मीटर $= 1.4$ मीटर

अतः टंकी के आधार की त्रिज्या $(r) = \frac{d}{2} = \frac{1.4}{2} = 0.7$ मीटर

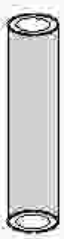
टंकी बनाने में आवश्यक चादर = टंकी का सम्पूर्ण पृष्ठ

$= 2\pi r(r + h) = 2 \times \frac{22}{7} \times 0.7\,(0.7 + 1)$

$= 2 \times 22 \times 0.1 \times 1.7$

$=$ **7.48 वर्ग मीटर** **उत्तर**

14. धातु का एक पाइप 77 सेमी लम्बा है। इसके एक अनुप्रस्थकाट का आन्तरिक व्यास 4 सेमी है और बाहरी व्यास 4.4 सेमी है (देखिए आकृति)। ज्ञात कीजिए–



(i) आन्तरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल– दिया है—धातु के पाइप की लम्बाई $(h) = 77$ सेमी

पाइप की बाहरी त्रिज्या $(r_1) = \frac{4.4}{2}$ सेमी $= 2.2$ सेमी

तथा आन्तरिक त्रिज्या $(r_2) = \frac{4}{2}$ सेमी $= 2$ सेमी

(i) पाइप का आन्तरिक वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r_2 h = 2 \times \frac{22}{7} \times 2 \times 77$

$= 2 \times 22 \times 2 \times 11 =$ **968 सेमी^{2}** **उत्तर**

(ii) पाइप का बाहरी वक्र पृष्ठ $= 2\pi r_1 h = 2 \times \frac{22}{7} \times 2.2 \times 77$

$= 44 \times 2.2 \times 11$

$=$ **1064.8 सेमी^{2}** **उत्तर**

(iii) पाइप के आधारों का क्षेत्रफल = बाहा सिरों का क्षेत्रफल − आन्तरिक सिरों का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r_1^2 - 2\pi r_2^2 = 2\pi(r_1^2 - r_2^2)$$

$$= 2\pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7}(2.2 + 2)(2.2 - 2)$$

$$= \frac{44}{7} \times 4.2 \times 0.2$$

$$= 44 \times 0.6 \times 0.2 = 5.28 \text{ सेमी}^2$$

अतः बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = बाहरी वक्रपृष्ठ + आन्तरिक वक्रपृष्ठ + आधारों का क्षेत्रफल

$$= 1064.8 + 968 + 5.28$$

$$= \mathbf{2038.08 \text{ सेमी}^2}$$ **उत्तर**

15. एक ठोस बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 924 सेमी ^{2} है। इसका वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल का 2/3 भाग है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– माना ठोस बेलन के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

तथा ऊँचाई $= h$ सेमी

ठोस बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ = वक्र पृष्ठ + 2 × आधार का क्षेत्रफल

या $$924 = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

या $$924 = 2\pi r(h + r)$$

या $$2\pi r(h + r) = 924 \quad \ldots(1)$$

ठोस बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

प्रश्नानुसार, $$\frac{\text{वक्र पृष्ठ}}{\text{सम्पूर्ण पृष्ठ}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2\pi rh}{2\pi r(h+r)} = \frac{2}{3} \quad \text{या} \quad \frac{h}{h+r} = \frac{2}{3}$$

या $$3h = 2h + 2r$$

या $$3h - 2h = 2r$$

या $$h = 2r \quad \ldots(2)$$

h का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$2 \times \pi r(2r + r) = 924$$

या $$2\pi r \times 3r = 924 \quad \text{या} \quad 6\pi r^2 = 924$$

या $$6 \times \frac{22}{7} r^2 = 924 \quad \text{या} \quad r^2 = \frac{924 \times 7}{6 \times 22}$$

या $$r^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{49} \Rightarrow r = 7 \text{ सेमी}$$

r का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$h = 2 \times 7 = 14 \text{ सेमी}$$

अतः ठोस बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7^2 \times 14 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 14$$

$$= 22 \times 7 \times 14 = \mathbf{2156 \text{ सेमी}^3}$$ उत्तर

16. 7 सेमी कोर वाली लकड़ी के घन से अधिकतम आयतन का लम्बवृत्तीय बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लकड़ी के घन की कोर = 7 सेमी

इस घन से बनाये गए अधिकतम आयतन वाले लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या $(r) = \frac{7}{2}$ सेमी होगी

तथा ऊँचाई $(h) = 7$ सेमी

अत: बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 7 = \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{2 \times 2} \times 7$$

$$= \frac{11 \times 49}{2} = \frac{539}{2} = \mathbf{269.5 \text{ सेमी}^3}$$ उत्तर

17. एक आयताकार कागज की लम्बाई 22 सेमी तथा चौड़ाई 12 सेमी है। कागज को दो प्रकार से मोड़कर दो बेलनों के वक्रपृष्ठ बनाए जाते हैं। इस प्रकार बने बेलनों के आयतनों का अंतर ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—आयताकार कागज की लम्बाई = 22 सेमी तथा चौड़ाई = 12 सेमी

स्थिति-I : जब कागज की चौड़ाई को बेलन का आधार बनाया जाता है।

तब बेलन की परिधि $(2\pi r) = 12$ (कागज की चौड़ाई)

या $2 \times \frac{22}{7} \times r = 12$ या $r = \frac{7 \times 12}{2 \times 22}$

$$r = \frac{21}{11} \text{ सेमी}$$

तथा बेलन की ऊँचाई (h) = कागज की लम्बाई = 22 सेमी

अत: बेलन का आयतन $(V_1) = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{11}\right)^2 \times 22 = \frac{22}{7} \times \frac{21 \times 21}{11 \times 11} \times 22$$

$$= 2 \times 3 \times 21 \times 2 = \mathbf{252 \text{ सेमी}^3}$$

स्थिति-II : जब कागज की लम्बाई को बेलन का आधार बनाया जाता है।

तब बेलन की परिधि = 22 सेमी या $2\pi r = 22$

या $\frac{2 \times 22}{7} \times r = 22$ या $r = \frac{22 \times 7}{2 \times 22} = \frac{7}{2}$ सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई (h) = कागज की चौड़ाई = 12 सेमी

बेलन का आयतन $(V_2) = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 12 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 12$$

$$= 22 \times 21 \text{ सेमी}^3 = 462 \text{ सेमी}^3$$

अतः बेलनों के आयतनों में अन्तर $= V_2 - V_1 = (462 - 252)$ सेमी^{3}

$= 210$ सेमी^{3} उत्तर

18. एक 42 मीटर लम्बे लोहे के पाइप का बाहरी तथा भीतरी व्यास क्रमशः 8.5 सेमी और 6.5 सेमी है। उसके निर्माण में लगे लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लोहे के पाइप की लम्बाई $(h) = 42$ मीटर $= 4200$ सेमी

पाइप का बाहरी व्यास $= 8.5$ सेमी

$\therefore$ बाहरी त्रिज्या $r_1 = \frac{8.5}{2}$ सेमी

तथा पाइप का भीतरी व्यास $= 6.5$ सेमी

अतः भीतरी त्रिज्या $r_2 = \frac{6.5}{2}$ सेमी

पाइप के निर्माण में लगे लोहे का आयतन = पाइप का बाहरी आयतन − पाइप का भीतरी आयतन

$= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h = \pi h (r_1^2 - r_2^2)$

$= \pi h (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$

$= \frac{22}{7} \times 4200 \left(\frac{8.5}{2} + \frac{6.5}{2}\right)\left(\frac{8.5}{2} - \frac{6.5}{2}\right)$

$= 22 \times 600 \left(\frac{15.0}{2}\right)\left(\frac{2.0}{2}\right)$

$= 22 \times 600 \times \frac{15}{2} \times 1 = 11 \times 600 \times 15$

$= 11 \times 9000 = \mathbf{99000}$ सेमी^{3} उत्तर

19. 10 मीटर गहरे एक बेलनाकार बर्तन के आन्तरिक वक्रपृष्ठ को पेंट कराने का व्यय ₹ 2200 है। यदि पेंट कराने की दर ₹ 20 प्रति वर्ग मीटर^2 है, तो ज्ञात कीजिए—

(i) बर्तन का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) आधार की त्रिज्या

(iii) बर्तन की धारिता

हल– दिया है—बेलनाकार बर्तन की गहराई $(h) = 10$ मीटर

बर्तन के आन्तरिक वक्रपृष्ठ को पेंट कराने का खर्च $=$ ₹ 2200

पेंट कराने की दर $=$ ₹ 20 प्रति वर्ग मीटर

(i) बर्तन का आन्तरिक वक्रपृष्ठ $= \frac{2200}{20} = \mathbf{110}$ मीटर^2 उत्तर

(ii) माना बर्तन के आधार की त्रिज्या $= r$ मीटर है।

तब, बर्तन का आन्तरिक वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh = 110$

या $2 \times \frac{22}{7} \times r \times 10 = 110$

या $r = \frac{110 \times 7}{2 \times 22 \times 10} = \frac{7}{4} = \mathbf{1.75}$ मीटर उत्तर

(iii) बर्तन की धारिता $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 \times 10$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{4 \times 4} \times 10 = 96.25$ मीटर^3

= 96.25 किलो लीटर **उत्तर**

20. ऊँचाई 1 मीटर वाले एक बेलनाकार बर्तन की धारिता 15.4 लीटर है। इसको बनाने के लिए कितने वर्ग मीटर धातु की शीट की आवश्यकता होगी?

हल– दिया है—बेलनाकार बर्तन की ऊँचाई $(h) = 1$ मीटर $= 100$ सेमी

तथा बेलनाकार बर्तन की धारिता $= 15.4$ लीटर $= 15.4 \times 1000$ सेमी^{3} $= 15400$ सेमी^{3}

माना बर्तन के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

तब, बर्तन की धारिता $= \pi r^2 h = 15400$

या $\frac{22}{7} \times r^2 \times 100 = 15400$

या $r^2 = \frac{15400 \times 7}{22 \times 100}$

या $r^2 = 49$

या $r = \sqrt{49} = 7$ सेमी

बेलनाकार बर्तन को बनाने में आवश्यक धातु की शीट = बर्तन का सम्पूर्ण पृष्ठ

$= 2\pi r(h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(100 + 7) = 44 \times 107$

$= 4708$ सेमी^{2}

$= \frac{4708}{1000}$ मीटर^2 $=$ **0.4708 मीटर^2** **उत्तर**

21. सीसे की एक पेंसिल (lead pencil) लकड़ी के एक बेलन के अभ्यंतर में ग्रेफाइट (graphite) से बने ठोस बेलन को डाल कर बनाई गई है। पेंसिल का व्यास 7 मिमी है और ग्रेफाइट का व्यास 1 मिमी है। यदि पेंसिल की लम्बाई 14 सेमी है, तो लकड़ी का आयतन और ग्रेफाइट का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार, पेंसिल के अभ्यंतर बेलनाकार ग्रेफाइट का व्यास $= 1$ मिमी

$\therefore$ ग्रेफाइट की त्रिज्या $(r_1) = \frac{1}{2}$ मिमी $= \frac{1}{2 \times 10}$ सेमी $= \frac{1}{20}$ सेमी

ग्रेफाइट की ऊँचाई (h) = पेंसिल की लम्बाई

$= 14$ सेमी

अतः ग्रेफाइट का आयतन $= \pi r_1^2 h = \frac{22}{7} \times \left(\frac{1}{20}\right)^2 \times 14$

$= \frac{22}{7} \times \frac{1}{400} \times 14 = \frac{11}{100}$ सेमी^{3} $= 0.11$ सेमी^{3}

पेंसिल का व्यास $= 7$ मिमी

$\therefore$ पेंसिल की त्रिज्या $(r_2) = \frac{7}{2}$ मिमी $= \frac{7}{2 \times 10}$ सेमी $= \frac{7}{20}$ सेमी

पेंसिल का आयतन $= \pi r_2^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{20}\right)^2 \times 14$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{20 \times 20} \times 14 = \frac{11 \times 7 \times 7}{100}$$

$$= \frac{539}{100} = \mathbf{5.39 \text{ सेमी}^3}$$ **उत्तर**

22. एक अस्पताल (hospital) के एक रोगी को प्रतिदिन 7 सेमी व्यास वाले एक बेलनाकार कटोरे में सूप (soup) दिया जाता है। यदि वह कटोरा सूप से 4 सेमी ऊँचाई तक भरा जाता है, तो इस अस्पताल में 250 रोगियों के लिए प्रतिदिन कितना सूप तैयार किया जाता है?

हल– दिया है—बेलनाकार कटोरे का व्यास = 7 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{7}{2}$ सेमी

कटोरे मे सूप की ऊँचाई $(h) = 4$ सेमी

$\therefore$ 1 कटोरे में दिए गए सूप का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 4 = \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{2 \times 2} \times 4$$

$$= 154 \text{ सेमी}^3$$

$\therefore$ 250 कटोरों मे दिए गए सूप का आयतन $= 250 \times 154 \text{ सेमी}^3$

$$= 38500 \text{ सेमी}^3$$

या $= \frac{38500}{1000}$ लीटर $= \mathbf{38.5 \text{ लीटर}}$ **उत्तर**

23. एक रोलर (roller) का व्यास 84 सेमी है और लम्बाई 120 सेमी है। एक खेल के मैदान को एक बार समतल करने के लिए रोलर को 500 चक्कर लगाने पड़ते हैं। खेल के मैदान का मीटर^2 में क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—रोलर का व्यास = 84 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{84}{2} = 42$ सेमी $= 0.42$ मीटर

रोलर की लम्बाई $(h) = 120$ सेमी $= 1.2$ मीटर

रोलर का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.42 \times 1.2$$

$$= 44 \times 0.06 \times 1.2 = 3.168 \text{ मीटर}^2$$

अत: रोलर द्वारा 1 चक्कर में समतल किया गया मैदान $= 3.168$ मीटर^2

$\therefore$ रोलर द्वारा 500 चक्कर में समतल किया गया मैदान $= 3.168 \times 500$

$$= 1584.00 \text{ मीटर}^2$$

$$= \mathbf{1584 \text{ मीटर}^2}$$ **उत्तर**

24. किसी बेलनाकार स्तम्भ का व्यास 50 सेमी है और ऊँचाई 3.5 मीटर है। ₹ 12.50 प्रति मीटर^2 की दर से इस स्तम्भ के वक्रपृष्ठ पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—बेलनाकार स्तम्भ का व्यास $= 50$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{50}{2} = 25$ सेमी $= \frac{25}{100}$ मीटर $= 0.25$ मीटर

तथा बेलनाकार स्तम्भ की ऊँचाई $(h) = 3.5$ मीटर

बेलनाकार स्तम्भ का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.25 \times 3.5$$

$$= 44 \times 0.25 \times 0.5 = 5.5 \text{ मीटर}^2$$

अतः ₹ 12.50 प्रति मीटर^2 की दर से स्तम्भ पर पेंट कराने का व्यय $= 5.5 \times 12.5$

$= ₹ 68.75$ **उत्तर**

25. एक लम्ववृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4.4 मीटर^2 है। यदि बेलन के आधार की त्रिज्या 0.7 मीटर है, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्ववृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठ $= 4.4$ मीटर^2

बेलन के आधार की त्रिज्या $(r) = 0.7$ मीटर

माना बेलन की ऊँचाई $= h$ मीटर

$\therefore$ बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh = 4.4$

या $2 \times \frac{22}{7} \times 0.7 \times h = 4.4$

या $4.4h = 4.4$

या $h = \frac{4.4}{4.4} = 1$ **मीटर** **उत्तर**

26. किसी वृत्ताकार कुएँ का आन्तरिक व्यास 3.5 मीटर है और यह 10 मीटर गहरा है। ज्ञात कीजिए—

(i) आन्तरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

(ii) ₹ 40 प्रति मीटर^2 की दर से इसके वक्रपृष्ठ पर प्लास्टर कराने का व्यय।

हल– दिया है—कुएँ का आन्तरिक व्यास $= 3.5$ मीटर

$\therefore$ आन्तरिक त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ मीटर

कुएँ की गहराई $(h) = 10$ मीटर

(i) कुएँ का आन्तरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 10$$

$$= 22 \times 5 = \mathbf{110 \text{ मीटर}^2}$$ **उत्तर**

(ii) ₹ 40 प्रति मीटर^2 की दर से कुएँ के आन्तरिक वक्र पृष्ठ पर प्लास्टर कराने का व्यय

$= 110 \times 40 = ₹ 4400$ **उत्तर**

27. गरम पानी रखने वाले एक संयत्र में 28 मीटर लम्बाई और 5 सेमी व्यास वाला एक बेलनाकार पाइप है। इस संयंत्र में गर्मी देने वाला कुल कितना पृष्ठ है?

हल– दिया है—बेलनाकार पाइप की लम्बाई $(h) = 28$ मीटर

तथा पाइप का व्यास $= 5$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{5}{2}$ सेमी $= \frac{5}{2\times 100}$ मीटर

बेलनाकार पाइप का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

$= 2\times \frac{22}{7}\times \frac{5}{2\times 100}\times 28$

$= \frac{22\times 5\times 4}{100} = \frac{440}{100} = 4.4$ मीटर^2

अत: संयंत्र में गर्मी देने वाला कुल पृष्ठ $= 4.4$ मीटर^2 है। उत्तर

28. 14.85 किग्रा धातु से 6 मिमी व्यास का कितना लम्बा तार बन सकता है, जबकि 1 घन सेमी धातु की संहति 7.5 ग्राम है?

हल– दिया है—7.5 ग्राम धातु $= 1$ घन सेमी

$\therefore 1$ ग्राम धातु $= \frac{1}{7.5}$ घन सेमी

$\therefore 14.85$ किग्रा $= 14850$ ग्राम धातु $= \frac{1}{7.5}\times 14850 = 1980$ घन सेमी

तार का व्यास $= 6$ मिमी $= \frac{6}{10}$ सेमी $= 0.6$ सेमी

$\therefore$ तार की त्रिज्या $(r) = \frac{0.6}{2} = 0.3$ सेमी

माना तार की लम्बाई $= h$ सेमी

अत: तार का आयतन $= \pi r^2 h = 1980$

या $\frac{22}{7}\times (0.3)^2 \times h = 1980$ या $\frac{22}{7}\times 0.09\times h = 1980$

या $h = \frac{1980\times 7}{22\times 0.09} = \frac{90\times 7}{0.09} = \frac{9000\times 7}{9}$

$= 7000$ सेमी $= \frac{7000}{100}$ मीटर $= 70$ मीटर

अत: धातु से बनने वाले तार की लम्बाई 70 मीटर है। उत्तर

29. यदि 2 सेमी आन्तरिक व्यास के वृत्ताकार नल से जल 6 मीटर/सेकंड की दर से 60 सेमी आधार त्रिज्या के एक बेलनाकार टैंक में प्रवाहित हो रहा है। ज्ञात कीजिए 30 मिनट में टैंक की कितनी ऊँचाई तक जल भरा जाएगा।

हल– नल का व्यास $= 2$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{2}{2} = 1$ सेमी

नल से प्रति सेकण्ड प्रवाहित जल $= 6$ मीटर $= (h) = 600$ सेमी

अत: नल से प्रति सेकण्ड प्रवाहित जल का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7}\times (1)^2 \times 600 = \frac{13200}{7}$ घन सेमी

$\because$ 1 मिनट में प्रवाहित जल $= \frac{13200\times 60}{7}$ घन सेमी

तथा 30 मिनट में प्रवाहित जल $= \frac{13200\times 60\times 30}{2}$ घन सेमी

बेलनाकार टैंक के आधार की त्रिज्या $(R) = 60$ सेमी

माना टैंक में जल की ऊँचाई $= H$

तब टैंक में जल का आयतन = 30 मिनट में नल से प्रवाहित जल

$$\pi R^2 H = \frac{13200\times 60\times 30}{7}$$

या $$\frac{22}{7}(60)^2 \times H = \frac{13200\times 60\times 30}{7}$$

या $$\frac{22\times 60\times 60}{7}\times H = \frac{13200\times 60\times 30}{7}$$

या $$H = \frac{13200\times 60\times 30\times 7}{22\times 60\times 60\times 7} = 300 \text{ सेमी}$$

$$= \frac{300}{100} \text{ मीटर} = 3 \text{ मीटर}$$

अतः **टैंक में जल 3 मीटर ऊँचाई तक भरा जायेगा।** उत्तर

30. 8 सेमी ऊँचे ताँबे के खोखले बेलन को गलाकर 9 सेमी ऊँचा एक ठोस बेलन बनाया जाता है। यदि खोखले बेलन की बाह्य व अंतः त्रिज्याएँ क्रमशः 2 सेमी और 1 सेमी हों, तो ठोस बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—खोखले बेलन की ऊँचाई $(h_1) = 8$ सेमी

खोखले बेलन की बाह्य त्रिज्या $r_1 = 2$ सेमी

तथा अंतः त्रिज्या $r_2 = 1$ सेमी

अतः खोखले बेलन में प्रयुक्त धातु का आयतन $= \pi h_1 (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$

$$= \frac{22}{7}\times 8(2+1)(2-1)$$

$$= \frac{22}{7}\times 8\times 3\times 1 = \frac{22\times 24}{7} \text{ सेमी}^3$$

खोखले बेलन को गलाकर बनाये गए ठोस बेलन की ऊँचाई $(h_2) = 2$ सेमी

माना ठोस बेलन की त्रिज्या $= r_2$ सेमी

अतः ठोस बेलन का आयतन = खोखले बेलन में प्रयुक्त धातु का आयतन

$$\pi r_2^2 h_2 = \frac{22\times 24}{7}$$

या $$\frac{22}{7}\times r_2^2 \times 9 = \frac{22\times 24}{7}$$

या $$r_2^2 = \frac{22\times 24\times 7}{22\times 9\times 7}$$ या $$r_2^2 = \frac{24}{9}$$

या $$r_2 = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ सेमी}$$ उत्तर

31. यदि एक लम्बवृत्तीय बेलन का व्यास 5% कम कर दिया जाए तो उसकी ऊँचाई में कितने प्रतिशत वृद्धि हो जाएगी, जबकि उसके आयतन में कोई परिवर्तन न हो।

हल– माना बेलन की प्रारम्भिक ऊँचाई $= h$ मात्रक

तथा प्रारम्भिक व्यास $= x$ मात्रक

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{x}{2}$ मात्रक

$\therefore$ बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \times h = \frac{\pi x h}{4}$ घन मात्रक

अब बेलन के व्यास में कमी = प्रारम्भिक व्यास का 5%

$= x$ का $5\% = \frac{x \times 5}{100} = \frac{x}{20}$

अतः बेलन का नया व्यास $= x - \frac{x}{20} = \frac{19}{20}x$

अतः बेलन की नई त्रिज्या $(r) = \frac{19x}{20 \times 2} = \frac{19x}{40}$ मात्रक

माना बेलन की नई ऊँचाई $= H$ मात्रक

अब बेलन का आयतन $= \pi r^2 H = \pi\left(\frac{19x}{40}\right)^2 H$

प्रश्नानुसार, बेलन का अन्तिम आयतन = बेलन का प्रारम्भिक आयतन

$$\pi\left(\frac{19x}{40}\right)^2 \times H = \frac{\pi x^2 \times h}{4}$$

या $$\frac{\pi \times 361x^2}{1600} H = \frac{\pi x^2 h}{4}$$

या $$H = \frac{\pi x^2 h \times 1600}{\pi \times 361 \times x^2 \times 4}$$

या $$H = \frac{400h}{361}$$

अतः बेलन की ऊँचाई में वृद्धि $= \frac{400h}{361} - h$

$= \frac{400h - 361h}{361} = \frac{39h}{361}$

अतः बेलन की ऊँचाई में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{\frac{39h}{361}}{h} \times 100\%$

$= \frac{3900}{361}\% = \mathbf{10.8\%}$ **उत्तर**

32. 10 मीटर आन्तरिक व्यास का 14 मीटर गहरा कुआँ खोदकर उसकी मिट्टी कुएँ के चारों ओर 5 मीटर की चौड़ाई तक समान रूप से फैलाकर एक चबूतरा बनाया गया है। चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—कुएँ का आन्तरिक व्यास = 10 मीटर

$\therefore$ कुएँ की आन्तरिक त्रिज्या $(r) = \frac{10}{2} = 5$ मीटर

कुएँ की गहराई $(h) = 14$ मीटर

कुएँ से निकली मिट्टी का आयतन = कुएँ का आन्तरिक आयतन

$$= \pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} \times (5)^2 \times 14 = 22 \times 25 \times 2$$

$$= 1100 \text{ मीटर}^3$$

कुएँ के चारों ओर बनाए गए चबूतरे की चौड़ाई = 5 मीटर

इस प्रकार बने वृत्तीय चबूतरे की आन्तरिक त्रिज्याएँ = कुएँ की त्रिज्या

$$r = 5 \text{ मीटर}$$

तथा चबूतरे की बाह्य त्रिज्या $r_1 = r + 5$

$$= 5 + 5 = 10 \text{ मीटर}$$

माना चबूतरे की ऊँचाई $= h$ मीटर

चबूतरे का आयतन $= \pi h (r_1 + r)(r_1 - r)$

$$= \pi h (10 + 5)(10 - 5)$$

$$= \pi h \times 15 \times 5 = 75\pi h$$

परन्तु, चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकली मिट्टी का आयतन

या $75\pi h = 1100$

या $75 \times \frac{22}{7} \times h = 1100$

या $h = \frac{1100 \times 7}{22 \times 75} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ **मीटर** **उत्तर**

33. ज्ञात कीजिए—

(i) एक बेलनाकार पेट्रोल की बंद टंकी का पार्श्व या वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल, जिसका व्यास 4.2 मीटर है और ऊँचाई 4.5 मीटर है।

(ii) इस टंकी को बनाने में कुल कितना इस्पात (steel) लगा होगा, यदि कुल इस्पात का $\frac{1}{12}$ भाग बनाने में नष्ट हो गया है?

हल– दिया है—बेलनाकार पैट्रोल टंकी का व्यास = 4.2 मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{4.2}{2} = 21$ मीटर

तथा ऊँचाई $(h) = 4.5$ मीटर

(i) टंकी का पार्श्व या वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 4.5 = 44 \times 0.3 \times 4.5$$

$$= \mathbf{59.4 \text{ मीटर}^2}$$ **उत्तर**

(ii) टंकी का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(h + r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 (4.5 + 2.1)$$

$$= 44 \times 0.3 \times 6.6 = 87.12 \text{ मीटर}^2$$

माना टंकी बनाने में लगे इस्पात की कुल मात्रा $= x$ मीटर^2

अतः नष्ट हुए इस्पात की मात्रा $= x$ का $\frac{1}{12} = x \times \frac{1}{12} = \frac{x}{12}$

टंकी में लगा शुद्ध इस्पात = टंकी का सम्पूर्ण पृष्ठ

या $$x - \frac{x}{12} = 87.12$$

या $$\frac{12x - x}{12} = 87.12 \quad \text{या} \quad \frac{11x}{12} = 87.12$$

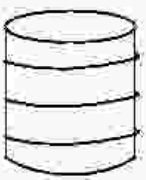
या $$x = \frac{87.12 \times 12}{11}$$

या $$x = \frac{1045.44}{11}$$

या $$x = 95.04 \text{ मीटर}^2$$

अतः **टंकी बनाने में कुल 95.04 मीटर^2 इस्पात लगा।** उत्तर

34. आकृति में, आप एक लैंपशेड का फ्रेम देख रहे हैं। इसे एक सजावटी कपड़े से ढका जाना है। इस फ्रेम के आधार का व्यास 20 सेमी है और ऊँचाई 30 सेमी है। फ्रेम के ऊपर और नीचे मोड़ने के लिए दोनों ओर 2.5 सेमी अतिरिक्त कपड़ा भी छोड़ा जाना है। ज्ञात कीजिए कि लैंपशेड को ढकने के लिए कुल कितने कपड़े की आवश्यकता होगी।



हल– दिया है— लैंपशेड का व्यास $= 20$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{20}{2} = 10$ सेमी

तथा लैंपशेड की ऊँचाई $= 30$ सेमी

$\because$ लैंपशेड को ढकने के लिए ऊपर व नीचे दोनों ओर 2.5 सेमी कपड़ा मोड़ने के लिए छोड़ा जाता है।

$\therefore$ लैंपशेड को ढकने के लिए आवश्यक लम्बवृत्तीय कपड़े की ऊँचाई

$$h = 30 + 2.5 + 2.5 = 35 \text{ सेमी}$$

अतः लैंपशेड के फ्रेम को ढकने के लिए आवश्यक कपड़ा $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 35$$

$$= 44 \times 10 \times 5$$

$$= \mathbf{2200 \text{ सेमी}^2}$$ उत्तर

35. किसी विद्यालय के विद्यार्थियों से एक आधार वाले बेलनाकार कलमदानों को गत्ते से बनाने और सजाने की प्रतियोगिता में भाग लेने के लिए कहा गया। प्रत्येक कलमदान को 3 सेमी त्रिज्या और 10.5 सेमी ऊँचाई का होना था। विद्यालय को इसके लिए

प्रतिभागियों को गत्ता देना था। यदि इसमें 35 प्रतिभागी थे, तो विद्यालय को कितना गत्ता खरीदना पड़ा होगा?

हल– दिया है—बेलनाकार कमलदान की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 10.5$ सेमी

अत: एक आधार वाले कमलदान में लगा गत्ता = वक्र पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + \pi r^2$$

$$= \pi r(2h + r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 3\,(2 \times 10.5 + 3)$$

$$= \frac{22}{7} \times 3\,(21 + 3) = \frac{22}{7} \times 3 \times 24 \text{ सेमी}^2$$

$\therefore$ 35 कमलदानों के लिए आवश्यक गत्ता $= \frac{22}{7} \times 3 \times 24 \times 35$

$$= 22 \times 3 \times 24 \times 5 = 7920 \text{ सेमी}^2$$

अत: विद्यालय को कुल **7920 सेमी^{2}** गत्ता खरीदना पड़ा होगा। **उत्तर**

36. 4 मिलीमीटर व्यास का ताँबे का तार, 20 सेमी व्यास के 24 सेमी लंबे बेलन पर सर्वत्र एक विधि से लपेटा जाता है, जिससे सम्पूर्ण वक्र पृष्ठ ढक जाए। तार की लम्बाई व उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—ताँबे के तार का व्यास $= 4$ मिलीमीटर $= \frac{4}{10}$ सेमी $= 0.4$ सेमी

बेलन का व्यास $= 20$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(R) = \frac{20}{2} = 10$ सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई (लम्बाई) $h = 24$ सेमी

बेलन पर लपेटे गए तार के फेरों की संख्या $= \frac{\text{बेलन की लम्बाई}}{\text{तार का व्यास}} = \frac{24}{0.4}$

$$= \frac{240}{4} = 60 \text{ फेरे}$$

एक फेरे में लगे तार की लम्बाई = बेलन की परिधि

$$= 2\pi r = 2 \times \pi \times 10 = 20\pi \text{ सेमी}$$

$\therefore$ 60 फेरों में लगे तार की लम्बाई $= 60 \times 20\pi$

$$(l) = 1200\pi \text{ सेमी}$$ **उत्तर**

तार का आयतन $= \pi r^2 l = \pi (0.2)^2 \times 1200\pi$

$$= 0.04 \times 1200\pi^2 = 48.00\pi^2$$

$$= 48\pi^2 \text{ सेमी}^3$$ **उत्तर**

37. किसी खोखले बेलन का व्यास 14 सेमी है, उसमें कुछ पानी है। अब इसमें लोहे का एक घनाकार पिंड डुबाया जाता है। यदि पानी की गहराई $8\frac{9}{14}$ सेमी बढ़ जाती है, तो घन की कोर की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना घन की कोर की लम्बाई $= x$ सेमी

$\therefore$ घन का आयतन $= x \times x \times x = x^3$ सेमी^{3}

खोखले बेलन का व्यास $= 14$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{14}{2} = 7$ सेमी

घन को खोखले बेलन में डालने पर जल तल की बढ़ी ऊँचाई $(h) = 8\frac{9}{14}$ सेमी

अत: ऊपर उठे जल का आयतन = घन का आयतन

$$\pi r^2 h = x^3$$

या $$\frac{22}{7} \times (7)^2 \times 8\frac{9}{14} = x^3$$

या $$x^3 = \frac{22}{7} \times 49 \times \frac{121}{14}$$

या $$x^3 = 11 \times 121$$

या $$x^3 = 11 \times 11 \times 11$$

या $$x^3 = 11^3$$

या $$x = \sqrt[3]{11^3} = \mathbf{11}$$ सेमी उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट– बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 324 का अवलोकन कीजिए।

■□■

16

लम्बवृत्तीय शंकु
(Right Circular Cone)

अभ्यास 16.1

1. उस लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी
(i) त्रिज्या 6 सेमी और ऊँचाई 7 सेमी है। (ii) त्रिज्या 3.5 सेमी और ऊँचाई 12 सेमी है।

हल– (i) दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या $(r) = 6$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 7$ सेमी

अत: शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (6)^2 \times 7 = \frac{1 \times 22 \times 36 \times 7}{3 \times 7}$$

$$= 22 \times 12 = \mathbf{264 \text{ सेमी}^3}$$ **उत्तर**

(ii) दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या $(r) = 3.5$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

अत: शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 12$$

$$= \frac{22 \times 3.5 \times 3.5 \times 12}{3 \times 7}$$

$$= 22 \times 0.5 \times 3.5 \times 4 = \mathbf{154 \text{ सेमी}^3}$$ **उत्तर**

2. शंकु के आकार के उस बर्तन की लीटरों में धारिता ज्ञात कीजिए जिसकी—
(i) त्रिज्या 7 सेमी और तिर्यक ऊँचाई 25 सेमी है। (ii) ऊँचाई 12 सेमी और तिर्यक ऊँचाई 13 सेमी है।

हल– (i) दिया है—शंकु के आधार की त्रिज्या $(r) = 7$ सेमी

तथा तिर्यक ऊँचाई $(l) = 25$ सेमी

∴सूत्र— $l^2 = h^2 + r^2$ से,

$25^2 = h^2 + 7^2$ या $625 = h^2 + 49$

या $h^2 = 625 - 49 = 576$

या $h = \sqrt{576} = 24$ सेमी

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 24$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$$

$$= 22 \times 7 \times 8 = 1232 \text{ सेमी}^3$$

$$= \frac{1232}{1000} \text{ लीटर} = \mathbf{1.232 \text{ लीटर}}$$ उत्तर

(ii) दिया है— शंकु की ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

तथा तिर्यक ऊँचाई $(l) = 13$ सेमी

∴सूत्र— $l^2 = h^2 + r^2$ से,

शंकु की त्रिज्या $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{13^2 - 12^2}$

या $r = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25}$

या $r = 5$ सेमी

शंक्वाकार बर्तन का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (5)^2 \times 12$$

$$= \frac{22 \times 5 \times 5 \times 12}{3 \times 7} = \frac{2200}{7} \text{ सेमी}^3$$

$$= \frac{2200}{7 \times 1000} \text{ लीटर} = \frac{11}{35} \text{ लीटर}$$ उत्तर

3. एक शंकु की ऊँचाई 15 सेमी है। यदि इसका आयतन 1570 सेमी^{3} है, तो इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए।)

हल– दिया है—शंकु की ऊँचाई $(h) = 15$ सेमी

तथा शंकु का आयतन $= 1570$ सेमी^{3}

माना शंकु के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

∴ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = 1570$

या $\frac{1}{3} \times 3.14 \times r^2 \times 15 = 1570$

या $r^2 = \frac{1570 \times 3}{3.14 \times 15} = \frac{1570}{15.7}$

या $r^2 = 100 \Rightarrow r = \sqrt{100} = \mathbf{10 \text{ सेमी}}$ उत्तर

4. यदि 9 सेमी ऊँचाई वाले एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन 48π सेमी^{3} है, तो इसके आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई $(h) = 9$ सेमी

तथा आयतन $= 48\pi$ सेमी^{3}

माना शंकु के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

∴सूत्र—शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ से,

$$48\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 \times 9$$

या $48\pi = \pi r^2 \times 3$

या $r^2 = \frac{48\pi}{3\pi}$ या $r^2 = 16$

या $r = \sqrt{16} = 4$ सेमी

शंकु के आधार का व्यास $= 2r = 2 \times 4 = 8$ सेमी उत्तर

5. ऊपरी व्यास 3.5 मीटर वाले शंकु के आकार का एक गड्ढा 12 मीटर गहरा है। इसकी धारिता किलोलीटर में कितनी है?

हल– दिया है—शंक्वाकार गड्ढे का ऊपरी व्यास $= 3.5$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ मीटर

गड्ढे की गहराई $(h) = 12$ मीटर

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \times 12$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5}{2 \times 2} \times 12$

$= 22 \times 3.5 \times 0.5 = 38.5$ मीटर^3

$= 38.5$ किलोलीटर उत्तर

6. एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन 9856 सेमी^{3} है। यदि इसके आधार का व्यास 28 सेमी है, तो ज्ञात कीजिए–

(i) शंकु की ऊँचाई (ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई (iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन $= 9856$

तथा आधार का व्यास $= 28$ सेमी

$\therefore$ आधार की त्रिज्या $(r) = \frac{28}{2} = 14$ सेमी

माना शंकु की ऊँचाई तथा तिर्यक ऊँचाई क्रमशः h व l हैं।

(i) सूत्र—शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ से,

$9856 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} (14)^2 \times h$

या $9856 = \frac{22 \times 14 \times 14 \times h}{3 \times 7}$

या $9856 = \frac{22 \times 2 \times 14}{3} \times h$

या $h = \frac{9856 \times 3}{22 \times 2 \times 14}$

या $h = 48$ सेमी उत्तर

(ii) सूत्र— $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ से,

$$l = \sqrt{14^2 + 48^2} = \sqrt{196 + 2304}$$
$$= \sqrt{2500} = 50 \text{ सेमी}$$ उत्तर

(iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 50 = 22 \times 2 \times 50$$
$$= 2200 \text{ सेमी}^2$$ उत्तर

7. उस शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 5 सेमी और ऊँचाई 12 सेमी है।

हल– दिया है—शंकु की त्रिज्या $(r) = 5$ सेमी तथा ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

$\therefore$ सूत्र— $l^2 = r^2 + h^2$ से,

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ सेमी}$$ उत्तर

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$$= \pi \times 5 \times 13 = 65\pi \text{ सेमी}^2$$ उत्तर

8. एक लम्बवृत्तीय शंकु की आधार त्रिज्या तथा वक्र पृष्ठ क्रमशः 3 सेमी तथा 15π सेमी^{2} है। शंकु की तिर्यक ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी

तथा वक्र पृष्ठ $= 15\pi$ सेमी^{2}

$\therefore$ सूत्र—शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi rl$ से,

$$15\pi = \pi \times 3 \times l$$

या $$l = \frac{15\pi}{3\pi} = 5 \text{ सेमी}$$ उत्तर

9. एक लम्बवृत्तीय शंकु की आधार त्रिज्या 3 सेमी तथा ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 4 सेमी है। शंकु का वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंकु की आधार त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी

तथा ऊर्ध्वाधर ऊँचाई $(h) = 4$ सेमी

$\therefore$ सूत्र— $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ से,

$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ सेमी}$$

शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi rl$

$$= \pi \times 3 \times 5 = 15\pi \text{ सेमी}^2$$ उत्तर

10. एक लम्बवृत्तीय शंकु के आधार की परिधि 44 सेमी है। उसकी ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 24 सेमी है। उसकी तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु के आधार की परिधि $= 2\pi r = 44$ सेमी

या $$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$$

या $$r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7 \text{ सेमी}$$

तथा ऊँचाई $(h) = 24$ सेमी

$\therefore$ सूत्र— $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ से,

$= \sqrt{7^2 + 24^2}$

$= \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$ सेमी **उत्तर**

11. एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 सेमी है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 10 सेमी है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंकु के आधार का व्यास $= 10.5$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{10.5}{2}$ सेमी

तिर्यक ऊँचाई $(l) = 10$ सेमी

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{2} \times 10$

$= 11 \times 1.5 \times 10$

$= \mathbf{165}$ सेमी^{2} **उत्तर**

12. एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 21 मीटर है और आधार का व्यास 24 मीटर है।

हल– दिया है—शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(l) = 21$ मीटर

तथा आधार का व्यास $= 24$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{24}{2} = 12$ मीटर

शंकु का कुल पृष्ठ $= \pi r(r + l)$

$= \frac{22}{7} \times 12(12 + 21)$

$= \frac{22}{7} \times 12 \times 33$

$= \frac{8712}{7} = \mathbf{1244.57}$ मीटर^2 **उत्तर**

13. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 सेमी^{2} है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 14 सेमी है। ज्ञात कीजिए–

(i) आधार की त्रिज्या (ii) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल– दिया है—शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 308$ सेमी^{2}

तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(l) = 14$ सेमी

माना शंकु के आधार की त्रिज्या $= r$

(i) शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

या $308 = \frac{22}{7} \times r \times 14$

या $r = \frac{308 \times 7}{22 \times 14} = \mathbf{7}$ सेमी **उत्तर**

(ii) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(r+l)$

$= \frac{22}{7} \times 7(7+14)$

$= 22 \times 21 = \mathbf{462}$ सेमी^{2} उत्तर

14. शंकु के आकार का एक तम्बू 10 मीटर ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 24 मीटर है। ज्ञात कीजिए–

(i) तम्बू की तिर्यक ऊँचाई

(ii) तम्बू में लगे कैनवास (canvas) की लागत, यदि 1 मीटर^2 कैनवास की लागत ₹ 70 है।

हल– दिया है—शंक्वाकार तम्बू की ऊँचाई $(h) = 10$ मीटर

तथा आधार की त्रिज्या $(r) = 24$ मीटर

माना तम्बू की तिर्यक ऊँचाई $= l$

(i) सूत्र— $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ से,

$l = \sqrt{24^2 + 10^2}$

$= \sqrt{576+100} = \sqrt{676} = \mathbf{26}$ मीटर उत्तर

(ii) तम्बू में लगा कैनवास = तम्बू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 26$ मीटर^2

₹ 70 प्रति मीटर^2 की दर से तम्बू में लगे कैनवास की लागत

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 26 \times 70 = ₹\,\mathbf{137280}$ उत्तर

15. 8 मीटर ऊँचाई और आधार की त्रिज्या 6 मीटर वाले एक शंकु के आकार का तम्बू बनाने में 3 मीटर चौड़े तिरपाल की कितनी लम्बाई लगेगी? यह मान कर चलिए कि इसकी सिलाई और कटाई में 20 सेमी तिरपाल अतिरिक्त लगेगा ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल– दिया है—शंक्वाकार तम्बू की ऊँचाई $(h) = 8$ मीटर

तथा आधार की त्रिज्या $(r) = 6$ मीटर

$\therefore$ तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ सूत्र से,

$l = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36+64}$

$= \sqrt{100} = 10$ मीटर

तम्बू बनाने में आवश्यक तिरपाल = तम्बू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi r l$

$= 3.14 \times 6 \times 10 = 1884$ मीटर

तिरपाल की चौड़ाई $= 3$ मीटर

माना तिरपाल की लम्बाई $= x$ मीटर

तिरपाल का क्षेत्रफल = तम्बू बनाने में आवश्यक तिरपाल

ल० × चौ० $= 1884$

या $x \times 3 = 188.4 \quad \Rightarrow x = \frac{188.4}{3} = 62.8$

या $x = 62.8$ मीटर

कटाई व सिलाई में लगी अतिरिक्त तिरपाल की लम्बाई $= 20$ सेमी $= 0.2$ मीटर

अतः आवश्यक तिरपाल की लम्बाई $= 62.8 + 0.2 = \mathbf{63.0}$ **मीटर** **उत्तर**

16. शंकु के आकार की एक गुंबज की तिर्यक ऊंचाई और आधार व्यास क्रमश 25 मीटर और 14 मीटर हैं। इसके वक्रपृष्ठ पर ₹ 210 प्रति 100 मीटर^2 की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंक्वाकार गुंबज की तिर्यक ऊँचाई $(l) = 25$ मीटर

तथा आधार का व्यास $= 14$ मीटर

$\therefore$ आधार की त्रिज्या $= \frac{14}{2} = 7$ मीटर

गुंबज का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550$ मीटर^2

सफेदी की दर $=$ ₹ 210 प्रति 100 मीटर^2

$= ₹ \frac{210}{100}$ प्रति मीटर^2 $=$ ₹ 2.1 प्रति मीटर^2

$\therefore$ गुंबज पर सफेदी कराने का व्यय $=$ ₹ $550 \times 2.10 =$ ₹ **1155.00** उत्तर

17. उस बड़े-से-बड़े शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, जो एक 18 सेमी भुजा के घन से काटा जाता है।

हल– दिया है—घन की भुजा $= 18$ सेमी

अतः 18 सेमी भुजा वाले घन से काटे गए बड़े-से-बड़े शंकु की ऊँचाई $(h) = 18$ सेमी तथा आधार का व्यास $= 18$ सेमी होगा।

$\therefore$ काटे गए शंकु के आधार की त्रिज्या $= \frac{18}{2} = 9$ सेमी

अतः घन से काटे गए शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (9)^2 \times 18$

$= \frac{22 \times 81 \times 18}{21} = \mathbf{1527.43}$ **सेमी**^{3} **उत्तर**

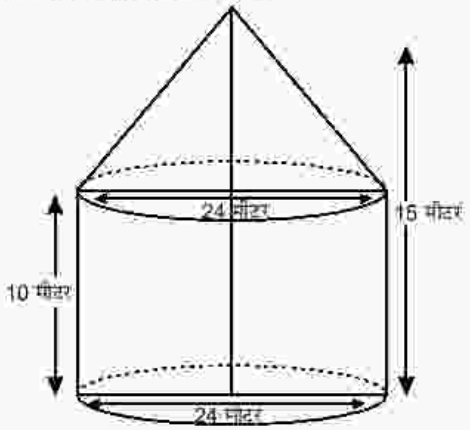
18. एक कैनवास के टेंट का शीर्ष ऊपर से शंक्वाकार तथा नीचे से लम्ववृत्तीय बेलन के रूप का है। यदि आधार का व्यास 24 मीटर तथा सम्पूर्ण ऊंचाई 15 मीटर है तो टेंट में कितने वर्ग मीटर कैनवास की आवश्यकता होगी, जबकि टेंट के बेलनाकार भाग की ऊंचाई 10 मीटर है?

हल– दिया है—चित्रानुसार, कैनवास के टेंट का ऊपरी भाग शंक्वाकार तथा नीचे का भाग बेलनाकार है।

बेलनाकार भाग के आधार का व्यास $= 24$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{24}{2} = 12$ मीटर

टेंट के बेलनाकार भाग की ऊँचाई $(h) = 10$ मीटर



अतः टेंट के बेलनाकार भाग के लिए आवश्यक कैनवास = बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठ

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \pi \times 12 \times 10 = 240\pi$ मीटर^2

टेंट की कुल ऊँचाई $= 15$ मीटर

$\therefore$ टेंट के शंक्वाकार भाग की ऊँचाई $(h_1) = 15 - 10 = 5$ मीटर

तथा शंक्वाकार भाग की त्रिज्या (r) = बेलनाकार भाग की त्रिज्या $= 12$ मीटर

तथा तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h_1^2 + r^2} = \sqrt{5^2 + 12^2}$

$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ मीटर

अतः टेंट के शंक्वाकार भाग के लिए आवश्यक कुल कैनवास

= शंक्वाकार भाग का वक्र पृष्ठ

$= \pi rl$

$= \pi \times 12 \times 13 = 156\pi$ मीटर^2

अतः टेंट के लिए आवश्यक कुल कैनवास $= 240\pi + 156\pi$

$= \mathbf{396\pi}$ **मीटर**^{2} **उत्तर**

19. एक शंकु की त्रिज्या तथा ऊँचाई में 3 : 4 का अनुपात है। शंकु का आयतन 768 π सेमी^{3} है। शंकु की त्रिज्या, ऊँचाई तथा तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंकु की त्रिज्या तथा ऊँचाई में अनुपात $= 3 : 4$

माना शंकु की त्रिज्या $(r) = 3x$

तब शंकु की ऊँचाई $(h) = 4x$

तथा शंकु का आयतन $= 768\pi$

या $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 768\pi$

या $\frac{1}{3} \times (3x)^2 \times 4x = 768$

या $\frac{1}{3}\times 9x^2\times 4x = 768$ या $12x^3 = 768$

या $x^3 = \frac{768}{12}$ या $x^3 = 64$

या $x = \sqrt[3]{64} = 4$ सेमी

अतः शंकु की त्रिज्या $(r) = 3x = 3\times 4 = \mathbf{12}$ **सेमी** **उत्तर**

ऊँचाई $(h) = 4x = 4\times 4 = \mathbf{16}$ **सेमी** **उत्तर**

तथा तिर्यक ऊँचाई $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

या $l = \sqrt{12^2 + 16^2}$

या $l = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400}$

या $l = \mathbf{20}$ **सेमी** **उत्तर**

20. दो शंकुओं के व्यास समान हैं। यदि उनकी तिरछी ऊँचाइयाँ 5 : 4 के अनुपात में हों, तो उनके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—दो शंकुओं के व्यास समान है।

अतः उनकी त्रिज्याएँ भी समान होंगी।

माना दोनों शंकुओं की त्रिज्या $= r$

शंकुओं की तिरछी ऊँचाइयों में अनुपात $= 5 : 4$

माना पहले शंकु की तिरछी ऊँचाई $(l_1) = 5x$

तब दूसरे शंकु की तिरछी ऊँचाई $(l_2) = 4x$

पहले शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l_1$

या $S_1 = \pi r\times 5x = 5\pi rx$

तथा दूसरे शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l_2$

या $S_2 = \pi r\times 4x = 4\pi rx$

$\therefore \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{5\pi rx}{4\pi rx}$

या $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{4} \Rightarrow S_1 : S_2 = \mathbf{5 : 4}$ **उत्तर**

21. एक जोकर की टोपी एक शंकु के आकार की है, जिसके आधार की त्रिज्या 7 सेमी और ऊंचाई 24 सेमी है। इसी प्रकार की 10 टोपियाँ बनाने के लिए आवश्यक गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंक्वाकार टोपी की त्रिज्या $(r) = 7$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 24$ सेमी

$\therefore$ टोपी की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ सूत्र से,

या $l = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576}$

$= \sqrt{625} = 25$ सेमी

1 टोपी बनाने के लिए आवश्यक गत्ता = टोपी का वक्र पृष्ठ

$= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550 \text{ सेमी}^2$$

$\therefore$ 10 टोपियों के लिए आवश्यक गत्ता $= 10 \times 550 = 5500$ **सेमी^{2}** **उत्तर**

22. किसी बस स्टाप को पुराने गत्ते से बने 50 खोखले शंकुओं द्वारा सड़क से अलग किया हुआ है। प्रत्येक शंकु के आधार का व्यास 40 सेमी है और ऊँचाई 1 मीटर है। यदि इन शंकुओं की बाहरी पृष्ठों को पेंट करवाना है और पेंट की दर ₹ 12 प्रति मीटर^2 है, तो इनको पेंट कराने में कितनी लागत आएगी? ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{1.04} = 1.02$ का प्रयोग कीजिए।

हल– दिया है—खोखले शंकुओं का व्यास $= 40$ सेमी $= 0.4$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{0.4}{2} = 0.2$ मीटर तथा ऊँचाई $(h) = 1$ मीटर

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(0.2)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{0.04 + 1} = \sqrt{1.04}$

$= 1.02$ मीटर

$\therefore$ 1 शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi rl$

$= 3.14 \times 0.2 \times 1.02$

$= 0.648$ मीटर^2 **उत्तर**

$\therefore$ 50 शंकुओं का वक्र पृष्ठ $= 50 \times 0.640 = 32.03$ मीटर^2

₹ 12 प्रति मीटर की दर से शंकुओं को पेंट कराने में लागत $= 12 \times 32.03$

$=$ ₹ 384.36 **उत्तर**

23. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4070 सेमी^{2} है और उसका व्यास 70 सेमी है। इसकी तिरछी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— शंकु का व्यास $= 70$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{70}{2} = 35$ सेमी

माना शंकु की तिर्यक ऊँचाई $= l$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4070$ सेमी^{2}

या $\pi rl = 4070$

या $\frac{22}{7} \times 35 \times l = 4070$

या $22 \times 5 \times l = 4070$

या $l = \frac{4070}{22 \times 5} = 37$ **सेमी** **उत्तर**

24. एक शंकु का ऊपरी भाग आधार के समांतर समतल द्वारा काटकर निकाला गया है। यदि शेष भाग का वक्रपृष्ठ पूरे शंकु का $\frac{8}{9}$ हो, तो काटने वाला समतल उस शंकु के आधार से कितना ऊपर है?

हल– माना OAB एक शंकु है जिसकी ऊँचाई H तथा त्रिज्या R है।

शंकु को एक समतल $CD \parallel AB$ द्वारा काटकर OCD निकाला गया है।

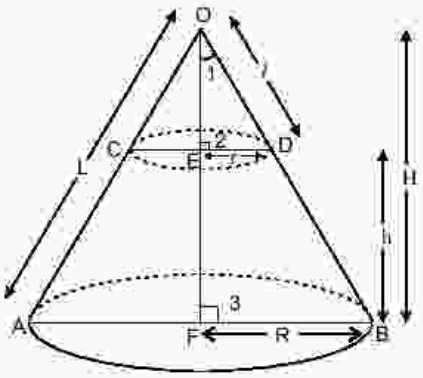
माना $EF = h, OF = H, OD = l,$

$OA = OB = L, ED = r, FB = R$

ΔEOD और ΔFOB में,

$\angle 1 = \angle 1$ (उभयनिष्ठ)

$\angle 2 = \angle 3$ (प्रत्येक 90°)



$\therefore \Delta EOD \sim \Delta FOB$

अत: $$\frac{OE}{OF} = \frac{OD}{OB} = \frac{ED}{FB}$$

या $$\frac{OF - EF}{OF} = \frac{OD}{OB} = \frac{ED}{FB}$$

या $$\frac{H-h}{H} = \frac{l}{L} = \frac{r}{R} \qquad \ldots(1)$$

अब शेष भाग $CABD$ का वक्रपृष्ठ $= \frac{8}{9} \times$ शंकु OAB का वक्रपृष्ठ

$\therefore$ शंकु OCD का वक्रपृष्ठ $= \left(1 - \frac{8}{9}\right)$ शंकु OAB का वक्रपृष्ठ

$$\pi r l = \frac{1}{9}\pi RL$$

या $$\frac{r}{R} \cdot \frac{l}{L} = \frac{1}{9}$$

या $$\frac{(H-h)}{H} \times \frac{(H-h)}{H} = \frac{1}{9}$$

या $$\left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \frac{1}{9} \qquad \text{या} \qquad \frac{H-h}{H} = \sqrt{\frac{1}{9}}$$

या $$\frac{H-h}{H} = \frac{1}{3} \qquad \text{या} \qquad 3(H-h) = H$$

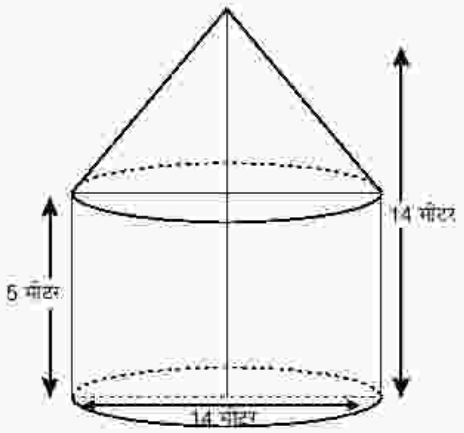
या $$3H - 3h = H \qquad \text{या} \qquad 3H - H = 3h$$

या $2H = 3h$ या $h = \frac{2}{3}H$

अतः काटने वाला समतल शंकु के आधार से इसकी ऊँचाई के $\frac{2}{3}$ **भाग के** ऊपर है। **उत्तर**

25. एक तम्बू के नीचे का भाग लम्बवृत्तीय बेलनाकार और ऊपरी भाग शंक्वाकार है। यदि तम्बू के आधार का व्यास 14 मीटर, बेलनाकार भाग की ऊँचाई 5 मीटर तथा तम्बू की सम्पूर्ण ऊँचाई 14 मीटर है तो तम्बू का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– चित्रानुसार, एक तम्बू जिसका नीचे का भाग बेलनाकार है।



तम्बू के आधार का व्यास = 14 मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{14}{2} = 7$ मीटर

बेलनाकार भाग की ऊँचाई $(h) = 5$ मीटर

$\therefore$ तम्बू के बेलनाकार भाग का आयतन $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 5$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 5 = 770$ मीटर^3

टेंट की कुल ऊँचाई = 14 मीटर

$\therefore$ टेंट के शंक्वाकार भाग की ऊँचाई $= 14 - 5 = 9$ मीटर $= (h_1)$

तथा शंक्वाकार भाग की त्रिज्या (r) = आधार की त्रिज्या = 7 मीटर

अतः शंक्वाकार भाग का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 9$

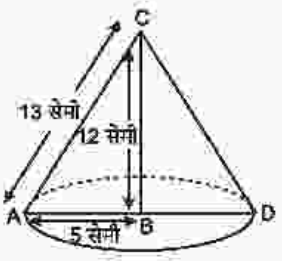
$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 9 = 22 \times 7 \times 3 = 462$ मीटर^3

टेंट का कुल आयतन = बेलनाकार भाग का आयतन +
शंक्वाकार भाग का आयतन

$= 770 + 462 =$ **1232 मीटर^3** **उत्तर**

26. भुजाओं 5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी वाले एक समकोण त्रिभुज ABC को भुजा 12 सेमी के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—एक समकोण ΔABC, जिसकी भुजाएँ $AB = 5$ सेमी, $BC = 12$ सेमी तथा $CA = 13$ सेमी है। त्रिभुज को भुजा BC के परितः घुमाया जाता है। जिससे एक शंक्वाकार आकृति ACD प्राप्त होती है।



जिसकी त्रिज्या $(r) = AB = 5$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = BC = 12$ सेमी

अतः शंकु ACD का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times (5)^2 \times 12$$

$$= \pi \times 25 \times 4$$

$$= 100\,\pi \text{ सेमी}^3$$ उत्तर

27. यदि प्रश्न 26 के त्रिभुज ABC को यदि भुजा 5 सेमी के परितः घुमाया जाए, तो इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। प्रश्न 26 और 27 में प्राप्त किए गए दोनों ठोसों के आयतनों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्न 26 में दिए गए त्रिभुज ABC को भुजा 5 सेमी के परितः घुमाने से प्राप्त शंक्वाकार ठोस की त्रिज्या $(r) = 12$ सेमी तथा ऊँचाई $(h) = 5$ सेमी होगी।

अतः प्राप्त शंक्वाकार ठोस का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (12)^2 \times 5$

$$= 240\pi \text{ सेमी}^3$$ उत्तर

$$\frac{\text{प्रश्न 26 में प्राप्त ठोस का आयतन}}{\text{प्रश्न 27 में प्राप्त ठोस का आयतन}} = \frac{100\pi}{240\pi}$$

$$= \frac{5}{12} \Rightarrow 5 : 12$$ उत्तर

28. गेहूँ की एक ढेरी 10.5 मीटर व्यास और ऊंचाई 3 मीटर वाले एक शंकु के आकार की है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेरी को वर्षा से बचाने के लिए कैनवास से ढका जाता है। वाँछित कैनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—गेहूँ की शंक्वाकार ढेरी का व्यास $= 10.5$ मीटर

$$\therefore \quad \text{त्रिज्या } (r) = \frac{10.5}{2} \text{ मीटर}$$

तथा ऊँचाई $(h) = 3$ मीटर

$\therefore$ तिरछी (तिर्यक) ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ सूत्र से,

$$= \sqrt{\left(\frac{10.5}{2}\right)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{110.25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{110.25 + 36}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{146.25}{4}} = \frac{12.09}{2} = 6.046 \text{ मीटर}$$

अतः शंक्वाकार गेहूँ की ढेरी का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{10.5}{2}\right)^2 \times 3$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{2} \times \frac{10.5}{2} = \frac{22 \times 10.5 \times 15}{4}$$

$$= \mathbf{86.625 \text{ मीटर}^3}$$ **उत्तर**

शंक्वाकार गेहूँ की ढेरी को ढकने के लिए आवश्यक तिरपाल

= गेहूँ की ढेरी का वक्र पृष्ठ

$= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{2} \times 6.046 = 11 \times 1.5 \times 6.046$$

$$= \mathbf{99.76 \text{ मीटर}^2}$$ **उत्तर**

29. एक शंक्वाकार डेरे में 6 व्यक्तियों को ठहराना है। प्रत्येक व्यक्ति को जमीन पर 15 वर्ग मीटर स्थान तथा 150 घन मीटर वायु साँस लेने के लिए चाहिए। डेरे की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना शंक्वाकार डेरे के आधार की त्रिज्या $= r$

तथा ऊँचाई $= h$

1 व्यक्ति के लिए आवश्यक स्थान $= 15$ वर्ग मीटर

तथा 1 व्यक्ति के लिए आवश्यक वायु $= 150$ घन मीटर

डेरे के आधार का क्षेत्रफल $= 6$ व्यक्तियों के लिए आवश्यक स्थान

या $\pi r^2 = 6 \times 15$ ...(1)

शंक्वाकार डेरे का आयतन $= 6$ व्यक्तियों के लिए आवश्यक वायु

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 6 \times 150$$

या $\frac{1}{3} \times 6 \times 15 \times h = 6 \times 150$ (समीकरण (1) से)

या $h = \frac{6 \times 150 \times 3}{6 \times 15} = \mathbf{30 \text{ मीटर}}$ **उत्तर**

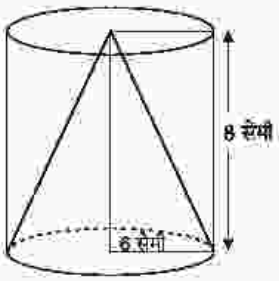
30. एक शंकु का वक्रपृष्ठ $188\frac{4}{7}$ वर्ग मीटर तथा उसके आधार का व्यास 12 मीटर है। शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— शंकु का वक्रपृष्ठ $= 188\frac{4}{7}$ वर्ग मीटर

$$= \frac{1320}{7} \text{ वर्ग मीटर}$$

शंकु के आधार का व्यास $= 12$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{12}{2} = 6$ मीटर



माना शंकु की ऊँचाई $= h$

तथा तिर्यक ऊँचाई $= l$

सूत्र—शंकु का वक्रपृष्ठ $= \pi rl$ से,

$$\frac{1320}{7} = \frac{22}{7} \times 6 \times l$$

या $$l = \frac{1320 \times 7}{7 \times 22 \times 6} = 10 \text{ मीटर}$$

अब, सूत्र—$h = \sqrt{l^2 - r^2}$ से,

$$h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36}$$

$$= \sqrt{64} = 8 \text{ मीटर}$$ उत्तर

31. यदि 8 सेमी ऊंचाई और 6 सेमी त्रिज्या के ठोस बेलन से इसी ऊंचाई तथा इसी त्रिज्या का एक ऊर्ध्वाधर शंकु काट दिया गया है, तो अवशेष ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—ठोस बेलन की ऊँचाई $(h) = 8$ सेमी

तथा आधार की त्रिज्या $(r) = 6$ सेमी

ठोस बेलन का वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh$

$$= 2\pi \times 6 \times 8$$

$$= 96\pi \text{ सेमी}^2$$

ठोस बेलन के ऊपरी सिरे का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \pi \times 6^2$

$$= 36\pi \text{ सेमी}^2$$

ठोस बेलन से काटे गए शंकु की त्रिज्या r = बेलन की त्रिज्या

$$= 6 \text{ सेमी}$$

तथा ऊँचाई (h) = बेलन की ऊँचाई $= 8$ सेमी

$\therefore$ शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$ सूत्र से,

$$= \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36}$$

$$= \sqrt{100} = 10 \text{ सेमी}$$

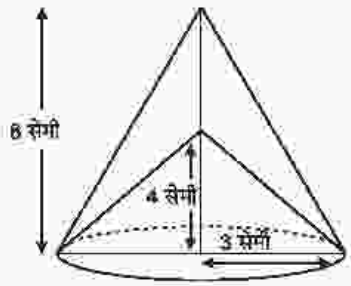
अत: काटे गए शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi rl$

$$= \pi \times 6 \times 10 = 60\pi \text{ सेमी}^2$$

अत: ठोस बेलन से शंकु काटने के बाद बचे अवशेष ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठ
= बेलन का वक्र पृष्ठ + सिरे का वक्र पृष्ठ + शंकु का वक्र पृष्ठ
$= 96\pi + 36\pi + 60\pi = 192\pi$ सेमी^{2} उत्तर

32. किसी शंकु की ऊंचाई तथा त्रिज्या क्रमश: 8 सेमी और 3 सेमी हैं। उसमें से 4 सेमी गहरा और 3 सेमी त्रिज्या का एक शंकु काटकर निकाल दिया गया है। शेष आकृति का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—दिए गए शंकु की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी
तथा ऊँचाई $(h) = 8$ सेमी



∴दिए गए शंकु की तिर्यक ऊँचाई
$l = \sqrt{r^2 + h^2}$ सूत्र से
$l = \sqrt{3^2 + 8^2}$
$= \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73}$
∴दिए गए शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi rl$
$= \pi \times 3\sqrt{73}$ सेमी^{2}

दिए गए शंकु से काटे गए शंकु की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी तथा ऊँचाई $(h) = 4$ सेमी

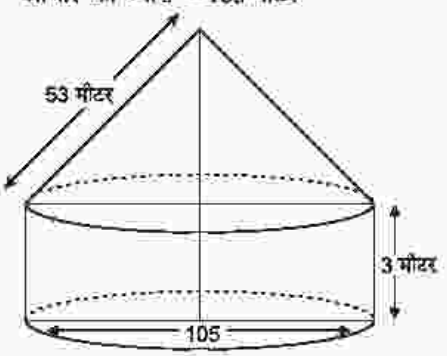
∴ तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$
$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ सेमी

अत: काटे गए शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi rl$
$= \pi \times 3 \times 5 = 15\pi$ सेमी^{2}

अत: अवशेष आकृति का सम्पूर्ण पृष्ठ = दिए गए शंकु का वक्र पृष्ठ + काटे गए शंकु का वक्र पृष्ठ
$= 3\pi\sqrt{73} + 15\pi = 15\pi + 3\pi\sqrt{73}$
$= 3\pi(5 + \sqrt{73})$ सेमी^{2} उत्तर

33. एक सरकस का टेंट 3 मीटर ऊंचाई तक बेलनाकार है, ऊपर से शंक्वाकार है। व्यास 105 मीटर तथा शंक्वाकार भाग की ऊंचाई 53 मीटर है। टेंट बनाने के लिए आवश्यक कैनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—सरकस के टेंट के बेलनाकार भाग की ऊँचाई $(h) = 3$ मीटर
तथा आधार का व्यास $= 105$ मीटर



$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{105}{2}$ मीटर

टेंट के बेलनाकार भाग का वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{105}{2} \times 3$

$= 22 \times 15 \times 3 = 990$ मीटर^2

टेंट के शंक्वाकार भाग की त्रिज्या (r) = बेलनाकार भाग की त्रिज्या

या $r = \frac{105}{2}$ मीटर

तथा तिरछी ऊँचाई $(l) = 53$ मीटर

अतः शंक्वाकार भाग का वक्रपृष्ठ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times \frac{105}{2} \times 53 = 11 \times 15 \times 53$

$= 8745$ मीटर^2

टेंट का सम्पूर्ण वक्र पृष्ठ = बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठ + शंक्वाकार भाग का वक्र पृष्ठ

$= 990 + 8745 = \mathbf{9735}$ मीटर^2 उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 335 का अवलोकन कीजिए।

■□■

17

गोला
(Sphere)

1. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या निम्न है—

(i) 7 सेमी (ii) 0.63 मीटर

हल– (i) दिया है—गोले की त्रिज्या $(r) = 7$ सेमी

अतः गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$

$= \frac{4312}{3} = \mathbf{1437\frac{1}{3}}$ **सेमी^{3}** **उत्तर**

(ii) दिया है— गोले की त्रिज्या $(r) = 0.63$ मीटर

अतः गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (0.63)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.63 \times 0.63 \times 0.63$

$= 4 \times 22 \times 0.09 \times 0.21 \times 0.63$

$=$ **1.05 सेमी^{3}** **उत्तर**

2. उस ठोस गोलाकार गेंद द्वारा हटाए गए (विस्थापित) पानी का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसका व्यास निम्न है—

(i) 28 सेमी (ii) 0.21 मीटर

हल– (i) दिया है— गोलाकार गेंद का व्यास $= 28$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{28}{2} = 14$ सेमी

अतः गेंद द्वारा हटाये गए पानी का आयतन = गेंद का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (14)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14 = \frac{34496}{3}$

$= \mathbf{11498\frac{2}{3}}$ **सेमी^{3}** **उत्तर**

(ii) दिया है—गोलाकार गेंद का व्यास $= 0.21$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{0.21}{2}$ मीटर

$\therefore$ गेंद द्वारा विस्थापित पानी = गेंद का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{0.21}{2}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{0.21 \times 0.21 \times 0.21}{2 \times 2 \times 2}$$

$$= 11 \times 0.01 \times 0.21 \times 0.21$$

$$= \mathbf{0.004851 \text{ मीटर}^3}$$ **उत्तर**

3. धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 सेमी है। यदि इस धातु का घनत्व 8.9 ग्राम प्रति सेमी^{3} है, तो इस गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—धातु की गेंद का व्यास $= 4.2$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{4.2}{2} = 2.1$ सेमी

$\therefore$ गेंद का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(2.1)^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1$$

$$= 4 \times 22 \times 0.1 \times 2.1 \times 2.1 = 38.808 \text{ सेमी}^3$$

धातु का घनत्व $= 8.9$ ग्राम प्रति सेमी^{3}

$\therefore$ गेंद का द्रव्यमान = गेंद का आयतन $\times$ धातु का घनत्व

$= 38.808 \times 8.9 = \mathbf{345.39 \text{ ग्राम}}$ **उत्तर**

4. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक चौथाई है। चन्द्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन की कौन-सी भिन्न है?

हल– माना पृथ्वी का व्यास $= d$

$\therefore$ पृथ्वी की त्रिज्या $(R) = \frac{d}{2}$

प्रश्नानुसार, चन्द्रमा का व्यास $= \frac{1}{4}$ पृथ्वी का व्यास $= \frac{1}{4}d$

$\therefore$ चन्द्रमा की त्रिज्या $(R') = \frac{\frac{1}{4} \times d}{2} = \frac{d}{8}$

पृथ्वी का आयतन $(V) = \frac{4}{3}\pi R^3$

या $V = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^3$ या $V = \frac{4}{3}\pi \times \frac{d^3}{8}$

या $V = \frac{\pi}{6}d^3$

तथा चन्द्रमा का आयतन $(V') = \frac{4}{3}\pi R'^3$

या $V' = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{8}\right)^3$ या $V' = \frac{4}{3}\pi \times \frac{d^3}{512}$

या $V' = \frac{1}{64} \times \frac{\pi}{6} d^3$ या $V' = \frac{1}{64} V$

अत: चन्द्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन का $\frac{1}{64}$ वाँ भिन्न है। **उत्तर**

5. दो गोलों की त्रिज्याओं में 1 : 3 का अनुपात है। उनके वक्रपृष्ठों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– माना दो गोलों की त्रिज्याएँ r_1 व r_2 हैं।

प्रश्नानुसार, $r_1 : r_2 = 1 : 3$

या $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$

प्रथम गोले का वक्रपृष्ठ $(S_1) = 4\pi r_1^2$

द्वितीय गोले का वक्रपृष्ठ $(S_2) = 4\pi r_2^2$

$\therefore$ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2}$ या $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

या $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ या $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}$

या $S_1 : S_2 = \mathbf{1 : 9}$ **उत्तर**

6. यदि एक गोले का वक्र पृष्ठ 264 सेमी^{2} हो तब इसके अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—गोले का वक्रपृष्ठ $= 4\pi r^2 = 264$ सेमी^{2}

या $4 \times \frac{22}{7} r^2 = 264$ या $r^2 = \frac{264 \times 7}{22 \times 4}$

या $r^2 = 21$

अत: अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 3\pi r^2$

$= 3 \times \frac{22}{7} \times 21 = \mathbf{198}$ सेमी^{2} **उत्तर**

7. दो गोलों की त्रिज्याओं का अनुपात 3 : 4 है। गोलों के वक्रपृष्ठों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– माना दो गोलों की त्रिज्या क्रमश: r_1 व r_2 हैं।

प्रश्नानुसार, $r_1 : r_2 = 3 : 4$ या $\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{4}$

प्रथम गोले का वक्रपृष्ठ $= 4\pi r_1^2 = S_1$ (माना)

तथा द्वितीय गोले का वक्रपृष्ठ $= 4\pi r_2^2 = S_2$ (माना)

अत: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

अत: $\mathbf{S_1 : S_2 = 9 : 16}$ **उत्तर**

8. धातु के 5 सेमी त्रिज्या के एक ठोस गोले को पिघलाकर 1 सेमी त्रिज्या की कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती है?

हल– दिया है—धातु के ठोस गोले की त्रिज्या $(R)=5$ सेमी

अतः ठोस गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi R^3$

$=\frac{4}{3}\pi\times(5)^3=\frac{4}{3}\pi\times 125$ सेमी^{3}

ठोस गोले को पिघलाकर बनाई गई गोलियों की त्रिज्या $(r)=1$ सेमी

अतः प्रत्येक गोली का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3$

$=\frac{4}{3}\pi\times 1^3=\frac{4}{3}\pi$ सेमी^{3}

अतः गोलियों की संख्या $=\frac{\text{ठोस गोले का आयतन}}{1\text{ गोली का आयतन}}$

$=\frac{\frac{4}{3}\pi\times 125}{\frac{4}{3}\pi}=\mathbf{125}$ **उत्तर**

9. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जिसके आयतन और वक्रपृष्ठ के संख्यात्मक मान बराबर हैं।

हल– माना गोले की त्रिज्या $=r$

प्रश्नानुसार, गोले का आयतन $=$ गोले का वक्रपृष्ठ

$\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi r^2$ या $\frac{r}{3}=1$

या $r=3$ **मात्रक** **उत्तर**

10. एक अर्द्ध गोले की त्रिज्या 6 सेमी है। अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्ध गोले की त्रिज्या $(r)=6$ सेमी

अतः अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $=3\pi r^2$

$=3\pi\times 6^2=108\pi$ सेमी^{2}

तथा अर्द्ध गोले का आयतन $=\frac{2}{3}\pi r^3$

$=\frac{2}{3}\pi(6)^3=\frac{2}{3}\pi\times 216$

$=\mathbf{144\,\pi}$ **सेमी**^{3} **उत्तर**

11. निम्न त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—

(i) 10.5 सेमी (ii) 5.6 सेमी (iii) 14 सेमी

हल– (i) दिया है—गोले की त्रिज्या $(r)=10.5$ सेमी

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $=4\pi r^2$

$$= 4\pi(10.5)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 110.25$$

$$= 88 \times 15.75 = \mathbf{1386 \text{ सेमी}^2}$$ उत्तर

(ii) दिया है— गोले की त्रिज्या $(r) = 5.6$ सेमी

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (5.6)^2 = \frac{88}{7} \times 31.36$$

$$= 88 \times 4.48 = \mathbf{394.24 \text{ सेमी}^2}$$ उत्तर

(iii) दिया है—गोले की त्रिज्या $(r) = 14$ सेमी

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7}(14)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

$$= 4 \times 22 \times 2 \times 14 = \mathbf{2464 \text{ सेमी}^2}$$ उत्तर

12. निम्न व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—

(i) 14 सेमी (ii) 21 सेमी (iii) 3.5 मीटर

हल– (i) दिया है—गोले का व्यास $= 14$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{14}{2} = 7$ सेमी

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2 = \frac{4 \times 22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 88 \times 7 = \mathbf{616 \text{ सेमी}^2}$$ उत्तर

(ii) दिया है— गोले का व्यास $= 21$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{21}{2}$ सेमी

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{4 \times 22 \times 21 \times 21}{7 \times 2 \times 2}$$

$$= 22 \times 3 \times 21 = \mathbf{1386 \text{ सेमी}^2}$$ उत्तर

(iii) दिया है— गोले का व्यास $= 3.5$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ मीटर

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}$$

$$= 22 \times 0.5 \times 3.5 = \mathbf{38.5 \text{ मीटर}^2}$$ उत्तर

13. दो गोलों के आयतनों में 1 : 8 का अनुपात है। गोलों की त्रिज्याओं में अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– माना दो गोलों की त्रिज्याएँ r_1 व r_2 हैं।

तब इनके आयतन क्रमशः $\frac{4}{3}\pi r_1^3$ तथा $\frac{4}{3}\pi r_2^3$ होंगे।

अतः गोलों के आयतनों में अनुपात $= \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \frac{1}{8}$

या $\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{1}{8}$ या $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

या $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$ या $r_1 : r_2 = 1:2$ **उत्तर**

14. एक गोले की त्रिज्या 7 सेमी है, गोले का वक्रपृष्ठ तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—गोले की त्रिज्या $(r) = 7$ सेमी

गोले का वक्रपृष्ठ $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7^2 = \frac{4 \times 22}{7} \times 7 \times 7$

$= 4 \times 22 \times 7 = \mathbf{616}$ **सेमी**^{2} **उत्तर**

तथा गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(7)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$

$= \frac{4312}{3} = \mathbf{1437\frac{1}{3}}$ **सेमी**^{3} **उत्तर**

15. एक गेंद का व्यास 8 सेमी है। गेंद का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—गेंद का व्यास $= 8$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{8}{2} = 4$ सेमी

गेंद का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \pi(4)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 64$

$= \frac{\mathbf{256}}{\mathbf{3}}\pi$ **सेमी**^{3} **उत्तर**

16. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका वक्रपृष्ठ $64\pi^3$ सेमी^{2} है।

हल– दिया है—गोले का वक्रपृष्ठ $= 4\pi r^2 = 64\pi^3$

या $r^2 = 16\pi^2$

या $r = \sqrt{16\pi^2} = 4\pi$

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(4\pi)^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times 64\pi^3 = \frac{\mathbf{256}}{\mathbf{3}}\pi^4$ **सेमी**^{3} **उत्तर**

17. एक अर्द्ध गोले की त्रिज्या $\frac{3}{2}$ सेमी है। अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्ध गोले की त्रिज्या $(r) = \frac{3}{2}$ सेमी

अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 \times \pi \times \frac{9}{4}$$

$$= \frac{27}{4}\pi \text{ सेमी}^2$$ **उत्तर**

तथा अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$$= \frac{2}{3} \times \pi \times \frac{27}{8} = \frac{9}{4}\pi \text{ सेमी}^3$$ **उत्तर**

18. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक अर्द्ध गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल– दिया है—अर्द्ध गोले की त्रिज्या $= 10$ सेमी

अतः अर्द्ध गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \pi \times (10)^2 = 3 \times \pi \times 100$$

$$= 300\pi \text{ सेमी}^2 = 300 \times 3.14$$

$$= 942 \text{ सेमी}^2$$ **उत्तर**

19. एक गोलाकार गुब्बारे में हवा भरने पर, उसकी त्रिज्या 7 सेमी से 14 सेमी हो जाती है। इन दोनों स्थितियों में गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– गुब्बारे की प्रारम्भिक त्रिज्या $(r_1) = 7$ सेमी

अतः गुब्बारे का प्रारम्भिक पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r_1^2$

या $$(S_1) = 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616 \text{ सेमी}^2$$

गुब्बारे में और हवा भरने पर त्रिज्या $(r_2) = 14$ सेमी

अतः गुब्बारे का हवा भरने पर पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r_2^2$

या $$(S_2) = 4 \times \frac{22}{7} \times (14)^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 2464 \text{ सेमी}^2$$ **उत्तर**

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{616}{2464} \quad \text{या} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$$

या $$S_1 : S_2 = 1 : 4$$ **उत्तर**

20. पीतल से बने एक अर्द्ध गोलाकार कटोरे का आन्तरिक व्यास 10.5 सेमी है। ₹ 16 प्रति 100 सेमी^{2} की दर से इसके आन्तरिक पृष्ठ पर कलई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्ध गोलाकार कटोरे का आन्तरिक व्यास $=10.5$ सेमी

$\therefore$ कटोरे की आन्तरिक त्रिज्या $(r)=\frac{10.5}{2}$ सेमी

अर्द्ध गोलाकार कटोरे का आन्तरिक पृष्ठ $=2\pi r^2$

$$=2\times\frac{22}{7}\times\left(\frac{10.5}{2}\right)^2=2\times\frac{22}{7}\times\frac{110.25}{4}$$

$$=11\times 15.75=173.25 \text{ सेमी}^2$$

कटोरे पर कलई कराने की दर $=₹16$ प्रति 100 सेमी^{2}

या $=₹\frac{16}{100}$ प्रति सेमी^{2}

अत: कटोरे पर कलई कराने का व्यय $=₹173.25\times\frac{16}{100}=₹27.72$ **उत्तर**

21. एक लोहे का ठोस गोला जिसका व्यास 12 सेमी है, एक 24 सेमी व्यास वाले बेलनाकार बर्तन में जिसमें कुछ पानी भरा है, डाल दिया जाता है। ज्ञात कीजिए कि गोले के पूरा डूब जाने पर पानी की सतह कितनी ऊपर उठ जाएगी?

हल– दिया है—ठोस गोले का व्यास $=12$ सेमी

$\therefore$ ठोस गोले की त्रिज्या $(r)=\frac{12}{2}=6$ सेमी

ठोस गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times(6)^3$

$$=\frac{4}{3}\pi\times 6\times 6\times 6=288\pi \text{ सेमी}^3$$

तथा बेलनाकार बर्तन का व्यास $=24$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r_1)=\frac{24}{2}=12$ सेमी

माना बेलनाकार बर्तन में ठोस गोला डालने पर पानी की सतह में h ऊँचाई की वृद्धि होती है।

अत: बेलनाकार बर्तन में ऊपर उठे पानी का आयतन = ठोस गोले का आयतन

$$\pi r_1^2 h=288\pi$$

या $$\pi\times 12^2 h=288\pi$$

$\Rightarrow$ $$\pi\times 144\times h=288\pi$$

या $$h=\frac{288\pi}{144\pi}=2 \text{ सेमी}$$ **उत्तर**

22. एक बेलनाकार बर्तन का व्यास 21 सेमी है। इसमें कुछ पानी भरा है। एक ठोस गोला जिसका व्यास 10.5 सेमी है, उस बर्तन में डाल दिया जाता है। गोला पानी में डूब जाता है। गणना कीजिए कि पानी का तल कितना ऊपर उठ जाएगा?

हल– दिया है—ठोस गोले का व्यास $=10.5$ सेमी

$\therefore$ गोले की त्रिज्या $(r) = \frac{10.5}{2}$ सेमी

ठोस गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{10.5}{2}\right)^3$ सेमी^{3}

बेलनाकार बर्तन का व्यास $= 21$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r_1) = \frac{21}{2} = 10.5$ सेमी

माना ठोस गोले को बेलनाकार बर्तन में डालने पर पानी का तल h सेमी ऊपर उठ जाता है।
अत: बेलनाकार बर्तन में ऊपर उठे पानी का आयतन $= \pi r_1^2 h = \pi (10.5)^2 h$ सेमी^{3}

परन्तु, बेलनाकार बर्तन में ऊपर उठे पानी का आयतन = ठोस गोले का आयतन

$$\pi (10.5)^2 h = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{10.5}{2}\right)^3$$

या $$h = \frac{4}{3} \times \frac{10.5}{8} = \frac{3.5}{2} = 1.75 \text{ सेमी}$$ **उत्तर**

23. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है।

हल– माना दिए गए गोले की त्रिज्या $= r$ सेमी

अत: गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

या $$154 = 4\pi r^2 \quad \text{या} \quad 154 = 4 \times \frac{22}{7} r^2$$

या $$r^2 = \frac{7 \times 154}{4 \times 22} = \frac{7 \times 7}{4}$$

या $$r = \sqrt{\frac{7 \times 7}{4}} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ सेमी}$$ **उत्तर**

24. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। इन दोनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– माना पृथ्वी का व्यास $= 2R$

तब चन्द्रमा का व्यास $= \frac{1}{4} \times 2R = \frac{R}{2}$

$\therefore$ पृथ्वी की त्रिज्या $= \frac{2R}{2} = R$

तथा चन्द्रमा की त्रिज्या $= \frac{R/2}{2} = \frac{R}{4}$

चन्द्रमा का पृष्ठीय क्षेत्रफल $(S_1) = 4\pi \left(\frac{R}{4}\right)^2$

$= 4\pi \times \frac{R^2}{16} = \frac{\pi R^2}{4}$

तथा पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल $(S_2) = 4\pi (R)^2 = 4\pi R^2$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\pi R^2}{4}}{4\pi R^2} = \frac{\pi R^2}{16\pi R^2} = \frac{1}{16}$$

या $S_1 : S_2 = 1:16$ **उत्तर**

25. एक अर्द्धगोलाकार कटोरा 0.25 सेमी मोटी स्टील से बना है। इस कटोरे की आन्तरिक त्रिज्या 5 सेमी है। कटोरे का बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्ध गोलाकार कटोरे की आन्तरिक त्रिज्या $r = 5$ सेमी

तथा कटोरे की मोटाई $= 0.25$ सेमी

अतः अर्द्ध गोलाकार कटोरे की बाहरी त्रिज्या $(R) = 5 + 0.25 = 5.25$ सेमी

∴ अर्द्ध गोलाकार कटोरे का बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi R^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times (5.25)^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25$$

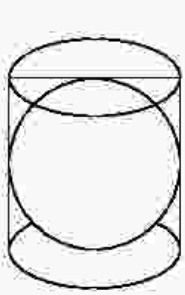
$$= 2 \times 22 \times 0.75 \times 5.25 = 173.25 \text{ सेमी}^2$$ **उत्तर**

26. एक लम्बवृत्तीय बेलन, त्रिज्या r वाले एक गोले को पूर्णतः घेरे हुए है (दी गई आकृति देखिए) और ज्ञात कीजिए—

(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) ऊपर (i) व (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों का अनुपात



हल– दिया है—गोले की त्रिज्या $= r$

∵ लम्बवृत्तीय बेलन गोले को पूर्णतः घेरे हुए है।

∴ लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या = गोले की त्रिज्या $= r$

तथा ऊँचाई (h) = गोले का व्यास $= 2r$

(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $(S_1) = 4\pi r^2$

(ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $(S_2) = 2\pi rh = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

(iii) $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{1}$$

या $S_1 : S_2 = 1:1$ **उत्तर**

27. किसी लम्बवृत्तीय बेलन और लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई और आधार के व्यास समान हैं तथा प्रत्येक की माप 6 सेमी है। इसके अतिरिक्त 3 सेमी त्रिज्या का एक गोला है तो बेलन, शंकु और गोले के आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय बेलन का व्यास = लम्बवृत्तीय शंकु का व्यास $= 6$ सेमी

∴ बेलन की त्रिज्या = शंकु की त्रिज्या $(r) = \frac{6}{2} = 3$ सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई = शंकु की ऊँचाई $(h) = 6$ सेमी

तथा गोले की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी

बेलन का आयतन $V_1 = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = \pi \times 9 \times 6 = 54\pi$ सेमी^{3}

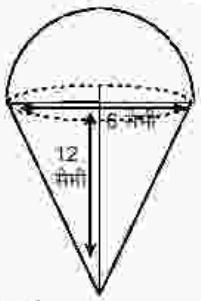
शंकु का आयतन $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6 = 18\pi$ सेमी^{3}

गोले का आयतन $V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times (3)^3 = 36\pi$ सेमी^{3}

अतः $V_1 : V_2 : V_3 = 54\pi : 18\pi : 36\pi$

$= 3 : 2 : 1$ उत्तर

28. आइसक्रीम का आयतन ज्ञात कीजिए। जो 12 सेमी ऊँचे और 6 सेमी व्यास के लम्बवृत्तीय शंकु को भरने के बाद उसके ऊपर अर्द्ध गोले का आकार बनाती है ($\pi = 3.14$)



हल– दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु का व्यास $= 6$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{6}{2}$ सेमी $= 3$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

आइसक्रीम के अर्द्ध गोले की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \times (3)^2 \times 12 = 36\pi$ सेमी^{3}

अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2\pi}{3} \times 3^3 = 18\pi$ सेमी^{3}

अतः आइसक्रीम का आयतन $= 36\pi + 18\pi$

$= (36 + 18)\pi = 54 \times \pi$

$= 54 \times 3.14 = \mathbf{169.56}$ सेमी^{3} उत्तर

29. ज्ञात कीजिए कि किसी धातु के 14 सेमी त्रिज्या वाले एक गोले को पिघलाकर 3.5 सेमी व्यास तथा 8 सेमी ऊँचाई के कितने लम्बवृत्तीय शंकु बनाए जा सकते हैं?

हल– दिया है—धातु के गोले की त्रिज्या $(R) = 14$ सेमी

$\therefore$ धातु के गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi (14)^3$ सेमी^{3}

धातु के गोलों को पिघलाकर बनाए गए शंकुओं की त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 8$ सेमी

अतः प्रत्येक शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \times 8$ सेमी

अब, शंकुओं की संख्या $= \frac{\text{गोले का आयतन}}{\text{शंकु का आयतन}}$

$= \frac{\frac{4}{3}\pi (14)^3}{\frac{1}{3}\pi \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \times 8}$

$$= \frac{(14)^3}{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \times 2} = \frac{14\times14\times14}{\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\times2}$$

$$= \frac{14\times14\times14\times2}{3.5\times3.5} = 4\times4\times14\times2$$

$$= \mathbf{448\ \text{सेमी}^3}$$ **उत्तर**

30. एक शंकु एवं एक गोलार्द्ध समान आधार तथा समान आयतन के हैं। शंकु तथा गोलार्द्ध की ऊँचाइयों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंकु एवं गोलार्द्ध के आधार समान हैं।

अत: शंकु की त्रिज्या = गोले की त्रिज्या = r (माना)

माना शंकु की ऊँचाई = h, गोलार्द्ध की ऊँचाई = त्रिज्या = r

तथा शंकु का आयतन = गोलार्द्ध का आयतन

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^3$$

या $$h = 2r$$

या $$\frac{h}{r} = \frac{2}{1}$$

या $$h : r = \mathbf{2:1}$$ **उत्तर**

31. एक शंकु 216 सेमी ऊँचा है तथा इसके आधार की त्रिज्या 16 सेमी है। इसे पिघलाकर एक गोले के रूप में ढाला गया है। गोले की त्रिज्या बताइए।

हल– दिया है—शंकु के आधार की त्रिज्या $(r) = 16$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 216$ सेमी

अत: शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(16)^2 \times 216$

$$= \frac{1}{3}\pi\times256\times216\ \text{सेमी}^3$$

माना शंकु को पिघलाकर बनाए गए गोले की त्रिज्या = R

$\therefore$ गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi R^3$

परन्तु, गोले का आयतन = शंकु का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi\times256\times216$$

या $$R^3 = 64\times216$$

या $$R = \sqrt[3]{64\times216}$$

$$= 4\times6 = \mathbf{24\ \text{सेमी}}$$ **उत्तर**

32. एक ठोस लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई 2 सेमी तथा त्रिज्या 4 सेमी है। ज्ञात कीजिए कि शंकु को पिघलाकर 1 सेमी के व्यास वाले कितने गोले बनाए जा सकते हैं?

हल– दिया है—ठोस शंकु की ऊँचाई $(h) = 2$ सेमी

तथा त्रिज्या $(r) = 4$ सेमी

अत: शंकु का आयतन $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$=\frac{1}{3}\times\pi\times 4^2\times 2=\frac{32}{3}\pi$ सेमी^{3}

ठोस शंकु को पिघलाकर बनाए गए गोलों का व्यास = 1 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r')=\frac{1}{2}$ सेमी

$\therefore$ प्रत्येक गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r'^3$

$=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}=\frac{\pi}{6}$ सेमी^{3}

अत: गोलों की संख्या $=\frac{\text{शंकु का आयतन}}{1\text{ गोले का आयतन}}$

$=\frac{\frac{32}{3}\pi}{\frac{\pi}{6}}=\frac{32\times 6}{3}=\mathbf{64}$ **उत्तर**

33. किसी धातु के एक ठोस लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई 48 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 12 है। शंकु को पिघलाकर एक ठोस गोला बनाया जाता है। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—ठोस लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई $(h)=48$ सेमी

तथा आधार की त्रिज्या $(h)=12$ सेमी

$\therefore$ ठोस शंकु का आयतन $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$=\frac{1}{3}\times\pi(12)^2\times 48=\pi\times 144\times 16$ सेमी^{3}

माना ठोस शंकु को पिघलाकर बनाए गए ठोस गोले की त्रिज्या $=r$

$\therefore$ गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3$

परन्तु, गोले का आयतन = शंकु का आयतन

$\frac{4}{3}\pi r^3=\pi\times 144\times 16$

$r^3=144\times 12$

या $r^3=12\times 12\times 12=12^3$

या $r=\sqrt[3]{12^3}=\mathbf{12}$ सेमी **उत्तर**

34. एक ही आधार में एक अर्द्धगोला तथा एक लम्बवृत्तीय शंकु का ठोस बनाया गया है। यदि ठोस का सम्पूर्ण आयतन $\frac{32\pi}{3}$ घन सेमी और शंकु की ऊँचाई 4 सेमी हो, तो आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

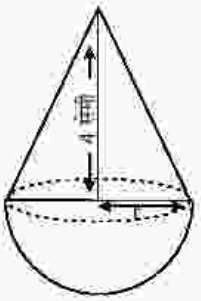
हल– दिया है—अर्द्धगोला एवं शंकु एक ही आधार पर है।

माना आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

तथा शंकु की ऊँचाई $(h) = 4$ सेमी

सम्पूर्ण ठोस का आयतन = शंकु का आयतन + अर्द्धगोले का आयतन

$$\frac{32\pi}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$



या $32 = r^2 \times 4 + 2r^3$

या $16 = 2r^2 + r^3$

या $r^3 + 2r^2 - 16 = 0$

या $r^3 - 2r^2 + 4r^2 - 8r + 8r - 16 = 0$

या $r^2(r-2) + 4r(r-2) + 8(r-2) = 0$

या $(r-2)(r^2 + 4r + 8) = 0$

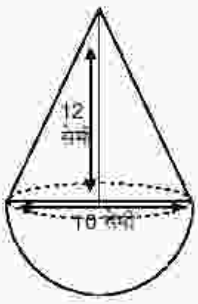
यदि $r - 2 = 0$ तब $r = \mathbf{2}$ **सेमी**

तथा $r^2 + 4r + 8 = 0$ जो मान्य नहीं है।

अतः आधार की अभीष्ट त्रिज्या $= \mathbf{2}$ **सेमी** **उत्तर**

35. कोई ठोस एक अर्द्ध गोले के समतल पृष्ठ पर खड़े एक शंकु के आकार का है। अर्द्ध गोले के समतल पृष्ठ का व्यास तथा शंकु के आधार का व्यास 10 सेमी है और शंकु की ऊँचाई 12 सेमी है। इस ठोस का वक्रपृष्ठ और आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– ठोस की आकृति चित्रानुसार है, जिसमें शंकु व अर्द्धगोले का एक आधार है। जिसका व्यास $= 10$ सेमी



$\therefore$ शंकु की त्रिज्या = अर्द्ध गोले की त्रिज्या

$$(r) = \frac{10}{2} = 5 \text{ सेमी}$$

शंकु की ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 5^2}$

$= \sqrt{169} = 13$ सेमी

ठोस का वक्रपृष्ठ = शंकु का वक्रपृष्ठ + अर्द्ध गोले का वक्रपृष्ठ

$= \pi r l + 2\pi r^2 = \pi r(l + 2r)$

$= \pi \times 5(13 + 2 \times 5) = \pi \times 5(13 + 10)$

$= \pi \times 5 \times 23 = 115\pi$ सेमी^{2}

ठोस का आयतन = शंकु का आयतन + अर्द्ध गोले का आयतन

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h + 2r)$

$= \frac{1}{3}\pi \times 5^2 (12 + 2 \times 5)$

$= \frac{25}{3}\pi \times (12 + 10)$

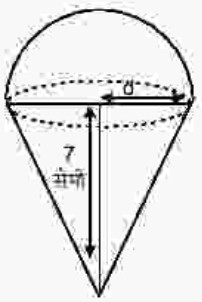
$= \frac{25}{3}\pi \times 22 = \frac{\mathbf{550}}{3}\pi$ **सेमी**^{3} **उत्तर**

36. एक ही आधार पर एक लम्बवृत्तीय शंकु तथा अर्द्ध गोले से एक ठोस निर्मित हुआ है। ठोस का सम्पूर्ण आयतन 80π घन सेमी तथा शंकु की ऊँचाई 7 सेमी है। ठोस के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल– चित्रानुसार, माना ठोस के उभयनिष्ठ आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

दिया है—शंकु की ऊँचाई $(h) = 7$ सेमी

ठोस का सम्पूर्ण आयतन = शंकु का आयतन + अर्द्ध गोले का आयतन



या $$80\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

या $$80 = \frac{1}{3}r^2 h + \frac{2}{3}r^3$$

या $$80 = \frac{1}{3}r^2 \times 7 + \frac{2}{3}r^3$$

या $$240 = 7r^2 + 2r^3$$

या $$2r^3 + 7r^2 - 240 = 0$$

या $2r^3 - 8r^2 + 15r^2 - 60r + 60r - 240 = 0$

या $2r(r-4) + 15r(r-4) + 60(r-4) = 0$

या $(r-4)(2r + 15r + 60) = 0$

यदि $2r + 15r + 60 = 0$ जो असम्भव है

तथा यदि $r - 4 = 0$ तो $r = 4$ सेमी

अतः ठोस के आधार का व्यास $= 2r = 2 \times 4 = \mathbf{8}$ **सेमी** **उत्तर**

37. उभयनिष्ठ आधार पर अर्द्धगोले तथा एक लम्बवृत्तीय शंकु को रखकर एक ठोस बनाया गया है। ठोस का सम्पूर्ण आयतन 64π घन सेमी तथा शंकु की ऊँचाई 4 सेमी है। ठोस के उभयनिष्ठ आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना, अर्द्ध गोले व शंकु के उभयनिष्ठ आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

दिया है—शंकु की ऊँचाई $(h) = 4$ सेमी

अतः शंकु का आयतन + अर्द्धगोले का आयतन = सम्पूर्ण ठोस का आयतन

या $$\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = 64\pi$$

या $$r^2 h + 2r^3 = 192$$

या $$r^2 \times 4 + 2r^3 = 192$$

या $$2r^3 + 4r^2 - 192 = 0$$

या $$r^3 + 2r^2 - 96 = 0$$

या $$r^3 - 4r^2 + 6r^2 - 24r + 24r - 96 = 0$$

या $$r^2(r-4) + 6r(r-4) + 24(r-4) = 0$$

या $$(r-4)(r^2 + 6r + 24) = 0$$

या $r - 4 = 0$ (यहाँ समीकरण $r^2 + 6r + 24 = 0$ के सभी मूल काल्पनिक होने के कारण छोड़ने पर)

या $$r = \mathbf{4}$$ **सेमी** **उत्तर**

38. व्यास 10.5 सेमी वाले एक अर्द्ध गोलाकार कटोरे में कितना दूध आ सकता है?

हल– दिया है—अर्द्ध गोलाकार कटोरे का व्यास = 10.5 सेमी

$$\text{त्रिज्या } (r) = \frac{10.5}{2} \text{ सेमी}$$

अत: कटोरे में दूध की मात्रा = कटोरे का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{10.5}{2}\right)^3$$

$$= \frac{2 \times 22 \times 10.5 \times 10.5 \times 10.5}{3 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$= \frac{11 \times 3.5 \times 1.5 \times 10.5}{2} = \frac{606.375}{2}$$

$$= 303.18 \text{ सेमी}^3$$

या $$= \frac{303.18}{1000} \text{ लीटर}$$

या $$= 0.303 \text{ लीटर}$$ **उत्तर**

39. एक अर्द्ध गोलाकार टंकी 1 सेमी मोटी एक लोहे की चादर से बनी है। यदि इसकी आन्तरिक त्रिज्या 1 मीटर है तो टंकी के बनाने में लगे लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्ध गोलाकार टंकी की आन्तरिक त्रिज्या $(r) = 1$ मीटर

तथा टंकी की मोटाई $= 1$ सेमी $= \frac{1}{100}$ मीटर $= 0.01$ मीटर

अत: टंकी की बाहरी त्रिज्या $(R) = 1 + 0.01 = 1.01$ मीटर

टंकी में लगे लोहे का आयतन = टंकी का बाहरी आयतन − टंकी का भीतरी आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} [(1.01)^3 - 1^3]$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} [1.03 - 1]$$

$$= \frac{44}{3 \times 7} \times 0.03 = \frac{44 \times 0.01}{7}$$

$$= \frac{0.44}{7} = 0.0628 \text{ मीटर}^3$$ **उत्तर**

40. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है।

हल– दिया है—गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 154$ सेमी^{2}

या $$4\pi r^2 = 154$$

या $$4 \times \frac{22}{7} r^2 = 154$$

या $$r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22}$$

या $r^2 = \frac{7\times 7}{4} = \frac{49}{4}$

या $r = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$ सेमी

अत: गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\left(\frac{7}{2}\right)^3$

$= \frac{4\times 22\times 7\times 7\times 7}{3\times 7\times 2\times 2\times 2} = \frac{11\times 7\times 7}{3}$

$= \frac{539}{3} = 179\frac{2}{3}$ सेमी^{3} उत्तर

41. किसी भवन का गुंबद एक अर्द्ध गोले के आकार का है। अंदर से इसमें सफेदी कराने में ₹498.96 व्यय हुए। यदि सफेदी कराने की दर ₹2 प्रति वर्ग मीटर है, तो ज्ञात कीजिए— (i) गुंबद का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) गुंबद के अंदर की हवा का आयतन।

हल– दिया है—गुंबद के अन्दर सफेदी कराने का व्यय = ₹498.96

सफेदी कराने की दर = ₹2 प्रति वर्ग मीटर

अत: अर्द्ध गोलाकार गुंबद का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{498.96}{2}$

$= 249.48$ मीटर^2 उत्तर

पुन: अर्द्ध गोलाकार गुंबद का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 249.48 मीटर^2

या $2\pi r^2 = 249.48$

या $\frac{2\times 22}{7} r^2 = 249.48$

या $r^2 = \frac{349.48\times 7}{2\times 22}$

या $r^2 = 5.67\times 7 = 39.69$

या $r = \sqrt{39.69} = 6.3$ मीटर

अत: अर्द्ध गोलाकार गुंबद के अन्दर की हवा का आयतन

= अर्द्धगोलाकार गुंबद का आयतन

या $= \frac{2}{3}\pi r^3$

या $= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times(6.3)^3$

या $= \frac{2\times 22\times 6.3\times 6.3\times 6.3}{21}$

या $= 44\times 0.3\times 6.3\times 6.3$

या $= 523.9$ मीटर^3 उत्तर

42. लोहे के 27 छोस गोलों को पिघलाकर, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r और पृष्ठीय क्षेत्रफल S है, एक बड़ा गोला बनाया जाता है, जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S' है, ज्ञात कीजिए—

(i) नए गोले की त्रिज्या r'

(ii) S और S' का अनुपात।

हल– दिया है—लोहे के छोटे गोलों की त्रिज्या $= r$

अत: प्रत्येक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $S = 4\pi r^2$

तथा 1 गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ 27 गोलों का आयतन $= 27 \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$= 36\pi r^3$

$\because$ छोटे गोलों को पिघलाकर एक बड़ा गोला बनाया जाता है, जिसकी त्रिज्या r' है।

बड़े गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r'^3$

बड़े गोले का आयतन $=$ 27 छोटे गोलों का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi r'^3 = 36\pi r^3$$

या $$r'^3 = \frac{3 \times 36\pi r^3}{4 \times \pi}$$

या $$r'^3 = 27r^3$$

या $$r' = \sqrt[3]{27r^3}$$

या $$r' = 3r$$ उत्तर

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $(S') = 4\pi r'^2$

या $$S' = 4\pi(3r)^2$$

$$= 4\pi \times 9r$$

$$= 36\pi r^2$$

तथा $$\frac{S}{S'} = \frac{4\pi r^2}{36\pi r^2}$$

$$= \frac{1}{9}$$

या $$S : S' = 1 : 9$$ उत्तर

43. दवाई का एक कैप्सूल (capsule) 3.5 मिमी व्यास का एक गोला (गोली) है। इस कैप्सूल को भरने के लिए कितनी दवाई (मिमी^{3} में) की आवश्यकता होगी?

हल– दिया है—गोलाकार दवाई के कैप्सूल का व्यास = 3.5 मिमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ मिमी

कैप्सूल को भरने के लिए आवश्यक दवाई = कैप्सूल का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3.5}{2}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}$$

$$= \frac{11 \times 0.5 \times 3.5 \times 3.5}{3}$$

$$= \frac{67.375}{3}$$

$$= 22.46 \text{ मिमी}^3$$ **उत्तर**

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट– बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 343 व 344 का अवलोकन कीजिए।

■ □ ■